Kapitola 7: Integrál.

Neurčitý integrál.

Definice: Nechť f je funkce definovaná na intervalu I. Funkci F definovanou na intervalu I, pro kterou platí

$$F'(x) = f(x)\ \forall\, x \in I$$

nazýváme primitivní funkcí k funkci f na intervalu I.

Poznámka: Je-li F primitivní funkce k funkci f na intervalu I a $G(x) = F(x) + c$ pro $x \in I$, kde c je konstanta, je G také primitivní funkce k funkci f na intervalu I.

Definice: Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I nazýváme neurčitý integrál k funkci f na intervalu I a označujeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c;\ c \in \mathbb{R},\ F \text{ je primitivni funkcí k } f \text{ na } I\}.$$

Úmluva: Nebudeme rozlišovat mezi primitivní funkcí a neurčitým integrálem.

Neurčitý integrál.

Definice: Nechť f je funkce definovaná na intervalu I. Funkci F definovanou na intervalu I, pro kterou platí

$$F'(x) = f(x)\ \forall\, x \in I$$

nazýváme primitivní funkcí k funkci f na intervalu I.

Poznámka: Je-li F primitivní funkce k funkci f na intervalu I a $G(x) = F(x) + c$ pro $x \in I$, kde c je konstanta, je G také primitivní funkce k funkci f na intervalu I.

Definice: Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I nazýváme neurčitý integrál k funkci f na intervalu I a označujeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c;\ c \in \mathbb{R},\ F \text{ je primitivni funkcí k } f \text{ na } I\}.$$

Úmluva: Nebudeme rozlišovat mezi primitivní funkcí a neurčitým integrálem.

Neurčitý integrál.

Definice: Nechť f je funkce definovaná na intervalu I. Funkci F definovanou na intervalu I, pro kterou platí

$$F'(x) = f(x)\ \forall\, x \in I$$

nazýváme primitivní funkcí k funkci f na intervalu I.

Poznámka: Je-li F primitivní funkce k funkci f na intervalu I a $G(x) = F(x) + c$ pro $x \in I$, kde c je konstanta, je G také primitivní funkce k funkci f na intervalu I.

Definice: Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I nazýváme neurčitý integrál k funkci f na intervalu I a označujeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c;\ c \in \mathbb{R},\ F \text{ je primitivni funkcí k } f \text{ na } I\}.$$

Úmluva: Nebudeme rozlišovat mezi primitivní funkcí a neurčitým integrálem.

Neurčitý integrál.

Definice: Nechť f je funkce definovaná na intervalu I. Funkci F definovanou na intervalu I, pro kterou platí

$$F'(x) = f(x) \;\forall\, x \in I$$

nazýváme primitivní funkcí k funkci f na intervalu I.

Poznámka: Je-li F primitivní funkce k funkci f na intervalu I a $G(x) = F(x) + c$ pro $x \in I$, kde c je konstanta, je G také primitivní funkce k funkci f na intervalu I.

Definice: Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I nazýváme neurčitý integrál k funkci f na intervalu I a označujeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c;\; c \in \mathbb{R},\; F \text{ je primitivni funkcí k } f \text{ na } I\}.$$

Úmluva: Nebudeme rozlišovat mezi primitivní funkcí a neurčitým integrálem.

Neurčitý integrál.

Definice: Nechť f je funkce definovaná na intervalu I. Funkci F definovanou na intervalu I, pro kterou platí

$$F'(x) = f(x)\ \forall\, x \in I$$

nazýváme primitivní funkcí k funkci f na intervalu I.

Poznámka: Je-li F primitivní funkce k funkci f na intervalu I a $G(x) = F(x) + c$ pro $x \in I$, kde c je konstanta, je G také primitivní funkce k funkci f na intervalu I.

Definice: Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I nazýváme neurčitý integrál k funkci f na intervalu I a označujeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c;\ c \in \mathbb{R},\ F \text{ je primitivni funkcí k } f \text{ na } I\}.$$

Úmluva: Nebudeme rozlišovat mezi primitivní funkcí a neurčitým integrálem.

