Spojitost a limita funkce

Okolí bodu

Značení: $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0$ označujeme

- $\mathcal{O}_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ε-ové okolí bodu a

  $\mathcal{O}^+_\varepsilon(a) = \langle a, a+\varepsilon)$ pravé okolí, $\mathcal{O}^-_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a\rangle$ levé okolí

- $\mathcal{P}_\varepsilon(a) = \mathcal{O}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ ε-ové prstencové okolí bodu a

  $\mathcal{P}^+_\varepsilon(a) = (a, a+\varepsilon)$ pravé okolí, $\mathcal{P}^-_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a)$ levé okolí

- $x \to a$ x se "blíží"k a
  x nabývá hodnot libovolně blízkých k a

  $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$

Okolí bodu

Značení: $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0$ označujeme

- $\mathcal{O}_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ε-ové okolí bodu a

  $\mathcal{O}^+_\varepsilon(a) = \langle a, a + \varepsilon)$ pravé okolí, $\mathcal{O}^-_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a\rangle$ levé okolí

- $\mathcal{P}_\varepsilon(a) = \mathcal{O}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ ε-ové prstencové okolí bodu a

  $\mathcal{P}^+_\varepsilon(a) = (a, a+\varepsilon)$ pravé okolí, $\mathcal{P}^-_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a)$ levé okolí

- $x \to a$ x se "blíží"k a
  x nabývá hodnot libovolně blízkých k a

  $x \to a+,\ x \to a-,\ x \to +\infty,\ x \to -\infty$

Okolí bodu

Značení: $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0$ označujeme

- $\mathcal{O}_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ε-ové okolí bodu a

  $\mathcal{O}_\varepsilon^+(a) = \langle a, a+\varepsilon)$ pravé okolí, $\mathcal{O}_\varepsilon^-(a) = (a-\varepsilon, a\rangle$ levé okolí

- $\mathcal{P}_\varepsilon(a) = \mathcal{O}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ ε-ové prstencové okolí bodu a

  $\mathcal{P}_\varepsilon^+(a) = (a, a+\varepsilon)$ pravé okolí, $\mathcal{P}_\varepsilon^-(a) = (a-\varepsilon, a)$ levé okolí

- $x \to a$ x se "blíží"k a
  x nabývá hodnot libovolně blízkých k a

  $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$

Spojitost funkce (1)

Definice: Nechť funkce f je definovaná v jistém okolí bodu a. Říkáme, že f je spojitá v bodě $a \in D(f)$, jestliže

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(f(a))\ \exists \mathcal{O}_\delta(a): \quad f(\mathcal{O}_\delta(a)) \subseteq \mathcal{O}_\varepsilon(f(a))$$

ekvivalentně:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Definice: Říkáme, že funkce f je spojitá na otevřeném intervalu (a, b), je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

Spojitost funkce (1)

Definice: Nechť funkce f je definovaná v jistém okolí bodu a. Říkáme, že f je spojitá v bodě $a \in D(f)$, jestliže

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(f(a))\ \exists \mathcal{O}_\delta(a): \quad f(\mathcal{O}_\delta(a)) \subseteq \mathcal{O}_\varepsilon(f(a))$$

ekvivalentně:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Definice: Říkáme, že funkce f je spojitá na otevřeném intervalu (a, b), je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

Spojitost funkce (1)

Definice: Nechť funkce f je definovaná v jistém okolí bodu a. Říkáme, že f je spojitá v bodě $a \in D(f)$, jestliže

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(f(a))\ \exists \mathcal{O}_\delta(a): \quad f(\mathcal{O}_\delta(a)) \subseteq \mathcal{O}_\varepsilon(f(a))$$

ekvivalentně:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Definice: Říkáme, že funkce f je spojitá na otevřeném intervalu (a, b), je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

Spojitost funkce (2)

Definice: Říkáme, že funkce f je spojitá zprava/zleva v bodě $a \in D(f)$, jestliže

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(f(a))\ \exists \mathcal{O}_\delta^+(a): \quad f(\mathcal{O}_\delta^+(a)) \subseteq \mathcal{O}_\varepsilon(f(a))$$

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(f(a))\ \exists \mathcal{O}_\delta^-(a): \quad f(\mathcal{O}_\delta^-(a)) \subseteq \mathcal{O}_\varepsilon(f(a))$$

Definice: Říkáme, že funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, je-li

- spojitá v každém bodě intervalu (a, b),
- spojitá zprava v bodě a,
- spojitá zleva v bodě b.

Spojitost funkce (2)

Definice: Říkáme, že funkce f je spojitá zprava/zleva v bodě $a \in D(f)$, jestliže

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(f(a))\ \exists \mathcal{O}_\delta^+(a): \quad f(\mathcal{O}_\delta^+(a)) \subseteq \mathcal{O}_\varepsilon(f(a))$$

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(f(a))\ \exists \mathcal{O}_\delta^-(a): \quad f(\mathcal{O}_\delta^-(a)) \subseteq \mathcal{O}_\varepsilon(f(a))$$

Definice: Říkáme, že funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, je-li

- spojitá v každém bodě intervalu (a, b),
- spojitá zprava v bodě a,
- spojitá zleva v bodě b.

