Kapitola 4: Průběh funkce

Funkce monotonní

Věta:

Nechť je f spojitá a má derivaci na intervalu I. Potom platí

(i) Je-li $f'(x) > 0$ na I, je funkce f rostoucí na I.

(ii) Je-li $f'(x) \geq 0$ na I, je funkce f neklesající na I.

(iii) Je-li $f'(x) < 0$ na I, je funkce f klesající na I.

(iv) Je-li $f'(x) \leq 0$ na I, je funkce f nerostoucí na I.

(v) Je-li $f'(x) = 0$ na I, je funkce f konstantní na I.

Věta:

Nechť je funkce f spojitá na I a nechť má kromě v konečném počtu bodů $x_1, x_2, \ldots x_k$ v intervalu I derivaci $f'(x) > 0$. Potom je f rostoucí na intervalu I.

Funkce monotonní

Věta:

Nechť je f spojitá a má derivaci na intervalu I. Potom platí

(i) Je-li $f'(x) > 0$ na I, je funkce f rostoucí na I.

(ii) Je-li $f'(x) \geq 0$ na I, je funkce f neklesající na I.

(iii) Je-li $f'(x) < 0$ na I, je funkce f klesající na I.

(iv) Je-li $f'(x) \leq 0$ na I, je funkce f nerostoucí na I.

(v) Je-li $f'(x) = 0$ na I, je funkce f konstantní na I.

Věta:

Nechť je funkce f spojitá na I a nechť má kromě v konečném počtu bodů $x_1, x_2, \dots x_k$ v intervalu I derivaci $f'(x) > 0$.
Potom je f rostoucí na intervalu I.

Funkce monotonní

Věta:
Nechť je f spojitá a má derivaci na intervalu I. Potom platí

(i) Je-li $f'(x) > 0$ na I, je funkce f rostoucí na I.

(ii) Je-li $f'(x) \geq 0$ na I, je funkce f neklesající na I.

(iii) Je-li $f'(x) < 0$ na I, je funkce f klesající na I.

(iv) Je-li $f'(x) \leq 0$ na I, je funkce f nerostoucí na I.

(v) Je-li $f'(x) = 0$ na I, je funkce f konstantní na I.

Věta:
Nechť je funkce f spojitá na I a nechť má kromě v konečném počtu bodů $x_1, x_2, \ldots x_k$ v intervalu I derivaci $f'(x) > 0$.
Potom je f rostoucí na intervalu I.

Funkce monotonní

Věta:

Nechť je f spojitá a má derivaci na intervalu I. Potom platí

(i) Je-li $f'(x) > 0$ na I, je funkce f rostoucí na I.

(ii) Je-li $f'(x) \geq 0$ na I, je funkce f neklesající na I.

(iii) Je-li $f'(x) < 0$ na I, je funkce f klesající na I.

(iv) Je-li $f'(x) \leq 0$ na I, je funkce f nerostoucí na I.

(v) Je-li $f'(x) = 0$ na I, je funkce f konstantní na I.

Věta:

Nechť je funkce f spojitá na I a nechť má kromě v konečném počtu bodů $x_1, x_2, \ldots x_k$ v intervalu I derivaci $f'(x) > 0$. Potom je f rostoucí na intervalu I.

Funkce monotonní

Věta:
Nechť je f spojitá a má derivaci na intervalu I. Potom platí

(i) Je-li $f'(x) > 0$ na I, je funkce f rostoucí na I.
(ii) Je-li $f'(x) \geq 0$ na I, je funkce f neklesající na I.
(iii) Je-li $f'(x) < 0$ na I, je funkce f klesající na I.
(iv) Je-li $f'(x) \leq 0$ na I, je funkce f nerostoucí na I.
(v) Je-li $f'(x) = 0$ na I, je funkce f konstantní na I.

