Kapitola 1: Euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$ - opakovaní některých pojmů

Euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R}\ i = 1, 2, \ldots, n\}$
$\mathbb{R}^n$ - množina bodů $A \in \mathbb{R}^n$
- množina vektorů $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

Definice: Jsou-li $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, pak euklidovskou vzdáleností bodů A, B rozumíme číslo

$$\rho(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}.$$

Věta: Pro libovolné body $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ platí

(i) $\rho(A, B) \geq 0;\ \rho(A, B) = 0 \iff A = B$
(ii) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$
(iii) $\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C)$.

Poznámka: Každé zobrazení $\rho(A, B)$, kde $A, B \in M$, které splňuje tyto vlastnosti se nazývá metrika na množině M.

Euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R}\ i = 1, 2, \dots, n\}$
$\mathbb{R}^n$ - množina bodů $A \in \mathbb{R}^n$
- množina vektorů $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

Definice: Jsou-li $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, pak euklidovskou vzdáleností bodů A, B rozumíme číslo

$$\rho(A, B) \ = \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}.$$

Věta: Pro libovolné body $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ platí

(i) $\rho(A, B) \geq 0$; $\rho(A, B) = 0 \ \Leftrightarrow \ A = B$
(ii) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$
(iii) $\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C)$.

Poznámka: Každé zobrazení $\rho(A, B)$, kde $A, B \in M$, které splňuje tyto vlastnosti se nazývá metrika na množině M.

Euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R}\ i = 1, 2, \ldots, n\}$
$\mathbb{R}^n$ - množina bodů $A \in \mathbb{R}^n$
- množina vektorů $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

Definice: Jsou-li $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, pak euklidovskou vzdáleností bodů A, B rozumíme číslo

$$\rho(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}.$$

Věta: Pro libovolné body $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ platí

(i) $\rho(A, B) \geq 0;\ \rho(A, B) = 0 \iff A = B$
(ii) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$
(iii) $\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C)$.

Poznámka: Každé zobrazení $\rho(A, B)$, kde $A, B \in M$, které splňuje tyto vlastnosti se nazývá metrika na množině M.

Euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R}\ i = 1, 2, \ldots, n\}$
$\mathbb{R}^n$ - množina bodů $A \in \mathbb{R}^n$
- množina vektorů $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

Definice: Jsou-li $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, pak euklidovskou vzdáleností bodů A, B rozumíme číslo

$$\rho(A, B) \ = \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}.$$

Věta: Pro libovolné body $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ platí

(i) $\rho(A, B) \geq 0;\ \rho(A, B) = 0 \ \Leftrightarrow\ A = B$
(ii) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$
(iii) $\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C)$.

Poznámka: Každé zobrazení $\rho(A, B)$, kde $A, B \in M$, které splňuje tyto vlastnosti se nazývá metrika na množině M.

Skalární součin $\mathbb{R}^n$

Definice: Skalárním součinem vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ rozumíme číslo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Věta: Pro libovolné dva vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

(ii) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

(iii) $(\alpha\, \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha\, (\vec{u} \cdot \vec{v})$

(iv) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ a $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{o}$.

Skalární součin $\mathbb{R}^n$

Definice: Skalárním součinem vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ rozumíme číslo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Věta: Pro libovolné dva vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

(ii) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

(iii) $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$

(iv) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ a $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{o}$.

Norma na $\mathbb{R}^n$

Definice: Euklidovskou normou vektoru $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ rozumíme číslo

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

Poznámka: Jestliže $\vec{v} = B - A$, potom $\|\vec{v}\| = \rho(A, B)$.

Věta: Pro libovolné dva vektory $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

(i) $\|\vec{v}\| \geq 0,\ \|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{o}$, kde $\vec{o} = (0, \ldots, 0)$

(ii) $\|\alpha\,\vec{v}\| = |\alpha|\|\vec{v}\|$

(iii) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ - trojúhelníková nerovnost

(iv) $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ - Cauchy-Schwarzova nerovnost.

Norma na $\mathbb{R}^n$

Definice: Euklidovskou normou vektoru $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ rozumíme číslo

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

Poznámka: Jestliže $\vec{v} = B - A$, potom $\|\vec{v}\| = \rho(A, B)$.

Věta: Pro libovolné dva vektory $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

(i) $\|\vec{v}\| \geq 0,\ \|\vec{v}\| = 0 \ \Leftrightarrow\ \vec{v} = \vec{o}$, kde $\vec{o} = (0, \dots, 0)$

(ii) $\|\alpha \vec{v}\| = |\alpha| \|\vec{v}\|$

(iii) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ - trojúhelníková nerovnost

(iv) $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$ - Cauchy-Schwarzova nerovnost.

Norma na $\mathbb{R}^n$

Definice: Euklidovskou normou vektoru $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ rozumíme číslo

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

Poznámka: Jestliže $\vec{v} = B - A$, potom $\|\vec{v}\| = \rho(A, B)$.

Věta: Pro libovolné dva vektory $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

(i) $\|\vec{v}\| \geq 0,\ \|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{o}$, kde $\vec{o} = (0, \dots, 0)$

(ii) $\|\alpha \vec{v}\| = |\alpha| \|\vec{v}\|$

(iii) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ - trojúhelníková nerovnost

(iv) $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$ - Cauchy-Schwarzova nerovnost.