Kapitola 7: Integrál.

Neurčitý integrál.
Definice: Nechť f je funkce definovaná na intervalu I. Funkci F definovanou na intervalu I, pro kterou platí

$$F'(x) = f(x)\ \forall\, x \in I$$

nazýváme *primitivní funkcí k funkci f na intervalu I.*

Poznámka: Je-li F primitivní funkce k funkci f na intervalu I a $G(x) = F(x)+c$ pro $x \in I$, kde c je konstanta, je G také primitivní funkce k funkci f na intervalu I.
Definice: Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I nazýváme *neurčitý integrál* k funkci f na intervalu I a označujeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c;\ c \in \mathbb{R},\ F \text{ je primitivni funkcí k } f \text{ na } I\}.$$

Úmluva: Nebudeme rozlišovat mezi primitivní funkcí a neurčitým integrálem.

Existence primitivní funkce.
Věta: O existenci primitivní funkce Nechť funkce f je spojitá na intervalu I, potom f má na intervalu I primitivní funkci. **Poznámka:** Existují funkce, které podle předchozí věty mají primitivní funkci, my ji ale neumíme nalézt pomoci známých funkcí. Můžeme ji tedy definovat pomoci integrálu. Např.:

$$\int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x,\ \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \ldots$$

Tabulka primitivních funkcích.

$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\quad n \in \mathbb{R},\ n \neq -1$

$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x|$

$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x$

$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x$

$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}$ $\quad a > 0,\ a \neq 1$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\mathrm{cotg}\, x$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}|$ $\quad a \neq 0$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)|$

Vlastnosti integrálů

Věta: Platí

(i) $\displaystyle\int k\, f(x) \,\mathrm{d}x = k \int f(x) \,\mathrm{d}x$, kde k je konstanta.

(ii) $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x)) \,\mathrm{d}x = \int f(x) \,\mathrm{d}x \pm \int g(x) \,\mathrm{d}x$

Metody výpočtů neurčitých integrálů.

Metoda per partes.

Věta: Nechť funkce u a v mají v intervalu I spojité derivace. Potom v intervalu I platí

$$\int u(x)\, v'(x) \,\mathrm{d}x = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x) \,\mathrm{d}x\,.$$

Metoda substituční

Věta: Nechť funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu (a, b) a nechť funkce $t = \varphi(x)$ má spojitou první derivaci v intervalu (α, β) a zobrazuje interval (α, β) na interval (a, b).

(i) Pak
$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) = F(\varphi(x)),$$
kde F je primitivní funkce k f na (a, b).

(ii) Nechť navíc $\forall x \in (\alpha, \beta) : \ \varphi'(x) \neq 0$. Pak
$$\int f(t)\,dt = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(x) = F(\varphi^{-1}(t)),$$
kde F je primitivní funkce k $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ na (α, β).

$t = \varphi(x)$ je použitá substituce

Integrace racionálních lomených funkcí

- dělení polynomů
- rozklad polynomu na součin kořenových činitelů
- rozklad ryze lomených racionálních funkcí na součet parciálních zlomků
- integrace parciálních zlomků

Rozklad polynomu v kořenové činitele.

Připomeňme tvar polynomu:
$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,,$$
kde $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ jsou koeficienty a $a_n \neq 0$. $P_0(x) = a_0$ je polynom nultého stupně. *Kořenem polynomu* $P_n(x)$ pro $n \geq 1$ rozumíme číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ takové, že $P_n(\alpha) = 0$.

Věta: Je-li číslo α kořenem polynomu $P_n(x)$, potom

$$P_n(x) = (x-\alpha)Q(x)\,,$$

kde $Q(x)$ je polynom $(n-1)$-ního stupně.
Definice: α je *k-násobným kořenem polynomu* $P(x)$, jestliže

$$P(x) = (x-\alpha)^k Q(x),$$

$Q(x)$ je polynom, $Q(\alpha) \neq 0$.

