Kapitola 12: Soustavy lineárních algebraických rovnic

Soustavy lineárních algebraických rovnic (1)

Definice: Soustavou m lineárních algebraických rovnic o n neznámých rozumíme soustavu rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

kde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ jsou daná čísla a $x_1, \ldots, x_n$ jsou neznámé.

$A = (a_{ij})$ - matice soustavy (matice typu (m, n))

$\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$ - vektor pravých stran

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ - vektor neznámých

$(A \mid \vec{b})$ - rozšířená matice soustavy (matice typu $(m, n+1)$)

Soustavy lineárních algebraických rovnic (1)

Definice: Soustavou m lineárních algebraických rovnic o n neznámých rozumíme soustavu rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1, \\ & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m, \end{array}$$

kde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ jsou daná čísla a $x_1, \ldots, x_n$ jsou neznámé.

$A = (a_{ij})$ - matice soustavy (matice typu (m, n))

$\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$ - vektor pravých stran

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ - vektor neznámých

$(A \mid \vec{b})$ - rozšířená matice soustavy (matice typu $(m, n+1)$)

Soustavy lineárních algebraických rovnic (1)

Definice: Soustavou m lineárních algebraických rovnic o n neznámých rozumíme soustavu rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1, \\ & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m, \end{array}$$

kde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ jsou daná čísla a $x_1, \ldots, x_n$ jsou neznámé.

$A = (a_{ij})$ - matice soustavy (matice typu (m, n))

$\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$ - vektor pravých stran

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ - vektor neznámých

$(A \mid \vec{b})$ - rozšířená matice soustavy (matice typu $(m, n+1)$)

Soustavy lineárních algebraických rovnic (1)

Definice: Soustavou m lineárních algebraických rovnic o n neznámých rozumíme soustavu rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1, \\ & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m, \end{array}$$

kde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ jsou daná čísla a $x_1, \ldots, x_n$ jsou neznámé.

$A = (a_{ij})$ - matice soustavy (matice typu (m, n))

$\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$ - vektor pravých stran

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ - vektor neznámých

$(A \mid \vec{b})$ - rozšířená matice soustavy (matice typu $(m, n+1)$)

Soustavy lineárních algebraických rovnic (1)

Definice: Soustavou m lineárních algebraických rovnic o n neznámých rozumíme soustavu rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1, \\ & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m, \end{array}$$

kde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ jsou daná čísla a $x_1, \ldots, x_n$ jsou neznámé.

$A = (a_{ij})$ - matice soustavy (matice typu (m, n))
$\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$ - vektor pravých stran
$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ - vektor neznámých
$(A \mid \vec{b})$ - rozšířená matice soustavy (matice typu $(m, n+1)$)

Soustavy lineárních algebraických rovnic (2)

Je-li vektor $\vec{b}$ nulový vektor, nazýváme soustavu homogenní. Jinak říkáme, že soustava je nehomogenní.

Řešením soustavy rozumíme každý vektor $\vec{x}$, který po dosazení do rovnic rovnice splňuje.

Soustavy lineárních algebraických rovnic (2)

Je-li vektor $\vec{b}$ nulový vektor, nazýváme soustavu homogenní. Jinak říkáme, že soustava je nehomogenní.

Řešením soustavy rozumíme každý vektor $\vec{x}$, který po dosazení do rovnic rovnice splňuje.

Maticový zápis

Soustava

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}$$

má maticový zápis

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

neboli

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Řešení soustav

- $V_N := \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{y} = \vec{b}\}$ - všechna řešení nehomogenní soustavy $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{b} \neq \vec{o}$
- $V_H := \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{y} = \vec{o}\}$ - všechna řešení homogenní soustavy $A\vec{x} = \vec{o}$

Věta: Frobeniova věta
Soustava $A\vec{x} = \vec{b}$ má řešení právě tehdy, když

$$h(A) = h((A \mid \vec{b})).$$

Řešení soustav

- $V_N := \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid A\,\vec{y} = \vec{b}\}$ - všechna řešení nehomogenní soustavy $A\,\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{b} \neq \vec{o}$
- $V_H := \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid A\,\vec{y} = \vec{o}\}$ - všechna řešení homogenní soustavy $A\,\vec{x} = \vec{o}$