Spojitost funkce (3)

Věta: Jsou-li funkce f a g spojité v bodě a, pak jsou v tomto bodě spojité i funkce $|f|$, $f \pm g$, $f.g$, a je-li $g(a) \neq 0$ pak i $\frac{f}{g}$.

Věta: Je-li

- funkce $y = f(x)$ spojitá v bodě $x = a$,
- funkce $z = g(y)$ spojitá v bodě $y = f(a)$,

pak složená funkce $h(x) = g(f(x))$ je spojitá v bodě $x = a$.

Spojitost funkce (3)

Věta: Jsou-li funkce f a g spojité v bodě a, pak jsou v tomto bodě spojité i funkce $|f|$, $f \pm g$, $f.g$, a je-li $g(a) \neq 0$ pak i $\frac{f}{g}$.

Věta: Je-li

- funkce $y = f(x)$ spojitá v bodě $x = a$,
- funkce $z = g(y)$ spojitá v bodě $y = f(a)$,

pak složená funkce $h(x) = g(f(x))$ je spojitá v bodě $x = a$.

Limita funkce

Definice: Nechť funkce $f : D(f) \to \mathbb{R}$ je definována v nějakém $\mathcal{P}(a) \subseteq D(f)$. Říkáme, že funkce f má v bodě a limitu $A \in \mathbb{R}$, značíme $\lim_{x\to a} f(x) = A$, jestliže

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(A)\ \exists \mathcal{P}_\delta(a) : \quad f(\mathcal{P}_\delta(a)) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A)$$

ekvivalentně

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Věta: Funkce f má v bodě a nejvýše jednu limitu.

Limita funkce

Definice: Nechť funkce $f : D(f) \to \mathbb{R}$ je definována v nějakém $\mathcal{P}(a) \subseteq D(f)$. Říkáme, že funkce f má v bodě a limitu $A \in \mathbb{R}$, značíme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, jestliže

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(A)\ \exists \mathcal{P}_\delta(a) : \quad f(\mathcal{P}_\delta(a)) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A)$$

ekvivalentně

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Věta: Funkce f má v bodě a nejvýše jednu limitu.

Limita funkce

Definice: Nechť funkce $f : D(f) \to \mathbb{R}$ je definována v nějakém $\mathcal{P}(a) \subseteq D(f)$. Říkáme, že funkce f má v bodě a limitu $A \in \mathbb{R}$, značíme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, jestliže

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(A)\ \exists \mathcal{P}_\delta(a) : \quad f(\mathcal{P}_\delta(a)) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A)$$

ekvivalentně

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Věta: Funkce f má v bodě a nejvýše jednu limitu.

Výpočet limit (1)

Věta: Funkce f je spojitá v bodě $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Věta: Nechť $f : D(f) \to \mathbb{R}$, $g : D(g) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\exists \mathcal{P}(a) : \quad (\forall x \in \mathcal{P}(a) : \ f(x) = g(x)) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

Věta (o policajtech):
Nechť platí:

- $\forall x \in \mathcal{P}(a) : \ g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
- $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x)$

Potom existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ a rovná se $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Výpočet limit (1)

Věta: Funkce f je spojitá v bodě $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Věta: Nechť $f : D(f) \to \mathbb{R}$, $g : D(g) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\exists \mathcal{P}(a) : \quad (\forall x \in \mathcal{P}(a) : \; f(x) = g(x)) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$$

Věta (o policajtech):
Nechť platí:

- $\forall x \in \mathcal{P}(a) : \; g(x) \le f(x) \le h(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x)$

Potom existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ a rovná se $\lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Výpočet limit (1)

Věta: Funkce f je spojitá v bodě $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Věta: Nechť $f : D(f) \to \mathbb{R}$, $g : D(g) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\exists \mathcal{P}(a) : \quad (\forall x \in \mathcal{P}(a) : \ f(x) = g(x)) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

Věta (o policajtech):
Nechť platí:

- $\forall x \in \mathcal{P}(a) : \ g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
- $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x)$

Potom existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ a rovná se $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Výpočet limit (2)

Věta: Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B$, kde $A, B \in \mathbb{R}$. Platí:

(i) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$

(ii) $\lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = \lim_{x\to a} f(x). \lim_{x\to a} g(x) = A.B$

(iii) je-li $B \neq 0$, pak $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = (\lim_{x\to a} f(x))/(\lim_{x\to a} g(x)) = \dfrac{A}{B}$

Věta (o limitě složené funkce): Nechť $\lim_{x\to a} g(x) = A$ a nechť funkce f je spojitá v bodě A. Potom platí

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(A).$$

Poznámka:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$$

Výpočet limit (2)

Věta: Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B$, kde $A, B \in \mathbb{R}$. Platí:

(i) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$

(ii) $\lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = \lim_{x\to a} f(x). \lim_{x\to a} g(x) = A.B$

