

Derivace funkce

Derivace funkce v bodě

Definice: Jestliže existuje

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

potom se tato limita nazývá *derivací funkce f v bodě x_0* a označuje se $f'(x_0)$. Platí tedy

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Je-li limita vlastní/nevlastní, mluvíme o *vlastní/nevlastní derivaci funkce f v bodě x_0* .

Poznámka: Zvolíme-li substituci $x - x_0 = h$ dostaneme ekvivalentní vzorec pro derivaci v bodě

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Význam derivace

- **Geometrický význam:**

$f'(x_0)$ je směrnici tečny ke grafu funkce f v bodě x_0

\rightsquigarrow rovnice tečny: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

- **ve fyzice, v chemii:** \rightsquigarrow okamžitá rychlost (reakce)

$$\frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} f'(t_0)$$

průměrná rychlost změny
funkčních hodnot

okamžitá rychlost změny
funkčních hodnot v čase t_0

Jednostranné derivace v bodě

Definice:

- Derivace funkce f v bodě x_0 zprava

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ pokud limita existuje}$$

- Derivace funkce f v bodě x_0 zleva

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ pokud limita existuje}$$

Věta: Funkce f má v bodě x_0 derivaci $\Leftrightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Potom platí:

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

Derivace funkce na intervalu

Definice:

- Funkce f má derivaci na intervalu $(a, b) \Leftrightarrow f$ má derivaci v každém bodě intervalu (a, b) .
- Funkce f má derivaci na intervalu $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow f$ má derivaci na intervalu (a, b) a má jednostranné derivace $f'_+(a), f'_-(b)$.

Věta: Má-li funkce f vlastní derivaci na intervalu (a, b) , pak je f na (a, b) spojitá.

! opačná implikace neplatí !

Derivace elementárních funkcí

$$(k)' = 0 \quad k \in \mathbb{R}$$

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a) \quad 1 \neq a > 0$$

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)} \quad 1 \neq a > 0$$

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$(\operatorname{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$(\operatorname{cotg}(x))' = \frac{-1}{\sin^2(x)}$$

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccotg}(x))' = \frac{-1}{1+x^2}$$

Pravidla pro výpočet derivací

Věta:

$$(i) [k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x), k \in \mathbb{R}$$

$$(ii) [f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(iii) [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$(iv) \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, \text{ je-li } g(x) \neq 0$$

$$(v) [f(g(x))]'' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Definice (derivace vyšších řádů): Necht' $n \in \mathbb{N}_0$. n -tou derivací funkce f , kterou označujeme $f^{(n)}$, definujeme vztahem

$$f^{(n)} = [f^{(n-1)}]', \text{ kde } f^{(0)} = f$$

Věta o střední hodnotě

Věta (Lagrangeova věta o střední hodnotě): Necht' funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má derivaci na otevřeném intervalu (a, b) . Potom

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Věta: Má-li spojitá funkce f na intervalu (a, b) kladnou derivaci ($\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0$), pak funkce f je v intervalu (a, b) rostoucí.

Věta (Cauchyova věta o střední hodnotě): Necht' funkce f a g jsou spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$ a mají derivace na otevřeném intervalu (a, b) . Necht' $g'(x) \neq 0$ na (a, b) . Potom

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

l'Hospitalovo pravidlo

Věta:

(i) Necht' $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a necht' $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existuje,

nebo

(ii) necht' $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$ a necht' $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existuje.

Potom

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámka: Věta platí i pro limity $\lim_{x \rightarrow a^+}$, $\lim_{x \rightarrow a^-}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty}$.