Věta: Frobeniova věta
Soustava $A\,\vec{x} = \vec{b}$ má řešení právě tehdy, když

$$h(A) = h((A \,|\, \vec{b})).$$

Řešení homogenních soustav (1)

Věta: Homogenní soustava $A\,\vec{x} = \vec{o}$ je vždy řešitelná. Všechna její řešení splňují:

(i) součet dvou řešení je opět řešení

$$A\vec{x} = \vec{o} \;\wedge\; A\,\vec{y} = \vec{o} \quad\Rightarrow\quad A\,(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{o}$$

(ii) násobek řešení je opět řešení

$$A\,\vec{x} = \vec{o} \quad\Rightarrow\quad A\,(\alpha\,\vec{x}) = \vec{o}$$

Počet LN řešení homogenní soustavy je roven číslu $k = n - h(A)$.

Řešení homogenních soustav (2)

$$A\vec{x} = \vec{o}, \quad k = n - h(A)$$

Poznámka: Jsou-li $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k$ LN řešení soustavy $A\vec{x} = \vec{o}$, potom každé jiné řešení této soustavy je lineární kombinací vektorů $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k$.

$$V_H = \{\vec{y}_H = c_1\vec{y}_1 + \cdots + c_k\vec{y}_k \mid c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, k\}$$

$\vec{y}_H$ - obecné řešení homogenní soustavy $A\vec{x} = \vec{o}$

Poznámka:

- $h(A) = n \quad \Rightarrow \quad k = n - h(A) = 0$
  $\Rightarrow \quad A\vec{x} = \vec{o}$ má pouze nulové (tzv. triviální) řešení
- $h(A) < n \quad \Rightarrow \quad k = n - h(A) > 0$
  $\Rightarrow \quad A\vec{x} = \vec{o}$ má nenulové řešení
  $\Rightarrow \quad A\vec{x} = \vec{o}$ má nekonečně mnoho řešení

Řešení homogenních soustav (2)

$A\vec{x} = \vec{o}, \quad k = n - h(A)$

Poznámka: Jsou-li $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k$ LN řešení soustavy $A\vec{x} = \vec{o}$, potom každé jiné řešení této soustavy je lineární kombinací vektorů $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k$.

$$V_H = \{\vec{y}_H = c_1\,\vec{y}_1 + \cdots + c_k\vec{y}_k \mid c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k\}$$

$\vec{y}_H$ - obecné řešení homogenní soustavy $A\vec{x} = \vec{o}$

Poznámka:

- $h(A) = n \quad \Rightarrow \quad k = n - h(A) = 0$
  $\Rightarrow \quad A\vec{x} = \vec{o}$ má pouze nulové (tzv. triviální) řešení
- $h(A) < n \quad \Rightarrow \quad k = n - h(A) > 0$
  $\Rightarrow \quad A\vec{x} = \vec{o}$ má nenulové řešení
  $\Rightarrow \quad A\vec{x} = \vec{o}$ má nekonečně mnoho řešení

Řešení homogenních soustav (2)

$$A\vec{x} = \vec{o}, \quad k = n - h(A)$$

Poznámka: Jsou-li $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k$ LN řešení soustavy $A\vec{x} = \vec{o}$, potom každé jiné řešení této soustavy je lineární kombinací vektorů $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k$.

$$V_H = \{\vec{y}_H = c_1\vec{y}_1 + \cdots + c_k\vec{y}_k \mid c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, k\}$$

$\vec{y}_H$ - obecné řešení homogenní soustavy $A\vec{x} = \vec{o}$

Poznámka:

- $h(A) = n \quad \Rightarrow \quad k = n - h(A) = 0$
  $\Rightarrow \; A\vec{x} = \vec{o}$ má pouze nulové (tzv. triviální) řešení
- $h(A) < n \quad \Rightarrow \quad k = n - h(A) > 0$
  $\Rightarrow \; A\vec{x} = \vec{o}$ má nenulové řešení
  $\Rightarrow \; A\vec{x} = \vec{o}$ má nekonečně mnoho řešení

Řešení homogenních soustav (2)

$A\vec{x} = \vec{o}, \quad k = n - h(A)$

Poznámka: Jsou-li $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k$ LN řešení soustavy $A\vec{x} = \vec{o}$, potom každé jiné řešení této soustavy je lineární kombinací vektorů $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k$.