(iii) je-li $B \neq 0$, pak $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = (\lim_{x\to a} f(x))/(\lim_{x\to a} g(x)) = \frac{A}{B}$

Věta (o limitě složené funkce): Nechť $\lim_{x\to a} g(x) = A$ a nechť funkce f je spojitá v bodě A. Potom platí

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(A).$$

Poznámka:

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$$

Výpočet limit (2)

Věta: Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, kde $A, B \in \mathbb{R}$. Platí:

(i) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \pm B$

(ii) $\lim\limits_{x\to a}(f(x).g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x). \lim\limits_{x\to a} g(x) = A.B$

(iii) je-li $B \neq 0$, pak $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = (\lim\limits_{x\to a} f(x))/(\lim\limits_{x\to a} g(x)) = \dfrac{A}{B}$

Věta (o limitě složené funkce): Nechť $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$ a nechť funkce f je spojitá v bodě A. Potom platí

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(A).$$

Poznámka:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$$

Jednostranné limity

Definice: Nechť funkce $f : D(f) \to \mathbb{R}$ je definována v nějakém $\mathcal{P}^+(a) \subseteq D(f)$. Říkáme, že limita funkce f v bodě a zprava je rovna $A \in \mathbb{R}$, značíme $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$, jestliže

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(A)\ \exists \mathcal{P}_\delta^+(a) : \quad f(\mathcal{P}_\delta^+(a)) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A)$$

Definice: Nechť funkce $f : D(f) \to \mathbb{R}$ je definována v nějakém $\mathcal{P}^-(a) \subseteq D(f)$. Říkáme, že limita funkce f v bodě a zleva je rovna $A \in \mathbb{R}$, značíme $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$, jestliže

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(A)\ \exists \mathcal{P}_\delta^-(a) : \quad f(\mathcal{P}_\delta^-(a)) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A)$$

Věta: $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existuje $\Leftrightarrow \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x)$
Pak

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x)$$

Jednostranné limity

Definice: Nechť funkce $f : D(f) \to \mathbb{R}$ je definována v nějakém $\mathcal{P}^+(a) \subseteq D(f)$. Říkáme, že limita funkce f v bodě a zprava je rovna $A \in \mathbb{R}$, značíme $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$, jestliže

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(A)\ \exists \mathcal{P}^+_\delta(a) : \quad f(\mathcal{P}^+_\delta(a)) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A)$$

Definice: Nechť funkce $f : D(f) \to \mathbb{R}$ je definována v nějakém $\mathcal{P}^-(a) \subseteq D(f)$. Říkáme, že limita funkce f v bodě a zleva je rovna $A \in \mathbb{R}$, značíme $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$, jestliže

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(A)\ \exists \mathcal{P}^-_\delta(a) : \quad f(\mathcal{P}^-_\delta(a)) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A)$$

Věta: $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existuje $\Leftrightarrow \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x)$
Pak

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x)$$

Věty u oboustranných limit platí i pro jednostranné limity:

(i) f má v bodě a nejvýše jednu limitu zprava/zleva

(ii) f je spojitá v bodě a zprava/zleva $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a\pm} f(x) = f(a)$

(iii) $f(x) = g(x)$ pro $x \in \mathcal{P}^{\pm}(a) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a\pm} f(x) = \lim\limits_{x\to a\pm} g(x)$

(iv) Věta o policajtech:

$$\begin{array}{l} \forall x \in \mathcal{P}^{\pm}(a) : g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim\limits_{x\to a\pm} g(x) = \lim\limits_{x\to a\pm} h(x) \end{array} \Rightarrow \lim_{x\to a\pm} f(x) = \lim_{x\to a\pm} g(x)$$

(v) $\lim\limits_{x\to a\pm} (f(x) \dot{\pm} g(x)) = \lim\limits_{x\to a\pm} f(x) \dot{\pm} \lim\limits_{x\to a\pm} g(x)$

(vi) $\lim\limits_{x\to a\pm} \dfrac{f(x)}{g(x)} = (\lim\limits_{x\to a\pm} f(x))/(\lim\limits_{x\to a\pm} g(x))$, pokud $\lim\limits_{x\to a\pm} g(x) \neq 0$

(vii) $\lim\limits_{x\to a\pm} g(x) = A$
f spojitá v bodě A zprava/zleva $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a\pm} f(g(x)) = f(A)$

Nevlastní limity

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

I. Je-li $a, L \in \mathbb{R}$ říkáme vlastní limita ve vlastním bodě
II. Je-li $a \in \mathbb{R}$, $L = \pm\infty$ říkáme nevlastní limita ve vlastním bodě
III. Je-li $a = \pm\infty$ $L \in \mathbb{R}$ říkáme vlastní limita v nevlastním bodě
IV. Je-li $a = \pm\infty$, $L = \pm\infty$ říkáme nevlastní limita v nevlastním bodě

Případ I. jsme objasnili v předchozích odstavcích. Nyní probereme případy II., III. a IV.

