Kapitola 8: Určitý integrál.

Určitý integrál (1)

Definice: Nechť $f(x)$ je funkce definovaná na intervalu I a $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ na I. Nechť $a, b \in I$. Potom určitým integrálem funkce f od a do b rozumíme číslo $F(b) - F(a)$ a píšeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

a - dolní integrační mez
b - horní integrační mez

značení: $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Určitý integrál (2)

Poznámka:

(i) Hodnota určitého integrálu nezávisí na volbě primitivní funkce.

(ii) Je-li $f(x)$ spojitá funkce na intervalu I a $x_0 \in I$, pak primitivní funkci $G(x)$ k funkci $f(x)$ na I můžeme zapsat ve tvaru

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in I.$$

Pro $G(x)$ navíc platí, že $G(x_0) = 0$.

Určitý integrál (2)

Poznámka:

(i) Hodnota určitého integrálu nezávisí na volbě primitivní funkce.

(ii) Je-li $f(x)$ spojitá funkce na intervalu I a $x_0 \in I$, pak primitivní funkci $G(x)$ k funkci $f(x)$ na I můžeme zapsat ve tvaru

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in I.$$

Pro $G(x)$ navíc platí, že $G(x_0) = 0$.

Vlastnosti

Věta: Platí:

(i) $$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(ii) $$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

(iii) $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad c \in (a, b)$$

(iv) $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Vlastnosti

Věta: Platí:

(i) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

(ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\pm g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

(iii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad c\in(a,b)$

(iv) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

Vlastnosti

Věta: Platí:

(i) $$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(ii) $$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

(iii) $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad c \in (a,b)$$

(iv) $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Geometrický význam

Věta: Nechť f je spojitá nezáporná funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom obrazec ohraničený grafem funkce f, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$, má plošný obsah

$$P = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Poznámka: Nechť f je spojitá záporná funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom

$$P = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta: Nechť f, g jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť platí $\forall x \in \langle a, b\rangle : \; g(x) \leq f(x)$. Potom plošný obsah obrazce, který je ohraničen grafy funkcí f a g, a přímkami $x = a$, $x = b$, je dán předpisem

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x\,.$$

Geometrický význam

Věta: Nechť f je spojitá nezáporná funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom obrazec ohraničený grafem funkce f, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$, má plošný obsah

$$P = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Poznámka: Nechť f je spojitá záporná funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom

$$P = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta: Nechť f, g jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť platí $\forall x \in \langle a, b\rangle : \; g(x) \leq f(x)$. Potom plošný obsah obrazce, který je ohraničen grafy funkcí f a g, a přímkami $x = a$, $x = b$, je dán předpisem

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x\,.$$

Geometrický význam

Věta: Nechť f je spojitá nezáporná funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom obrazec ohraničený grafem funkce f, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$, má plošný obsah

$$P = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Poznámka: Nechť f je spojitá záporná funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom

$$P = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta: Nechť f, g jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť platí $\forall x \in \langle a, b\rangle : \; g(x) \le f(x)$. Potom plošný obsah obrazce, který je ohraničen grafy funkcí f a g, a přímkami $x = a$, $x = b$, je dán předpisem

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x\,.$$

Metody výpočtu

Věta: Metoda per partes

Mají-li funkce $u(x)$ a $v(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojité derivace, pak

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,.$$

Věta: Substituční metoda

Je-li funkce $f(t)$ spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a funkce $t = \varphi(x)$ má spojitou derivaci na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ a zobrazuje interval $\langle \alpha, \beta\rangle$ na interval $\langle a, b\rangle$ tak, že $\varphi(\alpha) = a$ a $\varphi(\beta) = b$, potom

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

Metody výpočtu

Věta: Metoda per partes
Mají-li funkce $u(x)$ a $v(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojité derivace, pak

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,.$$

Věta: Substituční metoda
Je-li funkce $f(t)$ spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a funkce $t = \varphi(x)$ má spojitou derivaci na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ a zobrazuje interval $\langle \alpha, \beta\rangle$ na interval $\langle a, b\rangle$ tak, že $\varphi(\alpha) = a$ a $\varphi(\beta) = b$, potom

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

Metody výpočtu

Věta: Metoda per partes
Mají-li funkce $u(x)$ a $v(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojité derivace, pak

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,.$$

Věta: Substituční metoda
Je-li funkce $f(t)$ spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a funkce $t = \varphi(x)$ má spojitou derivaci na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ a zobrazuje interval $\langle \alpha, \beta\rangle$ na interval $\langle a, b\rangle$ tak, že $\varphi(\alpha) = a$ a $\varphi(\beta) = b$, potom

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

Nevlastní integrály

Definice: Nechť funkce $f(x)$ je definovaná a spojitá na otevřeném intervalu (a, b) (a může být $-\infty$ a b může být ∞). Nechť $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu (a, b), potom integrálem

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

rozumíme číslo

$$[F(x)]_a^b = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x),$$

pokud obě limity existují a jsou konečné.

V tomto případě říkáme, že integrál konverguje.
V opačném případě integrál diverguje.

Nevlastní integrály

Definice: Nechť funkce $f(x)$ je definovaná a spojitá na otevřeném intervalu (a, b) (a může být $-\infty$ a b může být ∞). Nechť $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu (a, b), potom integrálem

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

rozumíme číslo

$$[F(x)]_a^b = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x),$$

pokud obě limity existují a jsou konečné.

V tomto případě říkáme, že integrál konverguje.
V opačném případě integrál diverguje.

Nevlastní integrály

Definice: Nechť funkce $f(x)$ je definovaná a spojitá na otevřeném intervalu (a, b) (a může být $-\infty$ a b může být ∞). Nechť $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu (a, b), potom integrálem

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

rozumíme číslo

$$[F(x)]_a^b = \lim_{x \to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x),$$

pokud obě limity existují a jsou konečné.

V tomto případě říkáme, že integrál konverguje.
V opačném případě integrál diverguje.

Nevlastní integrály

Definice: Nechť funkce $f(x)$ je definovaná a spojitá na otevřeném intervalu (a, b) (a může být $-\infty$ a b může být ∞). Nechť $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu (a, b), potom integrálem

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

rozumíme číslo

$$[F(x)]_a^b = \lim_{x \to b-} F(x) \; - \; \lim_{x \to a+} F(x),$$

pokud obě limity existují a jsou konečné.

V tomto případě říkáme, že integrál konverguje.
V opačném případě integrál diverguje.

Numerická integrace

Věta: Lichoběžníková metoda
Nechť funkce $f(x)$ je definovaná a spojitá na $\langle a, b\rangle$. Rozdělme interval $\langle a, b\rangle$ na n stejných dílků dělícími body $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Označme $h = \frac{b-a}{n}$ velikost jednoho dílku, tzv. krok dělení a $f(x_i) = y_i$ pro $i = 0, 1, \ldots n$. Potom

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \doteq \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right).$$

Věta: Lichoběžníková metoda
Nechť funkce $f(x)$ je definovaná a spojitá na $\langle a, b\rangle$. Rozdělme interval $\langle a, b\rangle$ na n stejných dílků dělícími body $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Označme $h = \frac{b-a}{n}$ velikost jednoho dílku, tzv. krok dělení a $f(x_i) = y_i$ pro $i = 0, 1, \ldots n$. Potom

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \doteq \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right).$$