$$V_H = \{\vec{y}_H = c_1\,\vec{y}_1 + \cdots + c_k\vec{y}_k \mid c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, k\}$$

$\vec{y}_H$ - obecné řešení homogenní soustavy $A\vec{x} = \vec{o}$

Poznámka:

- $h(A) = n \;\Rightarrow\; k = n - h(A) = 0$
  $\Rightarrow\; A\vec{x} = \vec{o}$ má pouze nulové (tzv. triviální) řešení
- $h(A) < n \;\Rightarrow\; k = n - h(A) > 0$
  $\Rightarrow\; A\vec{x} = \vec{o}$ má nenulové řešení
  $\Rightarrow\; A\vec{x} = \vec{o}$ má nekonečně mnoho řešení

Řešení nehomogenních soustav

Věta: Nechť $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ je řešením soustavy $A\,\vec{x} = \vec{b}$. Nechť V_H je množina všech řešení příslušné homogenní soustavy $A\,\vec{x} = \vec{o}$. Pak libovolné řešení soustavy $A\,\vec{x} = \vec{b}$ lze psát ve tvaru

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}, \text{ kde } \vec{v} \in V_H.$$

Naopak, každý vektor $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}$, kde $\vec{v} \in V_H$, je řešením soustavy $A\,\vec{x} = \vec{b}$.

Gaussova eliminace

Metoda řešení soustav lineárních rovnic $A\vec{x} = \vec{b}$:

(i) $(A \,|\, \vec{b})$ převedeme ekviv. úpravami na HT-matici $(B \,|\, \vec{d})$
- při prohazování sloupců se prohazují i neznámé
- sloupec odpovídající sloupci pravých stran nesmíme zaměnit s jiným sloupcem

(ii) $h(A) = h(B), \quad h((A \,|\, \vec{b})) = h((B \,|\, \vec{d}))$
- $h(A) < h((A \,|\, \vec{b})) \;\Rightarrow\;$ soustava nemá řešení
- $h(A) = h((A \,|\, \vec{b})) \;\Rightarrow\;$ soustava má řešení
  - $h(A) = n \;\Rightarrow\;$ právě jedno řešení
  - $h(A) < n \;\Rightarrow\;$ nekonečně mnoho řešení

(iii) $k = n - h(A)$ udává počet volitelných neznámých
$\Rightarrow$ posledních k neznámých volíme za parametry

(iv) zpětný chod Gaussovy eliminace: hodnoty ostatních neznámých postupně určujeme z rovnic, které představují řádky matice $(B \,|\, \vec{d})$, v závislosti na parametrech
- postupujeme od posledního k prvnímu řádku $(B \,|\, \vec{d})$

Gaussova eliminace

Metoda řešení soustav lineárních rovnic $A\vec{x} = \vec{b}$:

(i) $(A\,|\,\vec{b})$ převedeme ekviv. úpravami na HT-matici $(B\,|\,\vec{d})$
- při prohazování sloupců se prohazují i neznámé
- sloupec odpovídající sloupci pravých stran nesmíme zaměnit s jiným sloupcem

(ii) $h(A) = h(B), \quad h((A\,|\,\vec{b})) = h((B\,|\,\vec{d}))$
- $h(A) < h((A\,|\,\vec{b})) \quad \Rightarrow$ soustava nemá řešení
- $h(A) = h((A\,|\,\vec{b})) \quad \Rightarrow$ soustava má řešení
  - $h(A) = n \quad \Rightarrow$ právě jedno řešení
  - $h(A) < n \quad \Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení

(iii) $k = n - h(A)$ udává počet volitelných neznámých
$\Rightarrow$ posledních k neznámých volíme za parametry

(iv) zpětný chod Gaussovy eliminace: hodnoty ostatních neznámých postupně určujeme z rovnic, které představují řádky matice $(B\,|\,\vec{d})$, v závislosti na parametrech
- postupujeme od posledního k prvnímu řádku $(B\,|\,\vec{d})$

Gaussova eliminace

Metoda řešení soustav lineárních rovnic $A\vec{x} = \vec{b}$:

(i) $(A \mid \vec{b})$ převedeme ekviv. úpravami na HT-matici $(B \mid \vec{d})$
- při prohazování sloupců se prohazují i neznámé
- sloupec odpovídající sloupci pravých stran nesmíme zaměnit s jiným sloupcem

(ii) $h(A) = h(B), \quad h((A \mid \vec{b})) = h((B \mid \vec{d}))$
- $h(A) < h((A \mid \vec{b})) \Rightarrow$ soustava nemá řešení
- $h(A) = h((A \mid \vec{b})) \Rightarrow$ soustava má řešení
  - $h(A) = n \Rightarrow$ právě jedno řešení
  - $h(A) < n \Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení

(iii) $k = n - h(A)$ udává počet volitelných neznámých
$\Rightarrow$ posledních k neznámých volíme za parametry

(iv) zpětný chod Gaussovy eliminace: hodnoty ostatních neznámých postupně určujeme z rovnic, které představují řádky matice $(B \mid \vec{d})$, v závislosti na parametrech
- postupujeme od posledního k prvnímu řádku $(B \mid \vec{d})$

Gaussova eliminace

Metoda řešení soustav lineárních rovnic $A\vec{x} = \vec{b}$:

(i) $(A\,|\,\vec{b})$ převedeme ekviv. úpravami na HT-matici $(B\,|\,\vec{d})$
- při prohazování sloupců se prohazují i neznámé
- sloupec odpovídající sloupci pravých stran nesmíme zaměnit s jiným sloupcem

(ii) $h(A) = h(B), \quad h((A\,|\,\vec{b})) = h((B\,|\,\vec{d}))$
- $h(A) < h((A\,|\,\vec{b})) \;\Rightarrow$ soustava nemá řešení
- $h(A) = h((A\,|\,\vec{b})) \;\Rightarrow$ soustava má řešení
  - $h(A) = n \;\Rightarrow$ právě jedno řešení
  - $h(A) < n \;\Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení

(iii) $k = n - h(A)$ udává počet volitelných neznámých
$\Rightarrow$ posledních k neznámých volíme za parametry

(iv) zpětný chod Gaussovy eliminace: hodnoty ostatních neznámých postupně určujeme z rovnic, které představují řádky matice $(B\,|\,\vec{d})$, v závislosti na parametrech
\- postupujeme od posledního k prvnímu řádku $(B\,|\,\vec{d})$

Gaussova eliminace

Metoda řešení soustav lineárních rovnic $A\vec{x} = \vec{b}$:

(i) $(A\,|\,\vec{b})$ převedeme ekviv. úpravami na HT-matici $(B\,|\,\vec{d})$
- při prohazování sloupců se prohazují i neznámé
- sloupec odpovídající sloupci pravých stran nesmíme zaměnit s jiným sloupcem

(ii) $h(A) = h(B), \quad h((A\,|\,\vec{b})) = h((B\,|\,\vec{d}))$
- $h(A) < h((A\,|\,\vec{b})) \;\Rightarrow$ soustava nemá řešení
- $h(A) = h((A\,|\,\vec{b})) \;\Rightarrow$ soustava má řešení
  - $h(A) = n \;\Rightarrow$ právě jedno řešení
  - $h(A) < n \;\Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení

(iii) $k = n - h(A)$ udává počet volitelných neznámých
$\Rightarrow$ posledních k neznámých volíme za parametry

(iv) zpětný chod Gaussovy eliminace: hodnoty ostatních neznámých postupně určujeme z rovnic, které představují řádky matice $(B\,|\,\vec{d})$, v závislosti na parametrech
- postupujeme od posledního k prvnímu řádku $(B\,|\,\vec{d})$

Cramerovo pravidlo

Věta: Uvažujme soustavu n lineárních algebraických rovnic o n neznámých s maticovou reprezentací $A\vec{x} = \vec{b}$, kde $A = (a_{ij})$ je regulární čtvercová matice řádu n. Označme A_i matici, která vznikne z matice A nahrazením i-tého sloupce A vektorem $\vec{b}$ pravých stran pro $i = 1, \ldots, n$.
Potom jediné řešení $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ soustavy $A\vec{x} = \vec{b}$ je dáno vztahem

$$x_i = \frac{\det\ A_i}{\det\ A}, \quad i = 1, \ldots, n.$$