Věta:
Nechť je funkce f spojitá na I a nechť má kromě v konečném počtu bodů $x_1, x_2, \ldots x_k$ v intervalu I derivaci $f'(x) > 0$.
Potom je f rostoucí na intervalu I.

Funkce monotonní

Věta:
Nechť je f spojitá a má derivaci na intervalu I. Potom platí

(i) Je-li $f'(x) > 0$ na I, je funkce f rostoucí na I.
(ii) Je-li $f'(x) \geq 0$ na I, je funkce f neklesající na I.
(iii) Je-li $f'(x) < 0$ na I, je funkce f klesající na I.
(iv) Je-li $f'(x) \leq 0$ na I, je funkce f nerostoucí na I.
(v) Je-li $f'(x) = 0$ na I, je funkce f konstantní na I.

Věta:
Nechť je funkce f spojitá na I a nechť má kromě v konečném počtu bodů $x_1, x_2, \ldots x_k$ v intervalu I derivaci $f'(x) > 0$.
Potom je f rostoucí na intervalu I.

Funkce monotonní

Věta:
Nechť je f spojitá a má derivaci na intervalu I. Potom platí

(i) Je-li $f'(x) > 0$ na I, je funkce f rostoucí na I.

(ii) Je-li $f'(x) \geq 0$ na I, je funkce f neklesající na I.

(iii) Je-li $f'(x) < 0$ na I, je funkce f klesající na I.

(iv) Je-li $f'(x) \leq 0$ na I, je funkce f nerostoucí na I.

(v) Je-li $f'(x) = 0$ na I, je funkce f konstantní na I.

Věta:
Nechť je funkce f spojitá na I a nechť má kromě v konečném počtu bodů $x_1, x_2, \ldots x_k$ v intervalu I derivaci $f'(x) > 0$.
Potom je f rostoucí na intervalu I.

Lokální extrémy funkce

Definice: Nechť je funkce f definovaná na (a, b). Říkáme, že funkce f má v bodě $x_0 \in (a, b)$ lokální maximum (resp. minimum), jestliže $\exists\, \mathcal{P}(x_0)$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{P}(x_0) \text{ platí } f(x) \leq f(x_0) \text{ (resp. } f(x) \geq f(x_0)\text{)}.$$

Jsou-li v definici ostré nerovnosti, mluvíme o ostrém lokálním maximu (resp. minimu).

Věta:
Nechť je funkce f spojitá na (a, b) a $x_0 \in (a, b)$. Potom platí

(i) Jestliže $\exists\, \mathcal{P}(x_0)$ takové, že

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathcal{P}^-(x_0) \quad &\text{je} \quad f'(x) > 0 \text{ a} \\ \forall\, x \in \mathcal{P}^+(x_0) \quad &\text{je} \quad f'(x) < 0 \end{aligned}$$

má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Lokální extrémy funkce

Definice: Nechť je funkce f definovaná na (a, b). Říkáme, že funkce f má v bodě $x_0 \in (a, b)$ lokální maximum (resp. minimum), jestliže $\exists \mathcal{P}(x_0)$ takové, že

$$\forall x \in \mathcal{P}(x_0) \text{ platí } f(x) \leq f(x_0) \text{ (resp. } f(x) \geq f(x_0)\text{)}.$$

Jsou-li v definici ostré nerovnosti, mluvíme o ostrém lokálním maximu (resp. minimu).

Věta:
Nechť je funkce f spojitá na (a, b) a $x_0 \in (a, b)$. Potom platí

(i) Jestliže $\exists \mathcal{P}(x_0)$ takové, že

$$\begin{array}{lll} \forall x \in \mathcal{P}^-(x_0) & \text{je} & f'(x) > 0 \text{ a} \\ \forall x \in \mathcal{P}^+(x_0) & \text{je} & f'(x) < 0 \end{array}$$

má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Lokální extrémy funkce

Definice: Nechť je funkce f definovaná na (a, b). Říkáme, že funkce f má v bodě $x_0 \in (a, b)$ lokální maximum (resp. minimum), jestliže $\exists\, \mathcal{P}(x_0)$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{P}(x_0) \text{ platí } f(x) \leq f(x_0) \text{ (resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$

Jsou-li v definici ostré nerovnosti, mluvíme o ostrém lokálním maximu (resp. minimu).