Existence primitivní funkce.

Věta: O existenci primitivní funkce
Nechť funkce f je spojitá na intervalu I, potom f má na intervalu I primitivní funkci.

Poznámka: Existují funkce, které podle předchozí věty mají primitivní funkci, my ji ale neumíme nalézt pomoci známých funkcí. Můžeme ji tedy definovat pomoci integrálu. Např.:

$$\int e^{-x^2}\,dx,\ \int \frac{\sin x}{x}\,dx,\ \ldots$$

Existence primitivní funkce.

Věta: O existenci primitivní funkce
Nechť funkce f je spojitá na intervalu I, potom f má na intervalu I primitivní funkci.

Poznámka: Existují funkce, které podle předchozí věty mají primitivní funkci, my ji ale neumíme nalézt pomoci známých funkcí. Můžeme ji tedy definovat pomoci integrálu. Např.:

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \dots$$

Existence primitivní funkce.

Věta: O existenci primitivní funkce
Nechť funkce f je spojitá na intervalu I, potom f má na intervalu I primitivní funkci.

Poznámka: Existují funkce, které podle předchozí věty mají primitivní funkci, my ji ale neumíme nalézt pomoci známých funkcí. Můžeme ji tedy definovat pomoci integrálu. Např.:

$$\int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x,\ \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \dots$$

Tabulka primitivních funkcích.

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad n \in \mathbb{R},\ n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x|$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} \qquad a > 0,\ a \neq 1$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| \qquad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)|$$

Vlastnosti integrálů

Věta: Platí

(i) $\displaystyle\int k\, f(x)\,\mathrm{d}x = k \int f(x)\,\mathrm{d}x$, kde k je konstanta.

(ii) $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$

Vlastnosti integrálů

Věta: Platí

(i) $\int k\, f(x)\,\mathrm{d}x = k \int f(x)\,\mathrm{d}x$, kde k je konstanta.

(ii) $\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$

Metoda per partes.

Věta:
Nechť funkce u a v mají v intervalu I spojité derivace. Potom v intervalu I platí

$$\int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Metoda per partes.

Věta:
Nechť funkce u a v mají v intervalu I spojité derivace. Potom v intervalu I platí

$$\int u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Metoda per partes.

Věta:
Nechť funkce u a v mají v intervalu I spojité derivace. Potom v intervalu I platí

$$\int u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Metoda substituční

Věta: Nechť funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu (a, b) a nechť funkce $t = \varphi(x)$ má spojitou první derivaci v intervalu (α, β) a zobrazuje interval (α, β) na interval (a, b).

(i) Pak

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) = F(\varphi(x)),$$

kde F je primitivní funkce k f na (a, b).

(ii) Nechť navíc $\forall x \in (\alpha, \beta):\ \varphi'(x) \neq 0$. Pak

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) = F(\varphi^{-1}(t)),$$

kde F je primitivní funkce k $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ na (α, β).

$t = \varphi(x)$ je použitá substituce

Metoda substituční

Věta: Nechť funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu (a, b) a nechť funkce $t = \varphi(x)$ má spojitou první derivaci v intervalu (α, β) a zobrazuje interval (α, β) na interval (a, b).

(i) Pak

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) = F(\varphi(x)),$$

kde F je primitivní funkce k f na (a, b).

(ii) Nechť navíc $\forall x \in (\alpha, \beta): \ \varphi'(x) \neq 0$. Pak

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) = F(\varphi^{-1}(t)),$$

kde F je primitivní funkce k $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ na (α, β).

$t = \varphi(x)$ je použitá substituce

Integrace racionálních lomených funkcí

- dělení polynomů
- rozklad polynomu na součin kořenových činitelů
- rozklad ryze lomených racionálních funkcí na součet parciálních zlomků
- integrace parciálních zlomků

Integrace racionálních lomených funkcí

- dělení polynomů
- rozklad polynomu na součin kořenových činitelů
- rozklad ryze lomených racionálních funkcí na součet parciálních zlomků
- integrace parciálních zlomků

Rozklad polynomu v kořenové činitele.

