Kapitola 4: Průběh funkce

Funkce monotonní
Věta: Nechť je f spojitá a má derivaci na intervalu I. Potom platí

(i) Je-li $f'(x) > 0$ na I, je funkce f rostoucí na I.

(ii) Je-li $f'(x) \geq 0$ na I, je funkce f neklesající na I.

(iii) Je-li $f'(x) < 0$ na I, je funkce f klesající na I.

(iv) Je-li $f'(x) \leq 0$ na I, je funkce f nerostoucí na I.

(v) Je-li $f'(x) = 0$ na I, je funkce f konstantní na I.

Věta: Nechť je funkce f spojitá na I a nechť má kromě v konečném počtu bodů $x_1, x_2, \dots x_k$ v intervalu I derivaci $f'(x) > 0$. Potom je f rostoucí na intervalu I.

Lokální extrémy funkce
Definice: Nechť je funkce f definovaná na (a, b). Říkáme, že funkce f má v bodě $x_0 \in (a, b)$ *lokální maximum (resp. minimum)*, jestliže $\exists\, \mathcal{P}(x_0)$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{P}(x_0) \text{ platí } f(x) \leq f(x_0) \text{ (resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$

Jsou-li v definici ostré nerovnosti, mluvíme o *ostrém lokálním maximu (resp. minimu).*
Věta: Nechť je funkce f spojitá na (a, b) a $x_0 \in (a, b)$. Potom platí

(i) Jestliže $\exists\, \mathcal{P}(x_0)$ takové, že

$$\begin{array}{lll} \forall\, x \in \mathcal{P}^-(x_0) & \text{je} & f'(x) > 0 \text{ a} \\ \forall\, x \in \mathcal{P}^+(x_0) & \text{je} & f'(x) < 0 \end{array}$$

má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Lokální extrémy funkce (2)

pokračování věty:

(ii) Jestliže $\exists\, \mathcal{P}(x_0)$ takové, že

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathcal{P}^-(x_0) \quad &\text{je} \quad f'(x) < 0 \text{ a} \\ \forall\, x \in \mathcal{P}^+(x_0) \quad &\text{je} \quad f'(x) > 0 \end{aligned}$$

má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

(iiii) Je-li $f'(x_0) \neq 0$, pak funkce f nemá v bodě x_0 lokální extrém.

Věta: Nechť je funkce f definovaná na (a, b) a $x_0 \in (a, b)$. Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$ (resp. $f''(x_0) < 0$) má funkce f v bodě x_0 lokální minimum (resp. maximum).

Globální extrémy funkce

Definice: Říkáme, že funkce f má v bodě $x_0 \in D(f)$ *globální maximum* (resp. *minimum*) jestliže

$$\forall\, x \in D(f) \ \text{ je } \ f(x) \leq f(x_0) \ \text{ (resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$

Číslo $f(x_0)$ pak nazýváme *maximální* (resp. *minimální*) *hodnotou* funkce f.
Poznámka: Ne každá funkce má maximální a minimální hodnotu.[2mm] **Věta:** Nechť je funkce f spojitá na $\langle a, b\rangle$, potom funkce nabývá své maximální a minimální hodnoty na $\langle a, b\rangle$. [2mm] **Poznámka:** Maximální a minimální hodnotu nabývá funkce buď v bodech lokálních extrémů nebo v krajních bodech.

Funkce konvexní a konkávní

Definice: Nechť je funkce f spojitá na I.

1. Jestliže pro libovolné $x_1, x_2, x_3 \in I$, pro které platí $x_1 < x_2 < x_3$ leží bod $P_2 = [x_2, f(x_2)]$ pod přímkou nebo na přímce spojující body $P_1 = [x_1, f(x_1)]$ a $P_3 = [x_3, f(x_3)]$, říkáme, že funkce je *konvexní na* I.

2. Jestliže bod P_2 leží nad přímkou nebo na přímce, říkáme, že funkce je *konkávní na* I.

Věta: Nechť funkce f má na intervalu I druhou derivaci. Potom platí:

(i) Je-li $f''(x) \geq 0$ na I, je f konvexní na I.

(ii) Je-li $f''(x) \leq 0$ na I, je f konkávní na I.