Nevlastní limity

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

I. Je-li a, $L \in \mathbb{R}$ říkáme vlastní limita ve vlastním bodě
II. Je-li $a \in \mathbb{R}$, $L = \pm\infty$ říkáme nevlastní limita ve vlastním bodě
III. Je-li $a = \pm\infty$ $L \in \mathbb{R}$ říkáme vlastní limita v nevlastním bodě
IV. Je-li $a = \pm\infty$, $L = \pm\infty$ říkáme nevlastní limita v nevlastním bodě

Případ I. jsme objasnili v předchozích odstavcích. Nyní probereme případy II., III. a IV.

Nevlastní limity

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

I. Je-li a, $L \in \mathbb{R}$ říkáme vlastní limita ve vlastním bodě
II. Je-li $a \in \mathbb{R}$, $L = \pm\infty$ říkáme nevlastní limita ve vlastním bodě
III. Je-li $a = \pm\infty$ $L \in \mathbb{R}$ říkáme vlastní limita v nevlastním bodě
IV. Je-li $a = \pm\infty$, $L = \pm\infty$ říkáme nevlastní limita v nevlastním bodě

Případ I. jsme objasnili v předchozích odstavcích. Nyní probereme případy II., III. a IV.

Nevlastní limity

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

I. Je-li $a, L \in \mathbb{R}$ říkáme vlastní limita ve vlastním bodě
II. Je-li $a \in \mathbb{R}$, $L = \pm\infty$ říkáme nevlastní limita ve vlastním bodě
III. Je-li $a = \pm\infty$ $L \in \mathbb{R}$ říkáme vlastní limita v nevlastním bodě
IV. Je-li $a = \pm\infty$, $L = \pm\infty$ říkáme nevlastní limita v nevlastním bodě

Případ I. jsme objasnili v předchozích odstavcích. Nyní probereme případy II., III. a IV.

Nevlastní limity

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

I. Je-li $a,\ L \in \mathbb{R}$ říkáme vlastní limita ve vlastním bodě
II. Je-li $a \in \mathbb{R}$, $L = \pm\infty$ říkáme nevlastní limita ve vlastním bodě
III. Je-li $a = \pm\infty$ $L \in \mathbb{R}$ říkáme vlastní limita v nevlastním bodě
IV. Je-li $a = \pm\infty$, $L = \pm\infty$ říkáme nevlastní limita v nevlastním bodě

Případ I. jsme objasnili v předchozích odstavcích. Nyní probereme případy II., III. a IV.

Nevlastní limity

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

I. Je-li $a, L \in \mathbb{R}$ říkáme vlastní limita ve vlastním bodě
II. Je-li $a \in \mathbb{R}$, $L = \pm\infty$ říkáme nevlastní limita ve vlastním bodě
III. Je-li $a = \pm\infty$ $L \in \mathbb{R}$ říkáme vlastní limita v nevlastním bodě
IV. Je-li $a = \pm\infty$, $L = \pm\infty$ říkáme nevlastní limita v nevlastním bodě

Případ I. jsme objasnili v předchozích odstavcích. Nyní probereme případy II., III. a IV.

Nevlastní limity II.

Definice: Necht $f(x)$ je definována v $\mathcal{P}(a)$ potom

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ jestliže

$$\forall\, K > 0 \;\; \exists\, \mathcal{P}_\delta(a) \;\text{ takové, že }\; \forall\, x \in \mathcal{P}_\delta(a) \;\text{ je }\; f(x) > K$$

(ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ jestliže

$$\forall\, L < 0 \;\; \exists\, \mathcal{P}_\delta(a) \;\text{ takové, že }\; \forall\, x \in \mathcal{P}_\delta(a) \;\text{ je }\; f(x) < L$$

Poznámka: Použijeme-li $\mathcal{P}_\delta^+(a)$ nebo $\mathcal{P}_\delta^-(a)$ dostáváme jednostranné nevlastní limity ve vlastním bodě:

(i) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x\to a-} f(x) = \infty$

(ii) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to a-} f(x) = -\infty$

Věta:

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = \infty$

(ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = -\infty$

Nevlastní limity II.

Definice: Necht $f(x)$ je definována v $\mathcal{P}(a)$ potom

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ jestliže

$$\forall\, K > 0 \;\; \exists\, \mathcal{P}_\delta(a) \;\text{ takové, že }\; \forall\, x \in \mathcal{P}_\delta(a) \;\text{ je }\; f(x) > K$$

(ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ jestliže

$$\forall\, L < 0 \;\; \exists\, \mathcal{P}_\delta(a) \;\text{ takové, že }\; \forall\, x \in \mathcal{P}_\delta(a) \;\text{ je }\; f(x) < L$$

Poznámka: Použijeme-li $\mathcal{P}_\delta^+(a)$ nebo $\mathcal{P}_\delta^-(a)$ dostáváme jednostranné nevlastní limity ve vlastním bodě:

(i) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x\to a-} f(x) = \infty$

(ii) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to a-} f(x) = -\infty$

Věta:

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = \infty$

(ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = -\infty$

Nevlastní limity II.

