

## Kapitola 8: Určitý integrál.

### Určitý integrál (1)

**Definice:** Necht'  $f(x)$  je funkce definovaná na intervalu  $I$  a  $F(x)$  je primitivní funkce k funkci  $f(x)$  na  $I$ . Necht'  $a, b \in I$ . Potom *určitým integrálem funkce  $f$  od  $a$  do  $b$*  rozumíme číslo  $F(b) - F(a)$  a píšeme

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

$a$  - dolní integrační mez  $b$  - horní integrační mez

značení:  $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

### Určitý integrál (2)

#### Poznámka:

- (i) Hodnota určitého integrálu nezávisí na volbě primitivní funkce.
- (ii) Je-li  $f(x)$  spojitá funkce na intervalu  $I$  a  $x_0 \in I$ , pak primitivní funkci  $G(x)$  k funkci  $f(x)$  na  $I$  můžeme zapsat ve tvaru

$$G(x) = \int_{x_0}^x f(t) \, dt, \quad x \in I.$$

Pro  $G(x)$  navíc platí, že  $G(x_0) = 0$ .

### Vlastnosti

#### Věta: Platí:

- (i)  $\int_a^b k f(x) \, dx = k \int_a^b f(x) \, dx$
- (ii)  $\int_a^b f(x) \pm g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx$
- (iii)  $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx, \quad c \in (a, b)$
- (iv)  $\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$

### Geometrický význam

**Věta:** Necht'  $f$  je *spojitá nezáporná* funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Potom obrazec ohraničený grafem funkce  $f$ , osou  $x$  a přímkami  $x = a$ ,  $x = b$ , má plošný obsah

$$P = \int_a^b f(x) \, dx.$$

**Poznámka:** Necht'  $f$  je *spojitá záporná* funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Potom

$$P = - \int_a^b f(x) \, dx.$$

**Věta:** Necht'  $f, g$  jsou *spojité* funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a necht' platí  $\forall x \in \langle a, b \rangle : g(x) \leq f(x)$ . Potom plošný obsah obrazce, který je ohraničen grafy funkcí  $f$  a  $g$ , a přímkami  $x = a$ ,  $x = b$ , je dán předpisem

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx.$$

### Metody výpočtu

**Věta: Metoda per partes** Mají-li funkce  $u(x)$  a  $v(x)$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  spojitě derivace, pak

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

**Věta: Substituční metoda** Je-li funkce  $f(t)$  spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a funkce  $t = \varphi(x)$  má spojitou derivaci na intervalu  $\langle \alpha, \beta \rangle$  a zobrazuje interval  $\langle \alpha, \beta \rangle$  na interval  $\langle a, b \rangle$  tak, že  $\varphi(\alpha) = a$  a  $\varphi(\beta) = b$ , potom

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x) \, dx = \int_a^b f(t) \, dt$$

$$\int_a^b f(t) \, dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x) \, dx$$

### Nevlastní integrály

**Definice:** Necht' funkce  $f(x)$  je definovaná a spojitá na otevřeném intervalu  $(a, b)$  ( $a$  může být  $-\infty$  a  $b$  může být  $\infty$ ). Necht'  $F(x)$  je primitivní funkce k funkci  $f(x)$  na intervalu  $(a, b)$ , potom integrálem

$$\int_a^b f(x)dx$$

rozumíme číslo

$$[F(x)]_a^b = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x),$$

pokud obě limity existují a jsou konečné. [2mm] V tomto případě říkáme, že *integrál konverguje*. V opačném případě *integrál diverguje*.

### Numerická integrace

**Věta: Lichoběžníková metoda** Necht' funkce  $f(x)$  je definovaná a spojitá na  $\langle a, b \rangle$ . Rozdělme interval  $\langle a, b \rangle$  na  $n$  stejných dílků dělicími body  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Označme  $h = \frac{b-a}{n}$  velikost jednoho dílku, tzv. krok dělení a  $f(x_i) = y_i$  pro  $i = 0, 1, \dots, n$ . Potom

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n).$$