Inflexní body
Definice: Nechť je funkce f spojitá na (a, b). Nechť $x_0 \in (a, b)$ a funkce má v bodě x_0 derivaci (i nevlastní). Jestliže

$$\begin{array}{rll} \forall\, x \in (a, x_0) & \text{je } f & \text{konkávní (resp. konvexní)} \\ \text{a } \forall\, x \in (x_0, b) & \text{je } f & \text{konvexní (resp. konkávní)} \end{array}$$

říkáme, že f má v bodě x_0 *inflexi* nebo graf funkce f má v bodě $[x_0, f(x_0)]$ *inflexní bod*.
Věta: Nechť funkce f má na intervalu (a, b) druhou derivaci.

(i) Existuje-li prstencové okolí $\mathcal{P}(x_0)$ takové, že $\forall\, x \in \mathcal{P}^-(x_0)$ je $f''(x) > 0$ a $\forall\, x \in \mathcal{P}^+(x_0)$ je $f''(x) < 0$. nebo obráceně,

má funkce f v bodě x_0 inflexi.

(ii) Je-li $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, má funkce f v bodě x_0 inflexi.

Asymptoty grafu funkce
Definice: Jestliže pro fumkci f platí

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty \text{ nebo } \lim_{x \to a-} f(x) = \pm\infty$$

nazýváme přímku o rovnici $x = a$ *vertikální asymptotou* grafu funkce f.[3mm]
Definice: Jestliže pro fumkci f platí

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \in \mathbb{R} \text{ nebo } \lim_{x \to -\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$$

nazýváme přímku o rovnici $y = b$ *horizontální asymptotou* grafu funkce f v ∞ (resp. v $-\infty$).
Definice: Přímka o rovnici $y = k\,x + q$ je *obecnou asymptotou* grafu funkce f v ∞ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - k\,x - q) = 0 \text{ (resp. } \lim_{x \to -\infty} (f(x) - k\,x - q = 0).$$

Asymptoty grafu funkce (2)
Věta: Přímka o rovnici $y = k\,x + q$ je obecnou asymptotou grafu funkce f v ∞, jestliže

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R} \text{ a } \lim_{x \to \infty} (f(x) - k\,x) = q \in \mathbb{R}.$$

Podobně pro $-\infty$.

Vyšetřování průběhu funkce

1. Určení $D(f)$, sudost, lichost, periodicita.
2. Spojitost, limity (případně jednostranné limity) v krajních bodech definičního oboru a v bodech nespojitosti.
3. $f'(x) \quad \Rightarrow \quad$ monotonnost, lokální extrémy.
4. $f''(x) \quad \Rightarrow \quad$ konvexnost, konkávnost, inflexe.
5. Vyšetření asymptot.
6. Nakreslení grafu funkce f a určení $H(f)$.

Newtonova metoda - metoda tečen
Numerická metoda pro přibližné určení kořene algebraické rovnice

$$f(x) = 0\,.$$

Předpokládáme, že f je spojitá a má první a druhou derivaci na intervalu $\langle a, b\rangle$.[3mm] **Věta:** Nechť $f(a)\,f(b) < 0$, pak $\exists\, c(a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.[3mm] **Definice:** Jestliže v intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje právě jeden kořen nazýváme interval $\langle a, b\rangle$ *separační interval*.[3mm] Nechť α je kořen rovnice $f(x) = 0$.[3mm]

Newtonova metoda - metoda tečen (2)
Zvolme $x_0 \in \langle a, b\rangle$ takové, že $f(x_0)f''(x_0) > 0$. Sestrojme posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ nazýváme *posloupnost postupných aproximací* kořene α. x_n je $n-$*tá aproximace* kořene α.[3mm] **Věta:** Jsou-li splněny předpoklady

(i) $f(a)\,f(b) < 0$

(ii) $f'(x) \neq 0$ pro $\forall\, x \in (a, b)$

(iii) $f''(x) \neq 0$ pro $\forall\, x \in \langle a, b\rangle$

(iv) $x_0 \in \langle a, b\rangle,\; f(x_0)f''(x_0) > 0,\; f'(x_0) \neq 0,$

potom pro posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha.$$