Definice: Necht $f(x)$ je definována v $\mathcal{P}(a)$ potom

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ jestliže

$$\forall\, K > 0 \;\; \exists\, \mathcal{P}_\delta(a) \;\text{ takové, že }\; \forall\, x \in \mathcal{P}_\delta(a) \;\text{ je }\; f(x) > K$$

(ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ jestliže

$$\forall\, L < 0 \;\; \exists\, \mathcal{P}_\delta(a) \;\text{ takové, že }\; \forall\, x \in \mathcal{P}_\delta(a) \;\text{ je }\; f(x) < L$$

Poznámka: Použijeme-li $\mathcal{P}_\delta^+(a)$ nebo $\mathcal{P}_\delta^-(a)$ dostáváme jednostranné nevlastní limity ve vlastním bodě:

(i) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x\to a-} f(x) = \infty$

(ii) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to a-} f(x) = -\infty$

Věta:

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = \infty$

(ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = -\infty$

Nevlastní limity II.

Definice: Necht $f(x)$ je definována v $\mathcal{P}(a)$ potom

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ jestliže

$$\forall\, K > 0 \;\; \exists\, \mathcal{P}_\delta(a) \;\; \text{takové, že} \;\; \forall\, x \in \mathcal{P}_\delta(a) \;\; \text{je} \;\; f(x) > K$$

(ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ jestliže

$$\forall\, L < 0 \;\; \exists\, \mathcal{P}_\delta(a) \;\; \text{takové, že} \;\; \forall\, x \in \mathcal{P}_\delta(a) \;\; \text{je} \;\; f(x) < L$$

Poznámka: Použijeme-li $\mathcal{P}_\delta^+(a)$ nebo $\mathcal{P}_\delta^-(a)$ dostáváme jednostranné nevlastní limity ve vlastním bodě:

(i) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x\to a-} f(x) = \infty$

(ii) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to a-} f(x) = -\infty$

Věta:

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = \infty$

(ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = -\infty$

Věta:

(i) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, potom

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \infty\,.$$

(ii) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ a $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, potom

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \infty\,.$$

(iii) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, potom

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = -\infty$$

(iv) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R},\ A > 0$ a $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, potom

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \pm\infty\,.$$

(v) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, potom

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

Věta:

(i) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, potom

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \infty\,.$$

(ii) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ a $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, potom

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \infty\,.$$

(iii) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, potom

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = -\infty$$

(iv) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $A > 0$ a $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, potom

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \pm\infty\,.$$

(v) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, potom

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

Věta:

(i) Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, potom

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \infty\,.$$

(ii) Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, potom

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \infty\,.$$

(iii) Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, potom

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$$

(iv) Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R},\ A > 0$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, potom

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \pm\infty\,.$$

(v) Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, potom

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

Věta:

(i) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, potom

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \infty\,.$$

(ii) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ a $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, potom

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \infty\,.$$

(iii) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, potom

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$$

(iv) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R},\ A > 0$ a $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, potom

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \pm\infty\,.$$

(v) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, potom

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

Věta:

(i) Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, potom

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \infty\,.$$

(ii) Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, potom

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \infty\,.$$

(iii) Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, potom

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = -\infty$$

(iv) Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R},\ A > 0$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, potom

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \pm\infty\,.$$

(v) Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, potom

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

Věta: Nechť funkce f je omezená na nějakém $P(a)$, pak platí

(i) Je-li $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, pak $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

(ii) Je-li $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ pak, $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

Věta: Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A > 0$ a $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, pak

(i) Je-li $g(x) > 0$ na $\mathcal{P}(a)$, platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

(ii) Je-li $g(x) < 0$ na $\mathcal{P}(a)$, platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

(iii) Jestliže funkce $g(x)$ nabývá na každém $P(a)$ kladných i záporných hodnot, potom

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ neexistuje.}$$

Věta: Nechť funkce f je omezená na nějakém $P(a)$, pak platí

(i) Je-li $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, pak $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

(ii) Je-li $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ pak, $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

Věta: Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A > 0$ a $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, pak

(i) Je-li $g(x) > 0$ na $\mathcal{P}(a)$, platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty .$$

(ii) Je-li $g(x) < 0$ na $\mathcal{P}(a)$, platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty .$$

(iii) Jestliže funkce $g(x)$ nabývá na každém $P(a)$ kladných i záporných hodnot, potom

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ neexistuje.}$$

Nevlastní limity III.

Definice: Nechť $f(x)$ je definována na $(0, \infty)$ (resp. $(-\infty, 0)$). Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě ∞ (resp. $-\infty$) limitu L_1 (resp. L_2) a píšeme

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L_1 \quad (\text{resp. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = L_2)$$

jestliže

$$\forall\, \mathcal{O}_\varepsilon(L_1)\ \exists\, x_1 > 0 \ \text{ takové, že } \forall\, x > x_1 \text{ platí } f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L_1)$$

(resp.

$$\forall\, \mathcal{O}_\varepsilon(L_2)\ \exists\, x_2 < 0 \ \text{ takové, že } \forall\, x < x_2 \text{ platí } f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L_2))$$

Nevlastní limity III.