Věta:
Nechť je funkce f spojitá na (a, b) a $x_0 \in (a, b)$. Potom platí

(i) Jestliže $\exists\, \mathcal{P}(x_0)$ takové, že

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathcal{P}^-(x_0) \quad &\text{je} \quad f'(x) > 0 \text{ a} \\ \forall\, x \in \mathcal{P}^+(x_0) \quad &\text{je} \quad f'(x) < 0 \end{aligned}$$

má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Lokální extrémy funkce (2)

pokračování věty:

(ii) Jestliže $\exists\, \mathcal{P}(x_0)$ takové, že

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathcal{P}^-(x_0) \quad &\text{je} \quad f'(x) < 0 \text{ a} \\ \forall\, x \in \mathcal{P}^+(x_0) \quad &\text{je} \quad f'(x) > 0 \end{aligned}$$

má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

(iiii) Je-li $f'(x_0) \neq 0$, pak funkce f nemá v bodě x_0 lokální extrém.

Věta:

Nechť je funkce f definovaná na (a, b) a $x_0 \in (a, b)$. Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$ (resp. $f''(x_0) < 0$) má funkce f v bodě x_0 lokální minimum (resp. maximum).

Lokální extrémy funkce (2)

pokračování věty:

(ii) Jestliže $\exists\,\mathcal{P}(x_0)$ takové, že

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathcal{P}^-(x_0) \quad & \text{je} \quad f'(x) < 0 \text{ a} \\ \forall\, x \in \mathcal{P}^+(x_0) \quad & \text{je} \quad f'(x) > 0 \end{aligned}$$

má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

(iiii) Je-li $f'(x_0) \neq 0$, pak funkce f nemá v bodě x_0 lokální extrém.

Věta:

Nechť je funkce f definovaná na (a, b) a $x_0 \in (a, b)$. Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$ (resp. $f''(x_0) < 0$) má funkce f v bodě x_0 lokální minimum (resp. maximum).

Lokální extrémy funkce (2)

pokračování věty:

(ii) Jestliže $\exists\, \mathcal{P}(x_0)$ takové, že

$$\begin{array}{lll} \forall\, x \in \mathcal{P}^-(x_0) & \text{je} & f'(x) < 0 \text{ a} \\ \forall\, x \in \mathcal{P}^+(x_0) & \text{je} & f'(x) > 0 \end{array}$$

má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

(iiii) Je-li $f'(x_0) \neq 0$, pak funkce f nemá v bodě x_0 lokální extrém.

Věta:
Nechť je funkce f definovaná na (a, b) a $x_0 \in (a, b)$. Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$ (resp. $f''(x_0) < 0$) má funkce f v bodě x_0 lokální minimum (resp. maximum).

Globální extrémy funkce

Definice:
Říkáme, že funkce f má v bodě $x_0 \in D(f)$ globální maximum (resp. minimum) jestliže

$$\forall\, x \in D(f) \ \text{ je } \ f(x) \leq f(x_0) \ \ (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$

Číslo $f(x_0)$ pak nazýváme maximální (resp. minimální) hodnotou funkce f.

Poznámka: Ne každá funkce má maximální a minimální hodnotu.

Věta:
Nechť je funkce f spojitá na $\langle a, b\rangle$, potom funkce nabývá své maximální a minimální hodnoty na $\langle a, b\rangle$.

Poznámka: Maximální a minimální hodnotu nabývá funkce buď v bodech lokálních extrémů nebo v krajních bodech.

