Kapitola 11: Lineární diferenciální rovnice

Lineární diferenciální rovnice-LDR

Definice: Nechť $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), b(x)$ jsou spojité funkce na nějakém intervalu I, $a_0(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$. Rovnici

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y \;=\; b(x),$$

kde $y \in C^n(I)$ je hledaná funkce, nazýváme lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu (LDR n-tého řádu).

Je-li $b(x) = 0$ pro všechna $x \in I$ nazýváme rovnici homogenní LDR (HLDR).

Existuje-li $x \in I$ takové, že $b(x) \neq 0$ nazýváme rovnici nehomogenní LDR (NLDR).

Funkce $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ nazýváme koeficienty LDR.

Jestliže tyto funkce nezávisí na x (jsou konstantní) nazávame rovnici LDR s konstantními koeficienty.

Lineární diferenciální rovnice-LDR

Definice: Nechť $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), b(x)$ jsou spojité funkce na nějakém intervalu I, $a_0(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$. Rovnici

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y \;=\; b(x),$$

kde $y \in C^n(I)$ je hledaná funkce, nazýváme lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu (LDR n-tého řádu).

Je-li $b(x) = 0$ pro všechna $x \in I$ nazýváme rovnici homogenní LDR (HLDR).

Existuje-li $x \in I$ takové, že $b(x) \neq 0$ nazýváme rovnici nehomogenní LDR (NLDR).

Funkce $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ nazýváme koeficienty LDR.

Jestliže tyto funkce nezávisí na x (jsou konstantní) nazáváme rovnici LDR s konstantními koeficienty.

Lineární diferenciální rovnice-LDR

Definice: Nechť $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), b(x)$ jsou spojité funkce na nějakém intervalu I, $a_0(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$. Rovnici

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y \; = \; b(x),$$

kde $y \in C^n(I)$ je hledaná funkce, nazýváme lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu (LDR n-tého řádu).

Je-li $b(x) = 0$ pro všechna $x \in I$ nazýváme rovnici homogenní LDR (HLDR).

Existuje-li $x \in I$ takové, že $b(x) \neq 0$ nazýváme rovnici nehomogenní LDR (NLDR).

Funkce $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ nazýváme koeficienty LDR.

Jestliže tyto funkce nezávisí na x (jsou konstantní) nazáváme rovnici LDR s konstantními koeficienty.

Lineární diferenciální rovnice-LDR

Definice: Nechť $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), b(x)$ jsou spojité funkce na nějakém intervalu I, $a_0(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$. Rovnici

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y \;=\; b(x),$$

kde $y \in C^n(I)$ je hledaná funkce, nazýváme lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu (LDR n-tého řádu).

Je-li $b(x) = 0$ pro všechna $x \in I$ nazýváme rovnici homogenní LDR (HLDR).

Existuje-li $x \in I$ takové, že $b(x) \neq 0$ nazýváme rovnici nehomogenní LDR (NLDR).

Funkce $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ nazýváme koeficienty LDR.

Jestliže tyto funkce nezávisí na x (jsou konstantní) nazávame rovnici LDR s konstantními koeficienty.

Lineární diferenciální rovnice-LDR

Definice: Nechť $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), b(x)$ jsou spojité funkce na nějakém intervalu I, $a_0(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$. Rovnici

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y \;=\; b(x),$$

kde $y \in C^n(I)$ je hledaná funkce, nazýváme lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu (LDR n-tého řádu).

Je-li $b(x) = 0$ pro všechna $x \in I$ nazýváme rovnici homogenní LDR (HLDR).

Existuje-li $x \in I$ takové, že $b(x) \neq 0$ nazýváme rovnici nehomogenní LDR (NLDR).

Funkce $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ nazýváme koeficienty LDR.

Jestliže tyto funkce nezávisí na x (jsou konstantní) nazávame rovnici LDR s konstantními koeficienty.

Lineární diferenciální rovnice-LDR

Definice: Nechť $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), b(x)$ jsou spojité funkce na nějakém intervalu I, $a_0(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$. Rovnici

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y \;=\; b(x),$$

kde $y \in C^n(I)$ je hledaná funkce, nazýváme lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu (LDR n-tého řádu).

Je-li $b(x) = 0$ pro všechna $x \in I$ nazýváme rovnici homogenní LDR (HLDR).

Existuje-li $x \in I$ takové, že $b(x) \neq 0$ nazýváme rovnici nehomogenní LDR (NLDR).

Funkce $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ nazýváme koeficienty LDR.

