

Spojitosť a limita funkce

Okolí bodu

Značení: $\forall a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0$ označujeme

- $\mathcal{O}_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ε -ové okolí bodu a
 $\mathcal{O}_\varepsilon^+(a) = \langle a, a + \varepsilon \rangle$ pravé okolí, $\mathcal{O}_\varepsilon^-(a) = (a - \varepsilon, a \rangle$ levé okolí
- $\mathcal{P}_\varepsilon(a) = \mathcal{O}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ ε -ové prstencové okolí bodu a
 $\mathcal{P}_\varepsilon^+(a) = \langle a, a + \varepsilon \rangle$ pravé okolí, $\mathcal{P}_\varepsilon^-(a) = (a - \varepsilon, a \rangle$ levé okolí
- $x \rightarrow a$ x se "blíží" k a
 x nabývá hodnot libovolně blízkých k a
 $x \rightarrow a+, x \rightarrow a-, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$

Spojitosť funkce (1)

Definice: Necht' funkce f je definovaná v jistém okolí bodu a . Říkáme, že f je spojité v bodě $a \in D(f)$, jestliže

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(f(a)) \exists \mathcal{O}_\delta(a) : f(\mathcal{O}_\delta(a)) \subseteq \mathcal{O}_\varepsilon(f(a))$$

ekvivalentně:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Definice: Říkáme, že funkce f je spojité na otevřeném intervalu (a, b) , je-li spojité v každém bodě tohoto intervalu.

Spojitosť funkce (2)

Definice: Říkáme, že funkce f je spojité zprava/zleva v bodě $a \in D(f)$, jestliže

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(f(a)) \exists \mathcal{O}_\delta^+(a) : f(\mathcal{O}_\delta^+(a)) \subseteq \mathcal{O}_\varepsilon(f(a))$$

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(f(a)) \exists \mathcal{O}_\delta^-(a) : f(\mathcal{O}_\delta^-(a)) \subseteq \mathcal{O}_\varepsilon(f(a))$$

Definice: Říkáme, že funkce f je spojité na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, je-li

- spojitá v každém bodě intervalu (a, b) ,
- spojitá zprava v bodě a ,
- spojitá zleva v bodě b .

Spojitosť funkce (3)

Věta: Jsou-li funkce f a g spojité v bodě a , pak jsou v tomto bodě spojité i funkce $|f|$, $f \pm g$, $f \cdot g$, a je-li $g(a) \neq 0$ pak i $\frac{f}{g}$.

Věta: Je-li

- funkce $y = f(x)$ spojitá v bodě $x = a$,
- funkce $z = g(y)$ spojitá v bodě $y = f(a)$,

pak složená funkce $h(x) = g(f(x))$ je spojitá v bodě $x = a$.

Limita funkce

Definice: Necht' funkce $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ je definována v nějakém $\mathcal{P}(a) \subseteq D(f)$. Říkáme, že funkce f má v bodě a limitu $A \in \mathbb{R}$, značíme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, jestliže

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(A) \exists \mathcal{P}_\delta(a) : f(\mathcal{P}_\delta(a)) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A)$$

ekvivalentně

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Věta: Funkce f má v bodě a nejvýše jednu limitu.

Výpočet limit (1)

Věta: Funkce f je spojitá v bodě $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Věta: Necht' $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D(g) \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\exists \mathcal{P}(a) : (\forall x \in \mathcal{P}(a) : f(x) = g(x)) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Věta (o policajtech):

Nechť platí:

- $\forall x \in \mathcal{P}(a) : g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$

Potom existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ a rovná se $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Výpočet limit (2)

Věta: Necht' $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, kde $A, B \in \mathbb{R}$. Platí:

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$
- (iii) je-li $B \neq 0$, pak $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}$

Věta (o limitě složené funkce): Necht' $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ a necht' funkce f je spojitá v bodě A . Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(A).$$

Poznámka:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)}$$

Jednostranné limity

Definice: Necht' funkce $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ je definována v nějakém $\mathcal{P}^+(a) \subseteq D(f)$. Říkáme, že *limita funkce f v bodě a zprava je rovna $A \in \mathbb{R}$* , značíme $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$, jestliže

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(A) \exists \mathcal{P}_\delta^+(a) : f(\mathcal{P}_\delta^+(a)) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A)$$