Globální extrémy funkce

Definice:
Říkáme, že funkce f má v bodě $x_0 \in D(f)$ globální maximum (resp. minimum) jestliže

$$\forall x \in D(f) \text{ je } f(x) \leq f(x_0) \text{ (resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$

Číslo $f(x_0)$ pak nazýváme maximální (resp. minimální) hodnotou funkce f.

Poznámka: Ne každá funkce má maximální a minimální hodnotu.

Věta:
Nechť je funkce f spojitá na $\langle a, b \rangle$, potom funkce nabývá své maximální a minimální hodnoty na $\langle a, b \rangle$.

Poznámka: Maximální a minimální hodnotu nabývá funkce buď v bodech lokálních extrémů nebo v krajních bodech.

Globální extrémy funkce

Definice:
Říkáme, že funkce f má v bodě $x_0 \in D(f)$ globální maximum (resp. minimum) jestliže

$$\forall\, x \in D(f) \;\text{ je }\; f(x) \leq f(x_0) \;\; (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$

Číslo $f(x_0)$ pak nazýváme maximální (resp. minimální) hodnotou funkce f.

Poznámka: Ne každá funkce má maximální a minimální hodnotu.

Věta:
Nechť je funkce f spojitá na $\langle a, b \rangle$, potom funkce nabývá své maximální a minimální hodnoty na $\langle a, b \rangle$.

Poznámka: Maximální a minimální hodnotu nabývá funkce buď v bodech lokálních extrémů nebo v krajních bodech.

Globální extrémy funkce

Definice:
Říkáme, že funkce f má v bodě $x_0 \in D(f)$ globální maximum (resp. minimum) jestliže

$$\forall\, x \in D(f) \text{ je } f(x) \leq f(x_0) \text{ (resp. } f(x) \geq f(x_0)\text{).}$$

Číslo $f(x_0)$ pak nazýváme maximální (resp. minimální) hodnotou funkce f.

Poznámka: Ne každá funkce má maximální a minimální hodnotu.

Věta:
Nechť je funkce f spojitá na $\langle a, b \rangle$, potom funkce nabývá své maximální a minimální hodnoty na $\langle a, b \rangle$.

Poznámka: Maximální a minimální hodnotu nabývá funkce buď v bodech lokálních extrémů nebo v krajních bodech.

Funkce konvexní a konkávní

Definice: Nechť je funkce f spojitá na I.

1. Jestliže pro libovolné $x_1, x_2, x_3 \in I$, pro které platí $x_1 < x_2 < x_3$ leží bod $P_2 = [x_2, f(x_2)]$ pod přímkou nebo na přímce spojující body $P_1 = [x_1, f(x_1)]$ a $P_3 = [x_3, f(x_3)]$, říkáme, že funkce je konvexní na I.
2. Jestliže bod P_2 leží nad přímkou nebo na přímce, říkáme, že funkce je konkávní na I.

Věta:
Nechť funkce f má na intervalu I druhou derivaci. Potom platí:

(i) Je-li $f''(x) \geq 0$ na I, je f konvexní na I.

(ii) Je-li $f''(x) \leq 0$ na I, je f konkávní na I.

Funkce konvexní a konkávní

Definice: Nechť je funkce f spojitá na I.

1. Jestliže pro libovolné $x_1, x_2, x_3 \in I$, pro které platí $x_1 < x_2 < x_3$ leží bod $P_2 = [x_2, f(x_2)]$ pod přímkou nebo na přímce spojující body $P_1 = [x_1, f(x_1)]$ a $P_3 = [x_3, f(x_3)]$, říkáme, že funkce je konvexní na I.
2. Jestliže bod P_2 leží nad přímkou nebo na přímce, říkáme, že funkce je konkávní na I.

Věta:
Nechť funkce f má na intervalu I druhou derivaci. Potom platí:

(i) Je-li $f''(x) \geq 0$ na I, je f konvexní na I.

(ii) Je-li $f''(x) \leq 0$ na I, je f konkávní na I.