Definice: Nechť $f(x)$ je definována na $(0, \infty)$ (resp. $(-\infty, 0)$). Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě ∞ (resp. $-\infty$) limitu L_1 (resp. L_2) a píšeme

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L_1 \text{ (resp. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = L_2)$$

jestliže

$$\forall\, \mathcal{O}_\varepsilon(L_1)\ \exists\, x_1 > 0 \text{ takové, že } \forall\, x > x_1 \text{ platí } f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L_1)$$

(resp.

$$\forall\, \mathcal{O}_\varepsilon(L_2)\ \exists\, x_2 < 0 \text{ takové, že } \forall\, x < x_2 \text{ platí } f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L_2))$$

Nevlastní limity III. (2)

Věta (o policajtech):
Nechť platí:

- $\forall x \in (a, \infty): \ g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
- $\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} h(x)$

Potom existuje $\lim_{x \to \infty} f(x)$ a rovná se $\lim_{x \to \infty} g(x)$.

Věta: Nechť $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = A$ a $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = B$, kde $A, B \in \mathbb{R}$.
Platí:

(i) $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) \pm \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = A \pm B$

(ii) $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x).g(x)) = \lim_{x \to \pm\infty} f(x). \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = A.B$

(iii) je-li $B \neq 0$, pak
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = (\lim_{x \to \pm\infty} f(x))/(\lim_{x \to \pm\infty} g(x)) = \frac{A}{B}$$

Nevlastní limity III. (2)

Věta (o policajtech):
Nechť platí:

- $\forall x \in (a, \infty): \; g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
- $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} h(x)$

Potom existuje $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ a rovná se $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$.

Věta: Nechť $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = A$ a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = B$, kde $A, B \in \mathbb{R}$.
Platí:

(i) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \pm \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = A \pm B$

(ii) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x).g(x)) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x). \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = A.B$

(iii) je-li $B \neq 0$, pak
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = (\lim_{x\to\pm\infty} f(x))/(\lim_{x\to\pm\infty} g(x)) = \frac{A}{B}$$

Nevlastní limity IV.

Definice: Nechť $f(x)$ je definována na $(0, \infty)$ nebo $(-\infty, 0)$.

(i) Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě ∞ limitu ∞ a píšeme $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ jestliže

$$\forall\, K > 0\ \exists\, x_1 > 0 \text{ takové, že } \forall\, x > x_1 \text{ platí } f(x) > K\,.$$

(ii) Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě ∞ limitu $-\infty$ a píšeme $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ jestliže

$$\forall\, L < 0\ \exists\, x_1 > 0 \text{ takové, že } \forall\, x > x_1 \text{ platí } f(x) < L\,.$$

(iii) Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě $-\infty$ limitu ∞ a píšeme $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ jestliže

$$\forall\, K > 0\ \exists\, x_2 < 0 \text{ takové, že } \forall\, x < x_2 \text{ platí } f(x) > K\,.$$

(iv) Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě $-\infty$ limitu $-\infty$ a píšeme $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ jestliže

$$\forall\, L < 0\ \exists\, x_2 < 0 \text{ takové, že } \forall\, x < x_2 \text{ platí } f(x) < L\,.$$

Nevlastní limity IV.

Definice: Nechť $f(x)$ je definována na $(0, \infty)$ nebo $(-\infty, 0)$.

(i) Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě ∞ limitu ∞ a píšeme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ jestliže

$$\forall\, K > 0\ \exists\, x_1 > 0 \text{ takové, že } \forall\, x > x_1 \text{ platí } f(x) > K\,.$$

(ii) Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě ∞ limitu $-\infty$ a píšeme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ jestliže

$$\forall\, L < 0\ \exists\, x_1 > 0 \text{ takové, že } \forall\, x > x_1 \text{ platí } f(x) < L\,.$$

(iii) Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě $-\infty$ limitu ∞ a píšeme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ jestliže

$$\forall\, K > 0\ \exists\, x_2 < 0 \text{ takové, že } \forall\, x < x_2 \text{ platí } f(x) > K\,.$$

(iv) Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě $-\infty$ limitu $-\infty$ a píšeme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ jestliže

$$\forall\, L < 0\ \exists\, x_2 < 0 \text{ takové, že } \forall\, x < x_2 \text{ platí } f(x) < L\,.$$

Nevlastní limity IV.

Definice: Nechť $f(x)$ je definována na $(0, \infty)$ nebo $(-\infty, 0)$.

