Derivace funkce

Derivace funkce v bodě

Definice: Jestliže existuje

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

potom se tato limita nazývá derivací funkce f v bodě x_0 a označuje se $f'(x_0)$.
Platí tedy

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Je-li limita vlastní/nevlastní, mluvíme o vlastní/nevlastní derivaci funkce f v bodě x_0.
Poznámka: Zvolíme-li substituci $x - x_0 = h$ dostaneme ekvivalentní vzorec pro derivaci v bodě

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Derivace funkce v bodě

Definice: Jestliže existuje

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

potom se tato limita nazývá derivací funkce f v bodě x_0 a označuje se $f'(x_0)$.
Platí tedy

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Je-li limita vlastní/nevlastní, mluvíme o vlastní/nevlastní derivaci funkce f v bodě x_0.
Poznámka: Zvolíme-li substituci $x - x_0 = h$ dostaneme ekvivalentní vzorec pro derivaci v bodě

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Derivace funkce v bodě

Definice: Jestliže existuje

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

potom se tato limita nazývá derivací funkce f v bodě x_0 a označuje se $f'(x_0)$.
Platí tedy

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Je-li limita vlastní/nevlastní, mluvíme o vlastní/nevlastní derivaci funkce f v bodě x_0.

Poznámka: Zvolíme-li substituci $x - x_0 = h$ dostaneme ekvivalentní vzorec pro derivaci v bodě

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Derivace funkce v bodě

Definice: Jestliže existuje

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

potom se tato limita nazývá derivací funkce f v bodě x_0 a označuje se $f'(x_0)$.
Platí tedy

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Je-li limita vlastní/nevlastní, mluvíme o vlastní/nevlastní derivaci funkce f v bodě x_0.
Poznámka: Zvolíme-li substituci $x - x_0 = h$ dostaneme ekvivalentní vzorec pro derivaci v bodě

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Význam derivace

- **Geometrický význam:**

  $f'(x_0)$ je směrnicí tečny ke grafu funkce f v bodě x_0

  $\rightsquigarrow$ rovnice tečny: $\quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

- **ve fyzice, v chemii:** $\rightsquigarrow$ okamžitá rychlost (reakce)

$$\frac{f(t_0 + \triangle t) - f(t_0)}{\triangle t} \quad \underset{\triangle t \to 0}{\longrightarrow} \quad f'(t_0)$$

průměrná rychlost změny funkčních hodnot

okamžitá rychlost změny funkčních hodnot v čase t_0

Význam derivace

- **Geometrický význam:**

  $f'(x_0)$ je směrnicí tečny ke grafu funkce f v bodě x_0

  $\rightsquigarrow$ rovnice tečny: $\quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

- **ve fyzice, v chemii:** $\rightsquigarrow$ okamžitá rychlost (reakce)

$$\frac{f(t_0 + \triangle\, t) - f(t_0)}{\triangle\, t} \quad \xrightarrow[\triangle t \to 0]{} \quad f'(t_0)$$

průměrná rychlost změny funkčních hodnot

okamžitá rychlost změny funkčních hodnot v čase t_0

Jednostranné derivace v bodě

Definice:

- Derivace funkce f v bodě x_0 zprava

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ pokud limita existuje}$$

- Derivace funkce f v bodě x_0 zleva

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ pokud limita existuje}$$

Věta: Funkce f má v bodě x_0 derivaci $\Leftrightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.
Potom platí:

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

Jednostranné derivace v bodě

Definice:

- Derivace funkce f v bodě x_0 zprava

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ pokud limita existuje}$$

- Derivace funkce f v bodě x_0 zleva

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ pokud limita existuje}$$

Věta: Funkce f má v bodě x_0 derivaci $\Leftrightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.
Potom platí:

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

Derivace funkce na intervalu

Definice:

- Funkce f má derivaci na intervalu (a, b) $\Leftrightarrow$ f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b).
- Funkce f má derivaci na intervalu $\langle a, b\rangle$ $\Leftrightarrow$ f má derivaci na intervalu (a, b) a má jednostranné derivace $f'_+(a)$, $f'_-(b)$.

Věta: Má-li funkce f vlastní derivaci na intervalu (a, b), pak je f na (a, b) spojitá.

! opačná implikace neplatí !

Derivace funkce na intervalu

Definice:

- Funkce f má derivaci na intervalu (a, b) $\Leftrightarrow$ f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b).
- Funkce f má derivaci na intervalu $\langle a, b\rangle$ $\Leftrightarrow$ f má derivaci na intervalu (a, b) a má jednostranné derivace $f'_+(a)$, $f'_-(b)$.

Věta: Má-li funkce f vlastní derivaci na intervalu (a, b), pak je f na (a, b) spojitá.

! opačná implikace neplatí !