Jestliže tyto funkce nezávisí na x (jsou konstantní) nazávame rovnici LDR s konstantními koeficienty.

Proč lineární?

Nechť $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x) \in C(I)$

Definujeme-li zobrazení $L: C^n(I) \to C(I)$ předpisem

$$L(y) = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y,$$

platí, že zobrazení L je lineární.

Nyní můžeme LDR zapsat

$$L\,y = b(x),$$

kde L je lineární zobrazení.

Proč lineární?

Nechť $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x) \in C(I)$

Definujeme-li zobrazení $L: \; C^n(I) \; \to \; C(I)$ předpisem

$$L(y) \;=\; a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y,$$

platí, že zobrazení L je lineární.

Nyní můžeme LDR zapsat

$$L\,y \;=\; b(x),$$

kde L je lineární zobrazení.

Proč lineární?

Nechť $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x) \in C(I)$

Definujeme-li zobrazení $L: \; C^n(I) \; \to \; C(I)$ předpisem

$$L(y) \; = \; a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y,$$

platí, že zobrazení L je lineární.

Nyní můžeme LDR zapsat

$$L\,y \; = \; b(x),$$

kde L je lineární zobrazení.

Věta o existenci a jednoznačnosti

Nechť $x_0 \in I$ a $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$.
Počáteční podmínky pro LDR n-tého řádu $Ly = b(x)$ jsou tvaru

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2, \dots, y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}.$$

Věta: Nechť $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), b(x) \in C(I)$ a $a_0(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$ a nechť $x_0 \in I$, potom pro libovolné $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno řešení $y \in C^n(I)$ diferenciální rovnice $Ly = b(x)$, které vyhovuje počátečním podmínkám
$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2, \dots, y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}.$

Věta o existenci a jednoznačnosti

Nechť $x_0 \in I$ a $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$.
Počáteční podmínky pro LDR n-tého řádu $Ly = b(x)$ jsou tvaru

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2, \ldots, y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}.$$

Věta: Nechť $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), b(x) \in C(I)$ a $a_0(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$ a nechť $x_0 \in I$, potom pro libovolné $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno řešení $y \in C^n(I)$ diferenciální rovnice $Ly = b(x)$, které vyhovuje počátečním podmínkám
$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2, \ldots, y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}.$

Věta o existenci a jednoznačnosti

Nechť $x_0 \in I$ a $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$.
Počáteční podmínky pro LDR n-tého řádu $Ly = b(x)$ jsou tvaru

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2, \ldots, y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}.$$

Věta: Nechť $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), b(x) \in C(I)$ a $a_0(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$ a nechť $x_0 \in I$, potom pro libovolné $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno řešení $y \in C^n(I)$ diferenciální rovnice $Ly = b(x)$, které vyhovuje počátečním podmínkám
$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2, \ldots, y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$.

LDR 1. a 2. řádu

Obecně platí, a_0, a_1, a_2 jsou funkce proměnné x:

$$a_0, a_1, a_2 \in C(I).$$

LDR 1. řádu:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y \;=\; b(x)$$

Počáteční podmínky: $y(x_0) = y_0$.
Řešení $y \in C^1(I)$.

LDR 2. řádu:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \;=\; b(x)$$

Počáteční podmínky: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.
Řešení $y \in C^2(I)$.

Nadále budeme pracovat jen s LDR 2. řádu. Všechny definice, věty a tvrzení budou podobně platit pro LDR n-tého řádu.

LDR 1. a 2. řádu

Obecně platí, a_0, a_1, a_2 jsou funkce proměnné x:

$$a_0, a_1, a_2 \in C(I).$$

LDR 1. řádu:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y \;=\; b(x)$$

Počáteční podmínky: $y(x_0) = y_0$.
Řešení $y \in C^1(I)$.

LDR 2. řádu:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \;=\; b(x)$$

Počáteční podmínky: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.
Řešení $y \in C^2(I)$.

Nadále budeme pracovat jen s LDR 2. řádu. Všechny definice, věty a tvrzení budou podobně platit pro LDR n-tého řádu.

LDR 1. a 2. řádu

Obecně platí, a_0, a_1, a_2 jsou funkce proměnné x:

$$a_0, a_1, a_2 \in C(I).$$

LDR 1. řádu:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y \; = \; b(x)$$

Počáteční podmínky: $y(x_0) = y_0$.
Řešení $y \in C^1(I)$.

LDR 2. řádu:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \; = \; b(x)$$

Počáteční podmínky: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.
Řešení $y \in C^2(I)$.

Nadále budeme pracovat jen s LDR 2. řádu. Všechny definice, věty a tvrzení budou podobně platit pro LDR n-tého řádu.