(i) Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě ∞ limitu ∞ a píšeme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ jestliže

$$\forall\, K > 0\ \exists\, x_1 > 0 \text{ takové, že } \forall\, x > x_1 \text{ platí } f(x) > K\,.$$

(ii) Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě ∞ limitu $-\infty$ a píšeme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ jestliže

$$\forall\, L < 0\ \exists\, x_1 > 0 \text{ takové, že } \forall\, x > x_1 \text{ platí } f(x) < L\,.$$

(iii) Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě $-\infty$ limitu ∞ a píšeme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ jestliže

$$\forall\, K > 0\ \exists\, x_2 < 0 \text{ takové, že } \forall\, x < x_2 \text{ platí } f(x) > K\,.$$

(iv) Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě $-\infty$ limitu $-\infty$ a píšeme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ jestliže

$$\forall\, L < 0\ \exists\, x_2 < 0 \text{ takové, že } \forall\, x < x_2 \text{ platí } f(x) < L\,.$$

Nevlastní limity IV.

Definice: Nechť $f(x)$ je definována na $(0,\infty)$ nebo $(-\infty,0)$.

(i) Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě ∞ limitu ∞ a píšeme $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ jestliže

$$\forall\, K>0\ \exists\, x_1>0 \text{ takové, že } \forall\, x>x_1 \text{ platí } f(x)>K\,.$$

(ii) Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě ∞ limitu $-\infty$ a píšeme $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ jestliže

$$\forall\, L<0\ \exists\, x_1>0 \text{ takové, že } \forall\, x>x_1 \text{ platí } f(x)<L\,.$$

(iii) Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě $-\infty$ limitu ∞ a píšeme $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ jestliže

$$\forall\, K>0\ \exists\, x_2<0 \text{ takové, že } \forall\, x<x_2 \text{ platí } f(x)>K\,.$$

(iv) Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě $-\infty$ limitu $-\infty$ a píšeme $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ jestliže

$$\forall\, L<0\ \exists\, x_2<0 \text{ takové, že } \forall\, x<x_2 \text{ platí } f(x)<L\,.$$

Nevlastní limity IV.

Definice: Nechť $f(x)$ je definována na $(0,\infty)$ nebo $(-\infty,0)$ **.**

(i) Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě ∞ limitu ∞ a píšeme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ jestliže

$$\forall\, K > 0\ \exists\, x_1 > 0 \ \text{ takové, že } \forall\, x > x_1 \text{ platí } f(x) > K\,.$$

(ii) Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě ∞ limitu $-\infty$ a píšeme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ jestliže

$$\forall\, L < 0\ \exists\, x_1 > 0 \ \text{ takové, že } \forall\, x > x_1 \text{ platí } f(x) < L\,.$$

(iii) Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě $-\infty$ limitu ∞ a píšeme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ jestliže

$$\forall\, K > 0\ \exists\, x_2 < 0 \ \text{ takové, že } \forall\, x < x_2 \text{ platí } f(x) > K\,.$$

(iv) Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě $-\infty$ limitu $-\infty$ a píšeme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ jestliže

$$\forall\, L < 0\ \exists\, x_2 < 0 \ \text{ takové, že } \forall\, x < x_2 \text{ platí } f(x) < L\,.$$

Věta:

(i) Nechť $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \infty$, potom

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) + g(x) = \infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x)\cdot g(x) = \infty\,.$$

(ii) Nechť $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$ a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = -\infty$, potom

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x)\cdot g(x) = \infty\,.$$

(iii) Nechť $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = -\infty$, potom

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = -\infty$$

(iv) Nechť $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = A \in \mathbb{R},\ A > 0$ a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$,

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \pm\infty\,.$$

(v) Nechť $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$, potom

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

Nevlastní limity IV. (2)

Věta: Nechť funkce f je omezená na nějakém (x_0, ∞), resp. $(-\infty, x_0)$ pak platí

(i) Je-li $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$, pak $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

(ii) Je-li $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ pak, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)g(x) = 0$.

Věta: Nechť $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = A > 0$ a $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$, pak

(i) Je-li $g(x) > 0$ na (a, ∞) nebo $(-\infty, a)$, platí

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

(ii) Je-li $g(x) < 0$ na (a, ∞) nebo $(-\infty, a)$, platí

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Nevlastní limity IV. (2)

Věta: Nechť funkce f je omezená na nějakém (x_0, ∞), resp. $(-\infty, x_0)$ pak platí

(i) Je-li $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$, pak $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$

(ii) Je-li $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ pak, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)g(x) = 0\,.$

Věta: Nechť $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = A > 0$ a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$, pak

(i) Je-li $g(x) > 0$ na (a, ∞) nebo $(-\infty, a)$, platí

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty\,.$$

(ii) Je-li $g(x) < 0$ na (a, ∞) nebo $(-\infty, a)$, platí

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty\,.$$

Limita posloupností

Definice: $\forall\, n \in \mathbb{N}$ definujeme číslo $a_n \in \mathbb{R}$. Potom říkáme, že čísla

$$a_1,\, a_2,\, a_3, \dots$$

tvoří posloupnost reálných čísel. Číslo a_n nazýváme $n-$tý člen posloupnosti, n je index čísla a_n. Posloupnost zkráceně zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Předpis, jak z indexu n dostaneme a_n se nazývá vzorec pro $n-$tý člen:

$$a_n = f(n), \quad f:\, \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Aritmetická posloupnost:

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

kde $d \in \mathbb{R}$ je diference.