Definice: Necht' funkce $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ je definována v nějakém $\mathcal{P}^-(a) \subseteq D(f)$. Říkáme, že *limita funkce f v bodě a zleva je rovna $A \in \mathbb{R}$* , značíme $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$, jestliže

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(A) \exists \mathcal{P}_\delta^-(a) : f(\mathcal{P}_\delta^-(a)) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A)$$

Věta: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existuje $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

Pak

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Věty u oboustranných limit platí i pro jednostranné limity:

- (i) f má v bodě a nejvýše jednu limitu zprava/zleva
- (ii) f je spojitá v bodě a zprava/zleva $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = f(a)$
- (iii) $f(x) = g(x)$ pro $x \in \mathcal{P}^\pm(a) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^\pm} g(x)$
- (iv) Věta o policajtech: $\forall x \in \mathcal{P}^\pm(a) : g(x) \leq f(x) \leq h(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^\pm} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^\pm} h(x)$
- (v) $\lim_{x \rightarrow a^\pm} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a^\pm} g(x)$
- (vi) $\lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) \right) / \left(\lim_{x \rightarrow a^\pm} g(x) \right)$, pokud $\lim_{x \rightarrow a^\pm} g(x) \neq 0$
- (vii) $\lim_{x \rightarrow a^\pm} g(x) = A$
 f spojitá v bodě A zprava/zleva $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^\pm} f(g(x)) = f(A)$

Nevlastní limity

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

- I. Je-li $a, L \in \mathbb{R}$ říkáme vlastní limita ve vlastním bodě
- II. Je-li $a \in \mathbb{R}, L = \pm\infty$ říkáme nevlastní limita ve vlastním bodě
- III. Je-li $a = \pm\infty, L \in \mathbb{R}$ říkáme vlastní limita v nevlastním bodě
- IV. Je-li $a = \pm\infty, L = \pm\infty$ říkáme nevlastní limita v nevlastním bodě

Případ I. jsme objasnili v předchozích odstavcích. Nyní probereme případy II., III. a IV.

Nevlastní limity II.

Definice: Nechť $f(x)$ je definována v $\mathcal{P}(a)$ potom

(i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ jestliže

$$\forall K > 0 \exists \mathcal{P}_\delta(a) \text{ takové, že } \forall x \in \mathcal{P}_\delta(a) \text{ je } f(x) > K$$

(ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ jestliže

$$\forall L < 0 \exists \mathcal{P}_\delta(a) \text{ takové, že } \forall x \in \mathcal{P}_\delta(a) \text{ je } f(x) < L$$

Poznámka: Použijeme-li $\mathcal{P}_\delta^+(a)$ nebo $\mathcal{P}_\delta^-(a)$ dostáváme jednostranné nevlastní limity ve vlastním bodě:

(i) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$

(ii) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

Věta:

(i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$

(ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

Věta:

(i) Nechť $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, potom

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \infty.$$

(ii) Nechť $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, potom

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \infty.$$

(iii) Necht' $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, potom

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$$

(iv) Necht' $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $A > 0$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$, potom

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \pm\infty.$$

(v) Necht' $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$, potom

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Věta: Necht' funkce f je omezená na nějakém $P(a)$, pak platí

(i) Je-li $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$, pak $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

(ii) Je-li $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ pak, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

Věta: Necht' $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > 0$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, pak

(i) Je-li $g(x) > 0$ na $\mathcal{P}(a)$, platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

(ii) Je-li $g(x) < 0$ na $\mathcal{P}(a)$, platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

(iii) Jestliže funkce $g(x)$ nabývá na každém $P(a)$ kladných i záporných hodnot, potom

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ neexistuje.}$$

Nevlastní limity III.

Definice: Necht' $f(x)$ je definována na $(0, \infty)$ (resp. $(-\infty, 0)$). Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě ∞ (resp. $-\infty$) limitu L_1 (resp. L_2) a píšeme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L_1 \quad (\text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L_2)$$

jestliže

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(L_1) \exists x_1 > 0 \text{ takové, že } \forall x > x_1 \text{ platí } f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L_1)$$

(resp.

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(L_2) \exists x_2 < 0 \text{ takové, že } \forall x < x_2 \text{ platí } f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L_2))$$

Nevlastní limity III. (2)

Věta (o policajtech):

Necht' platí:

- $\forall x \in (a, \infty) : g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$

Potom existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ a rovná se $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$.