Rozklad polynomu v kořenové činitele (2).
Poznámka: α je k-násobným kořenem polynomu $P(x) \Leftrightarrow$

$$P(\alpha) = 0,\ P'(\alpha) = 0, \ldots, P^{k-1}(\alpha) = 0 \text{ a } P^k(\alpha) \neq 0.$$

Věta: Má-li polynom $P_n(x)$ dva komplexně sdružené kořeny $a \pm \mathrm{i}b$, potom

$$P_n(x) = (x^2 + p\,x + q)Q(x)\,,$$

kde $Q(x)$ je polynom $(n-2)$-hého stupně a kořeny $a \pm \mathrm{i}b$ jsou kořeny polynomu $x^2 + p\,x + q$.
Věta: Každý polynom n-tého stupně má právě n kořenů, přitom každý kořen počítáme s jeho násobností (některé kořeny mohou být komplexní).

Racionálně lomené funkce.
Definice: Funkce tvaru $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy, nazýváme *racionální lomenou funkcí*. Je-li stupeň $P(x)$ menší než stupeň $Q(x)$ nazýváme funkci *ryze lomenou racionální funkcí*. Je-li stupeň $P(x)$ větší než stupeň $Q(x)$ nazýváme funkci *neryze lomenou racionální funkcí*.
Věta: Každá racionální lomená funkce je součtem polynomu a ryze lomené racionální funkce.
Poznámka: Polynom umíme integrovat. Musíme se naučit integrovat ryze lomenou racionální funkci. *Ryze lomenou racionální funkci musíme rozložit na parciální zlomky*.

Rozklad na parciální zlomky.

1. Jmenovatel rozložíme na kořenové činitele.
2. Je-li v rozkladu jmenovatele výraz $(a\,x+b)$, odpovídá v rozkladu racionální lomené funkce tomuto činiteli zlomek
$$\frac{A}{(a\,x+b)}\,,$$
kde A je nějaká vhodná reálná konstanta.
3. Je-li v rozkladu jmenovatele výraz $(a\,x+b)^k$, $k=2,3,\ldots$, odpovídají v rozkladu racionální lomené funkce tomuto činiteli zlomky
$$\frac{A_1}{(a\,x+b)},\ \frac{A_2}{(a\,x+b)^2},\ldots,\frac{A_k}{(a\,x+b)^k}\,,$$
kde $A_1,\ A_2,\ldots,A_k$ jsou nějaké vhodné reálné konstanty.

Rozklad na parciální zlomky.

4. Je-li v rozkladu jmenovatele výraz $(a\,x^2+b\,x+c)$, odpovídá v rozkladu racionální lomené funkce tomuto činiteli zlomek
$$\frac{A\,x+B}{(a\,x^2+b\,x+c)}\,,$$
kde $A,\ B$ jsou nějaké vhodné reálné konstanty.
5. Je-li v rozkladu jmenovatele výraz $(a\,x^2+b\,x+c)^k$, $k=2,3,\ldots$, odpovídají v rozkladu racionální lomené funkce tomuto činiteli zlomky
$$\frac{A_1x+B_1}{(a\,x^2+b\,x+c)},\ \frac{A_2x+B_2}{(a\,x^2+b\,x+c)^2},\ldots,\frac{A_kx+B_k}{(a\,x^2+b\,x+c)^k}\,,$$
kde $A_1,\ B_1,,\ldots,A_k,\ B_k$ jsou nějaké vhodné reálné konstanty.

Integrace racionálních lomených funkcí

Naučíme se integrovat racionálně lomené funkce, které se objevují v rozkladu ryze lomené racionální funkce na parciální zlomky:
$$\int\frac{A}{(a\,x+b)}dx,\ \int\frac{A_k}{(a\,x+b)^k}dx,\ \int\frac{A\,x+B}{(a\,x^2+b\,x+c)}dx\,.$$