Geometrická posloupnost:

$$a_n = q^n,$$

kde $q \in \mathbb{R}$ je kvocient.

Limita posloupností

Definice: $\forall\ n \in \mathbb{N}$ definujeme číslo $a_n \in \mathbb{R}$. Potom říkáme, že čísla

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \dots$$

tvoří posloupnost reálných čísel. Číslo a_n nazýváme $n-$tý člen posloupnosti, n je index čísla a_n. Posloupnost zkráceně zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Předpis, jak z indexu n dostaneme a_n se nazývá vzorec pro $n-$tý člen:

$$a_n = f(n), \quad f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Aritmetická posloupnost:

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

kde $d \in \mathbb{R}$ je diference.

Geometrická posloupnost:

$$a_n = q^n,$$

kde $q \in \mathbb{R}$ je kvocient.

Limita posloupností

Definice: $\forall\, n \in \mathbb{N}$ definujeme číslo $a_n \in \mathbb{R}$. Potom říkáme, že čísla

$$a_1,\, a_2,\, a_3, \ldots$$

tvoří posloupnost reálných čísel. Číslo a_n nazýváme $n-$tý člen posloupnosti, n je index čísla a_n. Posloupnost zkráceně zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Předpis, jak z indexu n dostaneme a_n se nazývá vzorec pro $n-$tý člen:

$$a_n = f(n), \quad f:\, \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Aritmetická posloupnost:

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

kde $d \in \mathbb{R}$ je diference.
Geometrická posloupnost:

$$a_n = q^n,$$

kde $q \in \mathbb{R}$ je kvocient.

Limita posloupností (2)

Definice: Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu A, píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, jestliže

$$\forall\, \mathcal{O}_\varepsilon(A)\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ takové, že } \forall\, n > n_0 \text{ platí } a_n \in \mathcal{O}_\varepsilon(A)\,.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ jestliže

$$\forall\, K > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ takové, že } \forall\, n \geq n_0 \text{ platí } a_n > K\,,$$

$$\forall\, L < 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ takové, že } \forall\, n \geq n_0 \text{ platí } a_n < L\,.$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme konvergentní, jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ (vlastní limita).
Jestliže posloupnost nemá vlastní limitu nebo limita neexistuje, říkáme, že posloupnost je divergentní.

Limita posloupností (2)

Definice: Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu A, píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, jestliže

$$\forall\, \mathcal{O}_\varepsilon(A)\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ takové, že } \forall\, n > n_0 \text{ platí } a_n \in \mathcal{O}_\varepsilon(A)\,.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ jestliže

$$\forall\, K > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ takové, že } \forall\, n \geq n_0 \text{ platí } a_n > K\,,$$

$$\forall\, L < 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ takové, že } \forall\, n \geq n_0 \text{ platí } a_n < L\,.$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme konvergentní, jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ (vlastní limita).
Jestliže posloupnost nemá vlastní limitu nebo limita neexistuje, říkáme, že posloupnost je divergentní.

Limita posloupností (2)

Definice: Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu A, píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, jestliže

$$\forall\, \mathcal{O}_\varepsilon(A)\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ takové, že } \forall\, n > n_0 \text{ platí } a_n \in \mathcal{O}_\varepsilon(A)\,.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ jestliže

$$\forall\, K > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ takové, že } \forall\, n \geq n_0 \text{ platí } a_n > K\,,$$

$$\forall\, L < 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ takové, že } \forall\, n \geq n_0 \text{ platí } a_n < L\,.$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme konvergentní, jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ (vlastní limita).
Jestliže posloupnost nemá vlastní limitu nebo limita neexistuje, říkáme, že posloupnost je divergentní.

Limita posloupností (3)

Definice: Mějme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

(i) Jestliže $\forall\, n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n < a_{n+1} \quad (\text{resp. } a_n \leq a_{n+1})$$

říkáme, že posloupnost je rostoucí (resp. neklesající).

(ii) Jestliže $\forall\, n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n > a_{n+1} \quad (\text{resp. } a_n \geq a_{n+1})$$

říkáme, že posloupnost je klesající (resp. nerostoucí).

Věta:

- Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající a shora omezená, potom má vlastní limitu.
- Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí a zdola omezená, potom má vlastní limitu.

Limita posloupností (3)

Definice: Mějme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

(i) Jestliže $\forall\, n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n < a_{n+1} \quad (\text{resp. } a_n \leq a_{n+1})$$

říkáme, že posloupnost je rostoucí (resp. neklesající).

(ii) Jestliže $\forall\, n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n > a_{n+1} \quad (\text{resp. } a_n \geq a_{n+1})$$

říkáme, že posloupnost je klesající (resp. nerostoucí).

Věta:

- Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající a shora omezená, potom má vlastní limitu.
- Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí a zdola omezená, potom má vlastní limitu.

Eulerovo číslo

Dá se dokázat, že existuje vlastní limita

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Definice: Označme

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Číslo e nazýváme Eulerovo číslo.