Kapitola 10: Lineární zobrazení

Lineární zobrazení
Definice: Nechť U, V jsou lineární prostory. Zobrazení $L : U \to V$ nazýváme *lineární zobrazení*, jestliže platí

1. $L(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \;=\; L(\boldsymbol{u}) + L(\boldsymbol{v}) \qquad \forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$
2. $L(\alpha\, \boldsymbol{u}) \;=\; \alpha\, L(\boldsymbol{u}) \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ a $\boldsymbol{u} \in U$.

Poznámka: Jestliže $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k \in U$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ potom pro lineární zobrazení platí

$$L(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{u}_i) \;=\; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i L(\boldsymbol{u}_i).$$

Lineární zobrazení zobrazuje nulový prvek lineárního prostoru U na nulový prvek lineárního prostoru V, tj.

$$L(\boldsymbol{o}_U) \;=\; \boldsymbol{o}_V.$$

Lineární zobrazení, jádro lineárního zobrazení
Věta: Nechť U, V jsou lineární prostory a $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n \in U$ tvoří bázi prostoru U. Nechť $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \in V$, Pak existuje právě jedno lineární zobrazení $L : U \to V$ takové, že

$$L(\boldsymbol{u}_i) \;=\; \boldsymbol{v}_i \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n.$$

Definice: Nechť $L : U \to V$ je lineární zobrazení. Množinu $\mathcal{N}(L) = \{\boldsymbol{u} \in U;\ L(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}\}$ nazýváme *jádrem lineárního zobrazení* L.[2mm]
Věta: Jádro lineárního zobrazení $L : U \to V$ je lineární podprostor prostoru U.

Lineární zobrazení $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$
Věta: Zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární právě tehdy, když existuje matice A taková, že

$$L(\vec{x}) \;=\; A\vec{x} \quad \text{pro } \forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Věta: Nechť $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je lineární zobrazení reprezentované maticí A typu (k, n). Nechť $K : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení reprezentované maticí B typu (m, k). Pak $K \circ L$ je lineární zobrazení reprezentované maticí $B \cdot A$.
Věta: Nechť $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení reprezentované maticí A typu (m, n). Potom

1. $\mathcal{N}(L) \;=\; \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n;\ A\vec{x} = \vec{o}\}$
2. L je prosté $\Leftrightarrow\ h(A) = n$
3. L je zobrazení na $\mathbb{R}^m$ (obor hodnot zobrazení L je celá $\mathbb{R}^m$) $\Leftrightarrow\ h(A) = m$.

Inverzní matice
Definice: Je-li A čtvercová matice řádu n. Pak *inverzní maticí k matici* A rozumíme matici A^{-1} (čtvercovou řádu n) pro kterou platí

$$A \cdot A^{-1} \;=\; A^{-1} \cdot A \;=\; E.$$

Věta: Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n. Pak inverzní matice k matici A existuje $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$. Inverzní matice je potom dána vztahem:

$$A^{-1} \;=\; \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^{\top},$$

kde A_{ij} je algebraický doplněk prvku a_{ij}, tj. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ a M_{ij} je determinant z matice, která vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Výpočet inverzní matice pomocí Gauss-Jordánovy metody

Řešíme-li soustavu $A\vec{x} = \vec{b}$ Gauss-Jordánovou metodou

$$(A|\vec{b}) \sim (E|\vec{x}).$$

Nyní řešíme rovnici $A \cdot A^{-1} = E$, označme i-tý sloupec matice A $\vec{x}_i$ a i-tý sloupec matice E označme $\vec{e}_i$. Musíme tedy řešit n soustav $A\vec{x}_i = \vec{e}_i$, tj.

$$(A|\vec{e}_i) \sim (E|\vec{x}_i) \text{ pro } \forall\, i = 1, \dots, n.$$

Můžeme úpravy dělat pro všechna i najednou

$$(A|E) \sim (E|A^{-1}).$$

Věta: Je-li A regulární, potom jediné řešení soustavy $A\,\vec{x} \;=\; \vec{b}$ je dáno vztahem

$$\vec{x} \;=\; A^{-1}\vec{b}.$$

Maticové rovnice

Maticové rovnice jsou rovnice ve kterých je neznámou nějaká matice X. Matici X vyjádříme z rovnice následujícími úpravami:

1. přičtení nějaké matice na obě strany rovnice
2. vynásobení obou stran rovnice regulární maticí zleva
3. vynásobení obou stran rovnice regulární maticí zprava
4. vynásobení rovnice nenulovým reálným číslem.

Předpokládáme, že násobení matic, které se v rovnicích vyskytuje má smysl (odpovídají řády matic).