Kapitola 9: Aplikace integrálů funkcí jedné proměnné

Riemannova definice určitého integrálu (1)

Definice: Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$.
Rozdělme $\langle a, b\rangle$ na n stejných dílků dělícími body

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \text{ , t.j.}$$

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n},\ i = 0, 1, \ldots, n, \qquad x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

V každém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ zvolme libovolný bod c_i, t.j.
$c_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Pak součet

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(c_n)(x_n - x_{n-1})$$

nazýváme Riemannovým integrálním součtem.

Věta: Je-li f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak $\lim_{n\to\infty} S_n(f)$ existuje a její hodnota nezávisí na volbě bodů $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, \ldots, n$.

Riemannova definice určitého integrálu (1)

Definice: Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$.
Rozdělme $\langle a, b\rangle$ na n stejných dílků dělícími body

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \text{ , t.j.}$$

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n},\ i = 0, 1, \ldots, n, \qquad x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

V každém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ zvolme libovolný bod c_i, t.j.
$c_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Pak součet

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(c_n)(x_n - x_{n-1})$$

nazýváme Riemannovým integrálním součtem.

Věta: Je-li f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f)$ existuje a její hodnota nezávisí na volbě bodů $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, \ldots, n$.

Riemannova definice určitého integrálu (2)

Definice: Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$.
Riemannovým integrálem funkce f od a do b rozumíme

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S_n(f).$$

Připomenutí: Pro spojité funkce f na $\langle a, b\rangle$ jsme již zavedli
Newtonův určitý integrál

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Věta: Je-li f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak existují
$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a $(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a jejich hodnoty jsou stejné.
Tedy platí:

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Riemannova definice určitého integrálu (2)

Definice: Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$.
Riemannovým integrálem funkce f od a do b rozumíme

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S_n(f).$$

Připomenutí: Pro spojité funkce f na $\langle a, b\rangle$ jsme již zavedli
Newtonův určitý integrál

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Věta: Je-li f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak existují
$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a $(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a jejich hodnoty jsou stejné.
Tedy platí:

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Riemannova definice určitého integrálu (2)

Definice: Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$.
Riemannovým integrálem funkce f od a do b rozumíme

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S_n(f).$$

Připomenutí: Pro spojité funkce f na $\langle a, b\rangle$ jsme již zavedli
Newtonův určitý integrál

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Věta: Je-li f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak existují
$(\mathcal{R}) \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a $(\mathcal{N}) \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a jejich hodnoty jsou stejné.
Tedy platí:

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Geometrické aplikace

- Plocha ohraničená grafy funkcí
- Délka křivky zadané parametrickými rovnicemi
  $x = g(t),\ y = f(t),\quad t \in \langle a, b \rangle$:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{(g'(t))^2 + (f'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

- Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené grafem spojité nezáporné funkce f definované na $\langle a, b \rangle$, přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ kolem osy x:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Geometrické aplikace

- Plocha ohraničená grafy funkcí

- Délka křivky zadané parametrickými rovnicemi $x = g(t),\ y = f(t), \quad t \in \langle a, b\rangle$:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{(g'(t))^2 + (f'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

- Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené grafem spojité nezáporné funkce f definované na $\langle a, b\rangle$, přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ kolem osy x:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Geometrické aplikace

- Plocha ohraničená grafy funkcí
- Délka křivky zadané parametrickými rovnicemi
  $x = g(t),\ y = f(t), \quad t \in \langle a, b \rangle$:
  $$\ell = \int_a^b \sqrt{(g'(t))^2 + (f'(t))^2}\, \mathrm{d}t$$
- Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené grafem spojité nezáporné funkce f definované na $\langle a, b \rangle$, přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ kolem osy x:
  $$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x$$

Fyzikální aplikace

- práce W nekonstantní síly $\overrightarrow{F}$ působící po úsečce $\overline{AB}$, $A = [a, 0]$, $B = [b, 0]$

$$W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$$

- práce W plynu uzavřeného ve válci pod pístem při přemístění pístu z polohy $x = a$ do polohy $x = b$ za předpokladu, že tlak p plynu závisí na objemu V plynu ve válci

$$W = \int_{V_a}^{V_b} p(V)\,\mathrm{d}V$$

Fyzikální aplikace

- práce W nekonstantní síly $\overrightarrow{F}$ působící po úsečce $\overline{AB}$, $A = [a, 0]$, $B = [b, 0]$

$$W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$$

- práce W plynu uzavřeného ve válci pod pístem při přemístění pístu z polohy $x = a$ do polohy $x = b$ za předpokladu, že tlak p plynu závisí na objemu V plynu ve válci

$$W = \int_{V_a}^{V_b} p(V)\,\mathrm{d}V$$

Věta o střední hodnotě integrálního počtu

Definice: Střední hodnotu spojité funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ definujeme jako

$$\mathrm{prm}\{f(x), x \in \langle a, b\rangle\} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Věta: Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak

$$\exists\ c \in (a, b): \quad f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Věta o střední hodnotě integrálního počtu

Definice: Střední hodnotu spojité funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ definujeme jako

$$\mathrm{prm}\{f(x), x \in \langle a, b\rangle\} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Věta: Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak

$$\exists\, c \in (a, b): \quad f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Věta o střední hodnotě integrálního počtu

Definice: Střední hodnotu spojité funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ definujeme jako

$$\mathrm{prm}\{f(x), x \in \langle a, b\rangle\} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Věta: Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak

$$\exists\ c \in (a, b): \quad f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$