Připomeňme tvar polynomu:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ jsou koeficienty a $a_n \neq 0$.
$P_0(x) = a_0$ je polynom nultého stupně.
Kořenem polynomu $P_n(x)$ pro $n \geq 1$ rozumíme číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ takové, že $P_n(\alpha) = 0$.

Věta: Je-li číslo α kořenem polynomu $P_n(x)$, potom

$$P_n(x) = (x - \alpha) Q(x) \,,$$

kde $Q(x)$ je polynom $(n-1)$-ního stupně.

Definice: α je k-násobným kořenem polynomu $P(x)$, jestliže

$$P(x) = (x - \alpha)^k Q(x),$$

$Q(x)$ je polynom, $Q(\alpha) \neq 0$.

Rozklad polynomu v kořenové činitele.

Připomeňme tvar polynomu:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ jsou koeficienty a $a_n \neq 0$.
$P_0(x) = a_0$ je polynom nultého stupně.
Kořenem polynomu $P_n(x)$ pro $n \geq 1$ rozumíme číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ takové, že $P_n(\alpha) = 0$.

Věta: Je-li číslo α kořenem polynomu $P_n(x)$, potom

$$P_n(x) = (x - \alpha) Q(x) \,,$$

kde $Q(x)$ je polynom $(n-1)$-ního stupně.

Definice: α je k-násobným kořenem polynomu $P(x)$, jestliže

$$P(x) = (x - \alpha)^k Q(x),$$

$Q(x)$ je polynom, $Q(\alpha) \neq 0$.

Rozklad polynomu v kořenové činitele.

Připomeňme tvar polynomu:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ jsou koeficienty a $a_n \neq 0$.
$P_0(x) = a_0$ je polynom nultého stupně.
Kořenem polynomu $P_n(x)$ pro $n \geq 1$ rozumíme číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ takové, že $P_n(\alpha) = 0$.

Věta: Je-li číslo α kořenem polynomu $P_n(x)$, potom

$$P_n(x) = (x - \alpha)Q(x)\,,$$

kde $Q(x)$ je polynom $(n-1)$-ního stupně.

Definice: α je k-násobným kořenem polynomu $P(x)$, jestliže

$$P(x) = (x - \alpha)^k Q(x),$$

$Q(x)$ je polynom, $Q(\alpha) \neq 0$.

Rozklad polynomu v kořenové činitele.

Připomeňme tvar polynomu:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ jsou koeficienty a $a_n \neq 0$.
$P_0(x) = a_0$ je polynom nultého stupně.
Kořenem polynomu $P_n(x)$ pro $n \geq 1$ rozumíme číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ takové, že $P_n(\alpha) = 0$.

Věta: Je-li číslo α kořenem polynomu $P_n(x)$, potom

$$P_n(x) = (x - \alpha) Q(x) \,,$$

kde $Q(x)$ je polynom $(n-1)$-ního stupně.

Definice: α je k-násobným kořenem polynomu $P(x)$, jestliže

$$P(x) = (x - \alpha)^k Q(x),$$

$Q(x)$ je polynom, $Q(\alpha) \neq 0$.

Rozklad polynomu v kořenové činitele (2).

Poznámka: α je k-násobným kořenem polynomu $P(x) \Leftrightarrow$

$$P(\alpha) = 0,\ P'(\alpha) = 0, \ldots, P^{k-1}(\alpha) = 0 \text{ a } P^{k}(\alpha) \neq 0.$$

Věta: Má-li polynom $P_n(x)$ dva komplexně sdružené kořeny $a \pm \mathrm{i}b$, potom

$$P_n(x) = (x^2 + p\,x + q)Q(x)\,,$$

kde $Q(x)$ je polynom $(n-2)$-hého stupně a kořeny $a \pm \mathrm{i}b$ jsou kořeny polynomu $x^2 + p\,x + q$.

Věta: Každý polynom n-tého stupně má právě n kořenů, přitom každý kořen počítáme s jeho násobností (některé kořeny mohou být komplexní).