Derivace elementárních funkcí

$$(k)' = 0 \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1} \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a) \qquad 1 \neq a > 0$$

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)} \qquad 1 \neq a > 0$$

$$(\sin(x))' = \cos(x) \qquad (\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$(\mathrm{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad (\mathrm{cotg}(x))' = \frac{-1}{\sin^2(x)}$$

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\mathrm{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\mathrm{arccotg}(x))' = \frac{-1}{1+x^2}$$

Pravidla pro výpočet derivací

Věta:

(i) $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$, $k \in \mathbb{R}$

(ii) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

(iii) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

(iv) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$, je-li $g(x) \neq 0$

(v) $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Definice (derivace vyšších řádů): Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. n-tou derivací funkce f, kterou označujeme $f^{(n)}$, definujeme vztahem

$$f^{(n)} = \left[f^{(n-1)}\right]', \text{ kde } f^{(0)} = f$$

Pravidla pro výpočet derivací

Věta:

(i) $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$, $k \in \mathbb{R}$

(ii) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

(iii) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

(iv) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$, je-li $g(x) \neq 0$

(v) $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Definice (derivace vyšších řádů): Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. n-tou derivací funkce f, kterou označujeme $f^{(n)}$, definujeme vztahem

$$f^{(n)} = \left[f^{(n-1)}\right]', \text{ kde } f^{(0)} = f$$

Pravidla pro výpočet derivací

Věta:

(i) $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$, $k \in \mathbb{R}$

(ii) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

(iii) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

(iv) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$, je-li $g(x) \neq 0$

(v) $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Definice (derivace vyšších řádů): Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. n-tou derivací funkce f, kterou označujeme $f^{(n)}$, definujeme vztahem

$$f^{(n)} = \left[f^{(n-1)}\right]', \text{ kde } f^{(0)} = f$$

Pravidla pro výpočet derivací

Věta:

(i) $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$, $k \in \mathbb{R}$

(ii) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

(iii) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

(iv) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$, je-li $g(x) \neq 0$

(v) $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Definice (derivace vyšších řádů): Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. n-tou derivací funkce f, kterou označujeme $f^{(n)}$, definujeme vztahem

$$f^{(n)} = \left[f^{(n-1)}\right]', \text{ kde } f^{(0)} = f$$

Pravidla pro výpočet derivací

Věta:

(i) $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$, $k \in \mathbb{R}$

(ii) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

(iii) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

(iv) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$, je-li $g(x) \neq 0$

(v) $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Definice (derivace vyšších řádů): Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. n-tou derivací funkce f, kterou označujeme $f^{(n)}$, definujeme vztahem

$$f^{(n)} = \left[f^{(n-1)}\right]', \text{ kde } f^{(0)} = f$$

Pravidla pro výpočet derivací

Věta:

(i) $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$, $k \in \mathbb{R}$

(ii) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

(iii) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

(iv) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$, je-li $g(x) \neq 0$

(v) $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Definice (derivace vyšších řádů): Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. n-tou derivací funkce f, kterou označujeme $f^{(n)}$, definujeme vztahem

$$f^{(n)} = \left[f^{(n-1)}\right]', \text{ kde } f^{(0)} = f$$

Pravidla pro výpočet derivací

Věta:

(i) $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$, $k \in \mathbb{R}$

(ii) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

(iii) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

(iv) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$, je-li $g(x) \neq 0$

(v) $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Definice (derivace vyšších řádů): Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. n-tou derivací funkce f, kterou označujeme $f^{(n)}$, definujeme vztahem

$$f^{(n)} = \left[f^{(n-1)}\right]', \text{ kde } f^{(0)} = f$$

Věta o střední hodnotě

Věta (Lagrangeova věta o střední hodnotě): Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má derivaci na otevřeném intervalu (a, b). Potom

$$\exists\, c \in (a, b): \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Věta: Má-li spojitá funkce f na intervalu (a, b) kladnou derivaci ($\forall x \in (a, b): f'(x) > 0$), pak funkce f je v intervalu (a, b) rostoucí.

Věta (Cauchyova věta o střední hodnotě): Nechť funkce f a g jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$ a mají derivace na otevřeném intervalu (a, b). Nechť $g'(x) \neq 0$ na (a, b). Potom

$$\exists\, c \in (a, b): \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Věta o střední hodnotě

Věta (Lagrangeova věta o střední hodnotě): Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má derivaci na otevřeném intervalu (a, b). Potom

$$\exists\, c \in (a, b): \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Věta: Má-li spojitá funkce f na intervalu (a, b) kladnou derivaci $(\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0)$, pak funkce f je v intervalu (a, b) rostoucí.

Věta (Cauchyova věta o střední hodnotě): Nechť funkce f a g jsou spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$ a mají derivace na otevřeném intervalu (a, b). Nechť $g'(x) \neq 0$ na (a, b). Potom

$$\exists\, c \in (a, b): \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Věta o střední hodnotě

Věta (Lagrangeova věta o střední hodnotě): Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má derivaci na otevřeném intervalu (a, b). Potom

$$\exists\, c \in (a, b) : \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Věta: Má-li spojitá funkce f na intervalu (a, b) kladnou derivaci ($\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0$), pak funkce f je v intervalu (a, b) rostoucí.

Věta (Cauchyova věta o střední hodnotě): Nechť funkce f a g jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$ a mají derivace na otevřeném intervalu (a, b). Nechť $g'(x) \neq 0$ na (a, b). Potom

$$\exists\, c \in (a, b) : \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

l'Hospitalovo pravidlo

Věta:

(i) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ a nechť $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existuje,

nebo

(ii) nechť $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ a nechť $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existuje.

Potom

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámka: Věta platí i pro limity $\lim_{x\to a+}$, $\lim_{x\to a-}$, $\lim_{x\to +\infty}$, $\lim_{x\to -\infty}$.