Věta: Necht' $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = A$ a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = B$, kde $A, B \in \mathbb{R}$. Platí:

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = A \pm B$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = A \cdot B$
- je-li $B \neq 0$, pak $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \right) / \left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) \right) = \frac{A}{B}$

Nevlastní limity IV.

Definice: Necht' $f(x)$ je definována na $(0, \infty)$ nebo $(-\infty, 0)$.

(i) Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě ∞ limitu ∞ a píšeme $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ jestliže

$$\forall K > 0 \exists x_1 > 0 \text{ takové, že } \forall x > x_1 \text{ platí } f(x) > K.$$

(ii) Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě ∞ limitu $-\infty$ a píšeme $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ jestliže

$$\forall L < 0 \exists x_1 > 0 \text{ takové, že } \forall x > x_1 \text{ platí } f(x) < L.$$

(iii) Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě $-\infty$ limitu ∞ a píšeme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ jestliže

$$\forall K > 0 \exists x_2 < 0 \text{ takové, že } \forall x < x_2 \text{ platí } f(x) > K.$$

(iv) Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě $-\infty$ limitu $-\infty$ a píšeme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ jestliže

$$\forall L < 0 \exists x_2 < 0 \text{ takové, že } \forall x < x_2 \text{ platí } f(x) < L.$$

Věta:

(i) Necht' $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \infty$, potom

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) + g(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \cdot g(x) = \infty.$$

(ii) Necht' $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$ a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = -\infty$, potom

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) + g(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \cdot g(x) = \infty.$$

(iii) Necht' $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = -\infty$, potom

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$$

(iv) Necht' $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $A > 0$ a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \pm\infty.$$

(v) Necht' $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$, potom

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Nevlastní limity IV. (2)

Věta: Necht' funkce f je omezená na nějakém (x_0, ∞) , resp. $(-\infty, x_0)$ pak platí

(i) Je-li $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$, pak $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

(ii) Je-li $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$ pak, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)g(x) = 0$.

Věta: Necht' $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = A > 0$ a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$, pak

(i) Je-li $g(x) > 0$ na (a, ∞) nebo $(-\infty, a)$, platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

(ii) Je-li $g(x) < 0$ na (a, ∞) nebo $(-\infty, a)$, platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Limita posloupností

Definice: $\forall n \in \mathbb{N}$ definujeme číslo $a_n \in \mathbb{R}$. Potom říkáme, že čísla

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

tvoří *posloupnost* reálných čísel. Číslo a_n nazýváme n -tý člen posloupnosti, n je index čísla a_n . Posloupnost zkráceně zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Předpis, jak z indexu n dostaneme a_n se nazývá vzorec pro n -tý člen:

$$a_n = f(n), \quad f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Aritmetická posloupnost:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d,$$

kde $d \in \mathbb{R}$ je diference. **Geometrická posloupnost:**

$$a_n = q^n,$$

kde $q \in \mathbb{R}$ je kvocient.

Limita posloupností (2)

Definice: Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu A , píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, jestliže

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(A) \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ takové, že } \forall n > n_0 \text{ platí } a_n \in \mathcal{O}_\varepsilon(A).$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ jestliže

$$\forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ takové, že } \forall n \geq n_0 \text{ platí } a_n > K,$$

$$\forall L < 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ takové, že } \forall n \geq n_0 \text{ platí } a_n < L.$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme *konvergentní*, jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ (vlastní limita). Jestliže posloupnost nemá vlastní limitu nebo limita neexistuje, říkáme, že posloupnost je *divergentní*.

Limita posloupností (3)

Definice: Mějme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

(i) Jestliže $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n < a_{n+1} \quad (\text{resp. } a_n \leq a_{n+1})$$

říkáme, že posloupnost je *rostoucí* (resp. *neklesající*).

(ii) Jestliže $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n > a_{n+1} \quad (\text{resp. } a_n \geq a_{n+1})$$

říkáme, že posloupnost je *klesající* (resp. *nerostoucí*).

Věta:

- Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající a shora omezená, potom má vlastní limitu.
- Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí a zdola omezená, potom má vlastní limitu.

Eulerovo číslo

Dá se dokázat, že existuje vlastní limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Definice: Označme

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Číslo e nazýváme *Eulerovo číslo*.