Rozklad polynomu v kořenové činitele (2).

Poznámka: α je k-násobným kořenem polynomu $P(x) \Leftrightarrow$

$$P(\alpha) = 0,\ P'(\alpha) = 0, \ldots, P^{k-1}(\alpha) = 0 \text{ a } P^{k}(\alpha) \neq 0.$$

Věta: Má-li polynom $P_n(x)$ dva komplexně sdružené kořeny $a \pm \mathrm{i}b$, potom

$$P_n(x) = (x^2 + p\,x + q)Q(x)\,,$$

kde $Q(x)$ je polynom $(n-2)$-hého stupně a kořeny $a \pm \mathrm{i}b$ jsou kořeny polynomu $x^2 + p\,x + q$.

Věta: Každý polynom n-tého stupně má právě n kořenů, přitom každý kořen počítáme s jeho násobností (některé kořeny mohou být komplexní).

Rozklad polynomu v kořenové činitele (2).

Poznámka: α je k-násobným kořenem polynomu $P(x) \Leftrightarrow$

$$P(\alpha) = 0,\ P'(\alpha) = 0, \dots, P^{k-1}(\alpha) = 0 \text{ a } P^{k}(\alpha) \neq 0.$$

Věta: Má-li polynom $P_n(x)$ dva komplexně sdružené kořeny $a \pm \mathrm{i}b$, potom

$$P_n(x) = (x^2 + p\,x + q)Q(x)\,,$$

kde $Q(x)$ je polynom $(n-2)$-hého stupně a kořeny $a \pm \mathrm{i}b$ jsou kořeny polynomu $x^2 + p\,x + q$.

Věta: Každý polynom n-tého stupně má právě n kořenů, přitom každý kořen počítáme s jeho násobností (některé kořeny mohou být komplexní).

Racionálně lomené funkce.

Definice: Funkce tvaru $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy, nazýváme racionální lomenou funkcí.
Je-li stupeň $P(x)$ menší než stupeň $Q(x)$ nazýváme funkci ryze lomenou racionální funkcí.
Je-li stupeň $P(x)$ větší než stupeň $Q(x)$ nazýváme funkci neryze lomenou racionální funkcí.

Věta: Každá racionální lomená funkce je součtem polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Poznámka: Polynom umíme integrovat. Musíme se naučit integrovat ryze lomenou racionální funkci.

Ryze lomenou racionální funkci musíme rozložit na parciální zlomky.

Racionálně lomené funkce.

Definice: Funkce tvaru $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy, nazýváme racionální lomenou funkcí.
Je-li stupeň $P(x)$ menší než stupeň $Q(x)$ nazýváme funkci ryze lomenou racionální funkcí.
Je-li stupeň $P(x)$ větší než stupeň $Q(x)$ nazýváme funkci neryze lomenou racionální funkcí.

Věta: Každá racionální lomená funkce je součtem polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Poznámka: Polynom umíme integrovat. Musíme se naučit integrovat ryze lomenou racionální funkci.

Ryze lomenou racionální funkci musíme rozložit na parciální zlomky.

Racionálně lomené funkce.

Definice: Funkce tvaru $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy, nazýváme racionální lomenou funkcí.
Je-li stupeň $P(x)$ menší než stupeň $Q(x)$ nazýváme funkci ryze lomenou racionální funkcí.
Je-li stupeň $P(x)$ větší než stupeň $Q(x)$ nazýváme funkci neryze lomenou racionální funkcí.

Věta: Každá racionální lomená funkce je součtem polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Poznámka: Polynom umíme integrovat. Musíme se naučit integrovat ryze lomenou racionální funkci.

Ryze lomenou racionální funkci musíme rozložit na parciální zlomky.

Racionálně lomené funkce.

Definice: Funkce tvaru $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy, nazýváme racionální lomenou funkcí.
Je-li stupeň $P(x)$ menší než stupeň $Q(x)$ nazýváme funkci ryze lomenou racionální funkcí.
Je-li stupeň $P(x)$ větší než stupeň $Q(x)$ nazýváme funkci neryze lomenou racionální funkcí.

