Kapitola 5: Taylorova formule. Diferenciál.

Taylorova formule
Definice: Funkci

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \,,$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$ pro $i = 0, 1, \ldots n$, $a_n \neq 0$ nazýváme *polynomem* $n-$*tého stupně* s konstantními koeficienty. $D(f) = \mathbb{R}$.[2mm] **Definice:** Nechť funkce f má v bodě x_0 $n-$tou derivaci (vlastní). Potom polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazýváme *Taylorovým polynomem* $n-$*tého stupně funkce* f *v bodě* x_0.
Tvrzení: Pro Taylorův polynom $T_n(x)$ funkce f v bodě x_0 platí

$$T_n(x_0) = f(x_0),\, T_n'(x_0) = f'(x_0), \ldots, T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Taylorova formule (2)
Definice: Nechť $T_n(x)$ je Taylorův polynom funkce f v bodě x_0. Označme

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

zbytek Taylorova polynomu po $n-$té derivaci.
Věta: Nechť funkce f má na intervalu I $(n+1)-$ní derivaci a $T_n(x)$ je její Taylorův polynom v bodě $x_0 \in I$, potom

$$\forall\, x \in I \;\exists\, c \in (x, x_0) \text{ (resp. } c \in (x_0, x)) \text{ takové, že}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

tj.

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \,.$$

Poslední vztah se nazývá *Taylorova formule*.

Diferenciál funkce.
Definice:

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

nazýváme *diferencí funkce* f *v bodě* x_0 odpovídající změně x o Δx.

$$\mathrm{d}f(x_0, \Delta x) = f'(x_0)\Delta x$$

nazýváme *diferenciálem funkce* f *v bodě* x_0.