

Kapitola 5: Taylorova formule. Diferenciál.

Taylorova formule

Definice: Funkci

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$ pro $i = 0, 1, \dots, n$, $a_n \neq 0$ nazýváme **polynomem n -tého stupně** s konstantními koeficienty. $D(f) = \mathbb{R}$.

Definice: Necht' funkce f má v bodě x_0 n -tou derivaci (vlastní). Potom polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem n -tého stupně** funkce f v bodě x_0 .

Tvrzení: Pro Taylorův polynom $T_n(x)$ funkce f v bodě x_0 platí

$$T_n(x_0) = f(x_0), \quad T'_n(x_0) = f'(x_0), \dots, \quad T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Taylorova formule

Definice: Funkci

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$ pro $i = 0, 1, \dots, n$, $a_n \neq 0$ nazýváme **polynomem n -tého stupně** s konstantními koeficienty. $D(f) = \mathbb{R}$.

Definice: Necht' funkce f má v bodě x_0 n -tou derivaci (vlastní). Potom polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem n -tého stupně** funkce f v bodě x_0 .

Tvrzení: Pro Taylorův polynom $T_n(x)$ funkce f v bodě x_0 platí

$$T_n(x_0) = f(x_0), \quad T'_n(x_0) = f'(x_0), \quad \dots, \quad T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Taylorova formule

Definice: Funkci

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$ pro $i = 0, 1, \dots, n$, $a_n \neq 0$ nazýváme **polynomem n -tého stupně** s konstantními koeficienty. $D(f) = \mathbb{R}$.

Definice: Necht' funkce f má v bodě x_0 n -tou derivaci (vlastní). Potom polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem n -tého stupně** funkce f v bodě x_0 .

Tvrzení: Pro Taylorův polynom $T_n(x)$ funkce f v bodě x_0 platí

$$T_n(x_0) = f(x_0), \quad T'_n(x_0) = f'(x_0), \quad \dots, \quad T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Taylorova formule

Definice: Funkci

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$ pro $i = 0, 1, \dots, n$, $a_n \neq 0$ nazýváme **polynomem n -tého stupně** s konstantními koeficienty. $D(f) = \mathbb{R}$.

Definice: Necht' funkce f má v bodě x_0 n -tou derivaci (vlastní). Potom polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem n -tého stupně** funkce f v bodě x_0 .

Tvrzení: Pro Taylorův polynom $T_n(x)$ funkce f v bodě x_0 platí

$$T_n(x_0) = f(x_0), \quad T'_n(x_0) = f'(x_0), \dots, \quad T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Taylorova formule (2)

Definice: Necht' $T_n(x)$ je Taylorův polynom funkce f v bodě x_0 .
Označme

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

zbytek Taylorova polynomu po n -té derivaci.

Věta: Necht' funkce f má na intervalu I $(n+1)$ -ní derivaci a $T_n(x)$ je její Taylorův polynom v bodě $x_0 \in I$, potom

$\forall x \in I \exists c \in (x, x_0)$ (resp. $c \in (x_0, x)$) takové, že

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

tj.

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Poslední vztah se nazývá Taylorova formule.

Taylorova formule (2)

Definice: Necht' $T_n(x)$ je Taylorův polynom funkce f v bodě x_0 .
Označme

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

zbytek Taylorova polynomu po n —té derivaci.

Věta: Necht' funkce f má na intervalu I $(n+1)$ —ní derivaci a $T_n(x)$ je její Taylorův polynom v bodě $x_0 \in I$, potom

$\forall x \in I \exists c \in (x, x_0)$ (resp. $c \in (x_0, x)$) takové, že

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

tj.

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Poslední vztah se nazývá **Taylorova formule**.

Taylorova formule (2)

Definice: Necht' $T_n(x)$ je Taylorův polynom funkce f v bodě x_0 .
Označme

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

zbytek Taylorova polynomu po n -té derivaci.

Věta: Necht' funkce f má na intervalu I $(n+1)$ -ní derivaci a $T_n(x)$ je její Taylorův polynom v bodě $x_0 \in I$, potom

$\forall x \in I \exists c \in (x, x_0)$ (resp. $c \in (x_0, x)$) takové, že

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

tj.

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Poslední vztah se nazývá **Taylorova formule**.

Diferenciál funkce.

Definice:

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

nazýváme **diferencí funkce f v bodě x_0 odpovídající změně x o Δx** .

$$df(x_0, \Delta x) = f'(x_0)\Delta x$$

nazýváme **diferenciálem funkce f v bodě x_0** .

Diferenciál funkce.

Definice:

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

nazýváme **diferencí funkce f v bodě x_0** odpovídající změně x o Δx .

$$df(x_0, \Delta x) = f'(x_0)\Delta x$$

nazýváme **diferenciálem funkce f v bodě x_0** .