Funkce konvexní a konkávní

Definice: Nechť je funkce f spojitá na I.

1. Jestliže pro libovolné $x_1, x_2, x_3 \in I$, pro které platí $x_1 < x_2 < x_3$ leží bod $P_2 = [x_2, f(x_2)]$ pod přímkou nebo na přímce spojující body $P_1 = [x_1, f(x_1)]$ a $P_3 = [x_3, f(x_3)]$, říkáme, že funkce je konvexní na I.
2. Jestliže bod P_2 leží nad přímkou nebo na přímce, říkáme, že funkce je konkávní na I.

Věta:

Nechť funkce f má na intervalu I druhou derivaci. Potom platí:

(i) Je-li $f''(x) \geq 0$ na I, je f konvexní na I.

(ii) Je-li $f''(x) \leq 0$ na I, je f konkávní na I.

Inflexní body

Definice: Nechť je funkce f spojitá na (a,b). Nechť $x_0 \in (a,b)$ a funkce má v bodě x_0 derivaci (i nevlastní). Jestliže

$$\begin{aligned} \forall\, x \in (a, x_0) \quad & \text{je } f \quad \text{konkávní (resp. konvexní)} \\ \text{a } \forall\, x \in (x_0, b) \quad & \text{je } f \quad \text{konvexní (resp. konkávní)} \end{aligned}$$

říkáme, že f má v bodě x_0 inflexi nebo graf funkce f má v bodě $[x_0, f(x_0)]$ inflexní bod.

Věta:

Nechť funkce f má na intervalu (a,b) druhou derivaci.

(i) Existuje-li prstencové okolí $\mathcal{P}(x_0)$ takové, že

$$\begin{aligned} &\forall\, x \in \mathcal{P}^-(x_0) \text{ je } f''(x) > 0 \\ \text{a } &\forall\, x \in \mathcal{P}^+(x_0) \text{ je } f''(x) < 0. \end{aligned}$$

nebo obráceně,

má funkce f v bodě x_0 inflexi.

(ii) Je-li $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, má funkce f v bodě x_0 inflexi.

Inflexní body

Definice: Nechť je funkce f spojitá na (a, b). Nechť $x_0 \in (a, b)$ a funkce má v bodě x_0 derivaci (i nevlastní). Jestliže

$$\begin{array}{rll} \forall\, x \in (a, x_0) & \text{je } f & \text{konkávní (resp. konvexní)} \\ \text{a } \forall\, x \in (x_0, b) & \text{je } f & \text{konvexní (resp. konkávní)} \end{array}$$

říkáme, že f má v bodě x_0 inflexi nebo graf funkce f má v bodě $[x_0, f(x_0)]$ inflexní bod.

Věta:

Nechť funkce f má na intervalu (a, b) druhou derivaci.

(i) Existuje-li prstencové okolí $\mathcal{P}(x_0)$ takové, že

$$\begin{array}{l} \quad\forall\, x \in \mathcal{P}^-(x_0) \text{ je } f''(x) > 0 \\ \text{a } \forall\, x \in \mathcal{P}^+(x_0) \text{ je } f''(x) < 0. \\ \text{nebo obráceně,} \end{array}$$

má funkce f v bodě x_0 inflexi.

(ii) Je-li $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, má funkce f v bodě x_0 inflexi.

Asymptoty grafu funkce

Definice: Jestliže pro fumkci f platí

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to a-} f(x) = \pm\infty$$

nazýváme přímku o rovnici $x = a$ vertikální asymptotou grafu funkce f.

Definice: Jestliže pro fumkci f platí

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \in \mathbb{R} \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$$

nazýváme přímku o rovnici $y = b$ horizontální asymptotou grafu funkce f v ∞ (resp. v $-\infty$).

