Kapitola 13: Geometrie v $\mathbb{R}^3$

Euklidovský prostor $\mathbb{R}^3$
$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3),\ x_i \in \mathbb{R}\ i = 1, 2, 3\}$
$\mathbb{R}^3$ - množina bodů $A \in \mathbb{R}^3$
- množina vektorů $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$

Definice: Jsou-li $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, pak *euklidovskou vzdáleností* bodů A, B rozumíme číslo

$$\rho(A, B) \ = \ \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (b_i - a_i)^2}.$$

Věta: Pro libovolné body $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ platí

(i) $\rho(A, B) \geq 0;\ \rho(A, B) = 0 \ \Leftrightarrow \ A = B$

(ii) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$

(iii) $\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C)$.

Skalární součin $\mathbb{R}^3$

Definice: *Skalárním součinem* vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ rozumíme číslo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$$

Věta: Pro libovolné dva vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

(ii) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

(iii) $(\alpha\, \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha\, (\vec{u} \cdot \vec{v})$

(iv) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ a $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \ \Leftrightarrow \ \vec{u} = \vec{o}$.

Norma na $\mathbb{R}^3$
Definice: *Euklidovskou normou* vektoru $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ rozumíme číslo

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} v_i^2}$$

Poznámka: Jestliže $\vec{v} = B - A$, potom $\|\vec{v}\| = \rho(A, B)$.
Věta: Pro libovolné dva vektory $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

(i) $\|\vec{v}\| \geq 0,\ \|\vec{v}\| = 0 \ \Leftrightarrow\ \vec{v} = \vec{o}$, kde $\vec{o} = (0, 0, 0)$

(ii) $\|\alpha\, \vec{v}\| = |\alpha| \|\vec{v}\|$

(iii) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ - trojúhelníková nerovnost

(iv) $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\, \|\vec{v}\|$ - Cauchy-Schwarzova nerovnost.

Vektorový součin v $\mathbb{R}^3$
Definice: Jsou-li vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektory z $\mathbb{R}^3$, pak *vektorovým součinem* vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ rozumíme vektor

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

Věta: Pro libovolné tři vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

(i) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

(ii) $(\alpha \vec{u}) \times \vec{v} = \alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (\alpha \vec{v})$

(iii) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

Věta:

(i) Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ je kolmý k oběma vektorům $\vec{u}$, $\vec{v}$

(ii) $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\, \|\vec{v}\|\, \sin\varphi$, kde φ je úhel vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Objem čtyřstěnu v $\mathbb{R}^3$
Definice: *Smíšeným součinem* tří vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ rozumíme číslo

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Poznámky: Platí, že $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$.

Objem čtyřstěnu $ABCD$:

$$V_{ABCD} \; = \; \frac{1}{6} |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| \; = \; \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \right|,$$

kde $\vec{u} = B - A,\ \vec{v} = C - A,\ \vec{w} = D - A$.

Parametrické rovnice přímky a roviny v $\mathbb{R}^3$
Definice: Nechť $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ a $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, potom pro každý bod X přímky p procházející body A a B platí

$$X \; = \; A \; + \; t\,\vec{AB} \; = \; A \; + \; t\,(B - A), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Rovnici nazýváme *parametrickými rovnicemi přímky* p. Vektor $\overrightarrow{AB} = (B - A)$ nazýváme *směrovým vektorem* přímky p.
Definice: Nechť $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ a $C = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$, potom pro každý bod X roviny ρ dané body A, B a C platí

$$X \; = \; A \; + \; t\,\overrightarrow{AB} \; + s\,\overrightarrow{AC} \; = \; A \; + \; t\,(B - A) \; + \; s\,(C - A), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Rovnici nazýváme *parametrickými rovnicemi roviny* ρ. Vektory $\overrightarrow{AB} = (B - A)$ a $\overrightarrow{AC} = (C - A)$ nazýváme *směrovými vektory* roviny ρ.

Obecná rovnice roviny v $\mathbb{R}^3$
Definice: Nechť $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ a $\vec{n} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, potom rovnici

$$\vec{n} \cdot X + d = 0$$

nazýváme *obecnou rovnicí roviny v* $\mathbb{R}^3$, vektor $\vec{n}$ se nazývá *normálový vektor roviny* (normálový vektor je kolmý na rovinu).

Poznámka: Je-li $X = (x, y, z)$ a $\vec{n} = (a, b, c)$, potom obecnou rovnicí roviny v $\mathbb{R}^3$ je rovnice

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0.$$