Věta: Každá racionální lomená funkce je součtem polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Poznámka: Polynom umíme integrovat. Musíme se naučit integrovat ryze lomenou racionální funkci.

Ryze lomenou racionální funkci musíme rozložit na parciální zlomky.

Racionálně lomené funkce.

Definice: Funkce tvaru $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy, nazýváme racionální lomenou funkcí.
Je-li stupeň $P(x)$ menší než stupeň $Q(x)$ nazýváme funkci ryze lomenou racionální funkcí.
Je-li stupeň $P(x)$ větší než stupeň $Q(x)$ nazýváme funkci neryze lomenou racionální funkcí.

Věta: Každá racionální lomená funkce je součtem polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Poznámka: Polynom umíme integrovat. Musíme se naučit integrovat ryze lomenou racionální funkci.

Ryze lomenou racionální funkci musíme rozložit na parciální zlomky.

Rozklad na parciální zlomky.

1. Jmenovatel rozložíme na kořenové činitele.
2. Je-li v rozkladu jmenovatele výraz $(ax+b)$, odpovídá v rozkladu racionální lomené funkce tomuto činiteli zlomek

$$\frac{A}{(ax+b)},$$

kde A je nějaká vhodná reálná konstanta.
3. Je-li v rozkladu jmenovatele výraz $(ax+b)^k$, $k = 2, 3, \dots,$ odpovídají v rozkladu racionální lomené funkce tomuto činiteli zlomky

$$\frac{A_1}{(ax+b)}, \frac{A_2}{(ax+b)^2}, \dots, \frac{A_k}{(ax+b)^k},$$

kde $A_1, A_2, \dots, A_k$ jsou nějaké vhodné reálné konstanty.

Rozklad na parciální zlomky.

1. Jmenovatel rozložíme na kořenové činitele.
2. Je-li v rozkladu jmenovatele výraz $(ax+b)$, odpovídá v rozkladu racionální lomené funkce tomuto činiteli zlomek
$$\frac{A}{(ax+b)},$$
kde A je nějaká vhodná reálná konstanta.
3. Je-li v rozkladu jmenovatele výraz $(ax+b)^k$, $k=2,3,\ldots,$ odpovídají v rozkladu racionální lomené funkce tomuto činiteli zlomky
$$\frac{A_1}{(ax+b)}, \frac{A_2}{(ax+b)^2}, \ldots, \frac{A_k}{(ax+b)^k},$$
kde $A_1, A_2, \ldots, A_k$ jsou nějaké vhodné reálné konstanty.

Rozklad na parciální zlomky.

1. Jmenovatel rozložíme na kořenové činitele.
2. Je-li v rozkladu jmenovatele výraz $(ax+b)$, odpovídá v rozkladu racionální lomené funkce tomuto činiteli zlomek
$$\frac{A}{(ax+b)},$$
kde A je nějaká vhodná reálná konstanta.
3. Je-li v rozkladu jmenovatele výraz $(ax+b)^k$, $k=2,3,\ldots,$ odpovídají v rozkladu racionální lomené funkce tomuto činiteli zlomky
$$\frac{A_1}{(ax+b)}, \frac{A_2}{(ax+b)^2}, \ldots, \frac{A_k}{(ax+b)^k},$$
kde $A_1, A_2, \ldots, A_k$ jsou nějaké vhodné reálné konstanty.

Rozklad na parciální zlomky.

1. Jmenovatel rozložíme na kořenové činitele.
2. Je-li v rozkladu jmenovatele výraz $(ax+b)$, odpovídá v rozkladu racionální lomené funkce tomuto činiteli zlomek
$$\frac{A}{(ax+b)},$$
kde A je nějaká vhodná reálná konstanta.
3. Je-li v rozkladu jmenovatele výraz $(ax+b)^k$, $k=2,3,\ldots,$ odpovídají v rozkladu racionální lomené funkce tomuto činiteli zlomky
$$\frac{A_1}{(ax+b)},\ \frac{A_2}{(ax+b)^2},\ldots,\frac{A_k}{(ax+b)^k},$$
kde $A_1,\ A_2,\ldots,A_k$ jsou nějaké vhodné reálné konstanty.