Definice: Přímka o rovnici $y = k\,x + q$ je obecnou asymptotou grafu funkce f v ∞ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - k\,x - q) = 0 \quad \text{(resp.} \lim_{x \to -\infty} (f(x) - k\,x - q = 0).$$

Asymptoty grafu funkce

Definice: Jestliže pro fumkci f platí

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty \text{ nebo } \lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$$

nazýváme přímku o rovnici $x = a$ vertikální asymptotou grafu funkce f.

Definice: Jestliže pro fumkci f platí

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \in \mathbb{R} \text{ nebo } \lim_{x\to-\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$$

nazýváme přímku o rovnici $y = b$ horizontální asymptotou grafu funkce f v ∞ (resp. v $-\infty$).

Definice: Přímka o rovnici $y = k\,x + q$ je obecnou asymptotou grafu funkce f v ∞ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - k\,x - q) = 0 \text{ (resp. } \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k\,x - q = 0).$$

Asymptoty grafu funkce

Definice: Jestliže pro fumkci f platí

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$$

nazýváme přímku o rovnici $x = a$ vertikální asymptotou grafu funkce f.

Definice: Jestliže pro fumkci f platí

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \in \mathbb{R} \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$$

nazýváme přímku o rovnici $y = b$ horizontální asymptotou grafu funkce f v ∞ (resp. v $-\infty$).

Definice: Přímka o rovnici $y = k\,x + q$ je obecnou asymptotou grafu funkce f v ∞ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - k\,x - q) = 0 \quad (\text{resp.} \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k\,x - q = 0).$$

Asymptoty grafu funkce

Definice: Jestliže pro fumkci f platí

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$$

nazýváme přímku o rovnici $x = a$ vertikální asymptotou grafu funkce f.

Definice: Jestliže pro fumkci f platí

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \in \mathbb{R} \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$$

nazýváme přímku o rovnici $y = b$ horizontální asymptotou grafu funkce f v ∞ (resp. v $-\infty$).

Definice: Přímka o rovnici $y = k\,x + q$ je obecnou asymptotou grafu funkce f v ∞ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - k\,x - q) = 0 \quad (\text{resp.} \lim_{x\to -\infty} (f(x) - k\,x - q = 0).$$

Asymptoty grafu funkce (2)

Věta:
Přímka o rovnici $y = k\,x + q$ je obecnou asymptotou grafu funkce f v ∞, jestliže

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R} \ \text{ a } \ \lim_{x\to\infty} (f(x) - k\,x) = q \in \mathbb{R}.$$

Podobně pro $-\infty$.

Vyšetřování průběhu funkce

1. Určení $D(f)$, sudost, lichost, periodicita.
2. Spojitost, limity (případně jednostranné limity) v krajních bodech definičního oboru a v bodech nespojitosti.
3. $f'(x) \quad \Rightarrow \quad$ monotonnost, lokální extrémy.
4. $f''(x) \quad \Rightarrow \quad$ konvexnost, konkávnost, inflexe.
5. Vyšetření asymptot.
6. Nakreslení grafu funkce f a určení $H(f)$.

Newtonova metoda - metoda tečen

Numerická metoda pro přibližné určení kořene algebraické rovnice

$$f(x) = 0\,.$$

Předpokládáme, že f je spojitá a má první a druhou derivaci na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Věta:
Nechť $f(a)\,f(b) < 0$, pak $\exists\, c(a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.

Definice: Jestliže v intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje právě jeden kořen nazýváme interval $\langle a, b\rangle$ separační interval.

Nechť α je kořen rovnice $f(x) = 0$.

Newtonova metoda - metoda tečen

Numerická metoda pro přibližné určení kořene algebraické rovnice

$$f(x) = 0\,.$$

Předpokládáme, že f je spojitá a má první a druhou derivaci na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Věta:
Nechť $f(a)\,f(b) < 0$, pak $\exists\, c(a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.

Definice: Jestliže v intervalu $\langle a, b \rangle$ existuje právě jeden kořen nazýváme interval $\langle a, b \rangle$ separační interval.

