

## Kapitola 9: Aplikace integrálů funkcí jedné proměnné

### Riemannova definice určitého integrálu (1)

**Definice:** Necht' funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Rozdělme  $\langle a, b \rangle$  na  $n$  stejných dílků dělicími body

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, \text{ t.j.}$$

$$x_i = a + i \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

V každém intervalu  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$  zvolme libovolný bod  $c_i$ , t.j.  $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ . Pak součet

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_1)(x_1 - x_0) + \dots + f(c_n)(x_n - x_{n-1})$$

nazýváme *Riemannovým integrálním součtem*.

**Věta:** Je-li  $f$  spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)$  existuje a její hodnota nezávisí na volbě bodů  $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

### Riemannova definice určitého integrálu (2)

**Definice:** Necht' funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . *Riemannovým integrálem* funkce  $f$  od  $a$  do  $b$  rozumíme

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f).$$

**Připomenutí:** Pro spojité funkce  $f$  na  $\langle a, b \rangle$  jsme již zavedli *Newtonův určitý integrál*

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**Věta:** Je-li  $f$  spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , pak existují  $(\mathcal{R}) \int_a^b f(x) dx$  a  $(\mathcal{N}) \int_a^b f(x) dx$  a jejich hodnoty jsou stejné. Tedy platí:

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x) dx = (\mathcal{N}) \int_a^b f(x) dx.$$

## Geometrické aplikace

- Plocha ohraničená grafy funkcí
- Délka křivky zadané parametrickými rovnicemi  $x = g(t)$ ,  $y = f(t)$ ,  $t \in \langle a, b \rangle$ :

$$\ell = \int_a^b \sqrt{(g'(t))^2 + (f'(t))^2} dt$$

- Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené grafem spojitě nezáporné funkce  $f$  definované na  $\langle a, b \rangle$ , přímkami  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$  kolem osy  $x$ :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

## Fyzikální aplikace

- práce  $W$  nekonzstantní síly  $\vec{F}$  působící po úsečce  $\overline{AB}$ ,  $A = [a, 0]$ ,  $B = [b, 0]$

$$W = \int_a^b F(x) dx$$

- práce  $W$  plynu uzavřeného ve válci pod pístem při přemístění pístu z polohy  $x = a$  do polohy  $x = b$  za předpokladu, že tlak  $p$  plynu závisí na objemu  $V$  plynu ve válci

$$W = \int_{V_a}^{V_b} p(V) dV$$

## Věta o střední hodnotě integrálního počtu

**Definice:** Střední hodnotu spojitě funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  definujeme jako

$$\text{prm}\{f(x), x \in \langle a, b \rangle\} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

**Věta:** Je-li funkce  $f$  spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , pak

$$\exists c \in (a, b) : f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$