Rozklad na parciální zlomky.

4. Je-li v rozkladu jmenovatele výraz $(a\,x^2 + b\,x + c)$, odpovídá v rozkladu racionální lomené funkce tomuto činiteli zlomek
$$\frac{A\,x + B}{(a\,x^2 + b\,x + c)},$$
kde $A,\ B$ jsou nějaké vhodné reálné konstanty.

5. Je-li v rozkladu jmenovatele výraz $(a\,x^2 + b\,x + c)^k$, $k = 2, 3, \ldots,$ odpovídají v rozkladu racionální lomené funkce tomuto činiteli zlomky
$$\frac{A_1 x + B_1}{(a\,x^2 + b\,x + c)}, \frac{A_2 x + B_2}{(a\,x^2 + b\,x + c)^2}, \ldots, \frac{A_k x + B_k}{(a\,x^2 + b\,x + c)^k},$$
kde $A_1,\ B_1, , \ldots, A_k,\ B_k$ jsou nějaké vhodné reálné konstanty.

Rozklad na parciální zlomky.

4. Je-li v rozkladu jmenovatele výraz $(a\,x^2 + b\,x + c)$, odpovídá v rozkladu racionální lomené funkce tomuto činiteli zlomek
$$\frac{A\,x + B}{(a\,x^2 + b\,x + c)},$$
kde A, B jsou nějaké vhodné reálné konstanty.

5. Je-li v rozkladu jmenovatele výraz $(a\,x^2 + b\,x + c)^k$, $k = 2, 3, \ldots,$ odpovídají v rozkladu racionální lomené funkce tomuto činiteli zlomky
$$\frac{A_1 x + B_1}{(a\,x^2 + b\,x + c)}, \frac{A_2 x + B_2}{(a\,x^2 + b\,x + c)^2}, \ldots, \frac{A_k x + B_k}{(a\,x^2 + b\,x + c)^k},$$
kde A_1, $B_1, \ldots, A_k$, B_k jsou nějaké vhodné reálné konstanty.

Rozklad na parciální zlomky.

4. Je-li v rozkladu jmenovatele výraz $(a\,x^2 + b\,x + c)$, odpovídá v rozkladu racionální lomené funkce tomuto činiteli zlomek
$$\frac{A\,x + B}{(a\,x^2 + b\,x + c)},$$
kde A, B jsou nějaké vhodné reálné konstanty.

5. Je-li v rozkladu jmenovatele výraz $(a\,x^2 + b\,x + c)^k$, $k = 2, 3, \dots,$ odpovídají v rozkladu racionální lomené funkce tomuto činiteli zlomky
$$\frac{A_1 x + B_1}{(a\,x^2 + b\,x + c)}, \frac{A_2 x + B_2}{(a\,x^2 + b\,x + c)^2}, \dots, \frac{A_k x + B_k}{(a\,x^2 + b\,x + c)^k},$$
kde A_1, $B_1, , \dots, A_k$, B_k jsou nějaké vhodné reálné konstanty.

Integrace racionálních lomených funkcí

Naučíme se integrovat racionálně lomené funkce, které se objevují v rozkladu ryze lomené racionální funkce na parciální zlomky:

$$\int \frac{A}{(a\,x+b)}\mathrm{d}x,\ \int \frac{A_k}{(a\,x+b)^k}\mathrm{d}x,\ \int \frac{A\,x+B}{(a\,x^2+b\,x+c)}\mathrm{d}x\,.$$

Integrace racionálních lomených funkcí

Naučíme se integrovat racionálně lomené funkce, které se objevují v rozkladu ryze lomené racionální funkce na parciální zlomky:

$$\int \frac{A}{(ax+b)}\mathrm{d}x, \ \int \frac{A_k}{(ax+b)^k}\mathrm{d}x, \ \int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)}\mathrm{d}x\,.$$