Nechť α je kořen rovnice $f(x) = 0$.

Newtonova metoda - metoda tečen

Numerická metoda pro přibližné určení kořene algebraické rovnice

$$f(x) = 0\,.$$

Předpokládáme, že f je spojitá a má první a druhou derivaci na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Věta:
Nechť $f(a)\,f(b) < 0$, pak $\exists\, c(a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.

Definice: Jestliže v intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje právě jeden kořen nazýváme interval $\langle a, b\rangle$ separační interval.

Nechť α je kořen rovnice $f(x) = 0$.

Newtonova metoda - metoda tečen

Numerická metoda pro přibližné určení kořene algebraické rovnice

$$f(x) = 0\,.$$

Předpokládáme, že f je spojitá a má první a druhou derivaci na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Věta:
Nechť $f(a)\,f(b) < 0$, pak $\exists\, c(a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.

Definice: Jestliže v intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje právě jeden kořen nazýváme interval $\langle a, b\rangle$ separační interval.

Nechť α je kořen rovnice $f(x) = 0$.

Newtonova metoda - metoda tečen

Numerická metoda pro přibližné určení kořene algebraické rovnice

$$f(x) = 0\,.$$

Předpokládáme, že f je spojitá a má první a druhou derivaci na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Věta:
Nechť $f(a)\,f(b) < 0$, pak $\exists\, c(a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.

Definice: Jestliže v intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje právě jeden kořen nazýváme interval $\langle a, b\rangle$ separační interval.

Nechť α je kořen rovnice $f(x) = 0$.

Newtonova metoda - metoda tečen (2)

Newtonova metoda

Zvolme $x_0 \in \langle a, b\rangle$ takové, že $f(x_0)f''(x_0) > 0$.
Sestrojme posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ nazýváme posloupnost postupných aproximací kořene α. x_n je $n-$tá aproximace kořene α.

Věta:

Jsou-li splněny předpoklady

(i) $f(a)\,f(b) < 0$

(ii) $f'(x) \neq 0$ pro $\forall\, x \in (a, b)$

(iii) $f''(x) \neq 0$ pro $\forall\, x \in \langle a, b\rangle$

(iv) $x_0 \in \langle a, b\rangle,\ f(x_0)f''(x_0) > 0,\ f'(x_0) \neq 0,$

potom pro posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha.$$

Newtonova metoda - metoda tečen (2)

Newtonova metoda
Zvolme $x_0 \in \langle a, b \rangle$ takové, že $f(x_0)f''(x_0) > 0$.
Sestrojme posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ nazýváme posloupnost postupných aproximací kořene α. x_n je $n-$tá aproximace kořene α.

Věta:
Jsou-li splněny předpoklady
(i) $f(a)\,f(b) < 0$
(ii) $f'(x) \neq 0$ pro $\forall\, x \in (a, b)$
(iii) $f''(x) \neq 0$ pro $\forall\, x \in \langle a, b \rangle$
(iv) $x_0 \in \langle a, b \rangle,\ f(x_0)f''(x_0) > 0,\ f'(x_0) \neq 0,$
potom pro posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ platí

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha.$$

Newtonova metoda - metoda tečen (2)

Newtonova metoda

Zvolme $x_0 \in \langle a, b\rangle$ takové, že $f(x_0)f''(x_0) > 0$.
Sestrojme posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ nazýváme posloupnost postupných aproximací kořene α. x_n je $n-$tá aproximace kořene α.

Věta:

Jsou-li splněny předpoklady

(i) $f(a)\,f(b) < 0$

(ii) $f'(x) \neq 0$ pro $\forall\, x \in (a, b)$

(iii) $f''(x) \neq 0$ pro $\forall\, x \in \langle a, b\rangle$

(iv) $x_0 \in \langle a, b\rangle,\; f(x_0)f''(x_0) > 0,\; f'(x_0) \neq 0,$

potom pro posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha.$$