LDR 1. a 2. řádu

Obecně platí, a_0, a_1, a_2 jsou funkce proměnné x:

$$a_0, a_1, a_2 \in C(I).$$

LDR 1. řádu:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y \;=\; b(x)$$

Počáteční podmínky: $y(x_0) = y_0$.
Řešení $y \in C^1(I)$.

LDR 2. řádu:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \;=\; b(x)$$

Počáteční podmínky: $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1$.
Řešení $y \in C^2(I)$.

Nadále budeme pracovat jen s LDR 2. řádu. Všechny definice, věty a tvrzení budou podobně platit pro LDR n-tého řádu.

Obecně platí, a_0, a_1, a_2 jsou funkce proměnné x:

$$a_0, a_1, a_2 \in C(I).$$

LDR 1. řádu:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y \;=\; b(x)$$

Počáteční podmínky: $y(x_0) = y_0$.
Řešení $y \in C^1(I)$.

LDR 2. řádu:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \;=\; b(x)$$

Počáteční podmínky: $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1$.
Řešení $y \in C^2(I)$.

Nadále budeme pracovat jen s LDR 2. řádu. Všechny definice, věty a tvrzení budou podobně platit pro LDR n-tého řádu.

Homogenní LDR 2. řádu

$L: C^2(I) \to C(I)$

$L(y) = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$, L je lineární

HLDR 2. řádu: $Ly = 0$

Množinu všech řešeni HLDR označme V_H, potom můžeme psát

$$V_H = \{y \in C^2(I);\ Ly = 0\} = \mathcal{N}(L).$$

Protože L je lineární víme, že V_H je lineární podprostor $C^2(I)$.

Věta: Množina V_H je lineární podprostor $C^2(I)$ a platí $\dim V_H = 2$.

Definice: Bázi prostoru V_H názýváme fundamentální systém řešení HLDR

Je-li $y_1(x)$, $y_2(x)$ fundamentální systém řešeni HLDR 2. řádu potom obecné řešení je tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Homogenní LDR 2. řádu

$L: \; C^2(I) \;\to\; C(I)$

$L(y) \;=\; a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$, L je lineární

HLDR 2. řádu: $Ly \;=\; 0$

Množinu všech řešeni HLDR označme V_H, potom můžeme psát

$$V_H = \{y \in C^2(I);\; Ly = 0\} = \mathcal{N}(L).$$

Protože L je lineární víme, že V_H je lineární podprostor $C^2(I)$.

Věta: Množina V_H je lineární podprostor $C^2(I)$ a platí $\dim V_H = 2$.

Definice: Bázi prostoru V_H názýváme fundamentální systém řešení HLDR

Je-li $y_1(x)$, $y_2(x)$ fundamentální systém řešeni HLDR 2. řádu potom obecné řešení je tvaru

$$y(x) \;=\; C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Homogenní LDR 2. řádu

$L: C^2(I) \to C(I)$

$L(y) = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$, L je lineární

HLDR 2. řádu: $Ly = 0$

Množinu všech řešeni HLDR označme V_H, potom můžeme psát

$$V_H = \{y \in C^2(I);\ Ly = 0\} = \mathcal{N}(L).$$

Protože L je lineární víme, že V_H je lineární podprostor $C^2(I)$.

Věta: Množina V_H je lineární podprostor $C^2(I)$ a platí
$\dim V_H = 2$.

Definice: Bázi prostoru V_H názýváme fundamentální systém řešení HLDR

Je-li $y_1(x)$, $y_2(x)$ fundamentální systém řešeni HLDR 2. řádu potom obecné řešení je tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Homogenní LDR 2. řádu

$L: C^2(I) \to C(I)$

$L(y) = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$, L je lineární

HLDR 2. řádu: $Ly = 0$

Množinu všech řešeni HLDR označme V_H, potom můžeme psát

$$V_H = \{y \in C^2(I);\ Ly = 0\} = \mathcal{N}(L).$$

Protože L je lineární víme, že V_H je lineární podprostor $C^2(I)$.

Věta: Množina V_H je lineární podprostor $C^2(I)$ a platí
$\dim V_H = 2$.

Definice: Bázi prostoru V_H názýváme fundamentální systém řešení HLDR

Je-li $y_1(x)$, $y_2(x)$ fundamentální systém řešeni HLDR 2. řádu potom obecné řešení je tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Homogenní LDR 2. řádu

$L: C^2(I) \to C(I)$

$L(y) = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$, L je lineární

HLDR 2. řádu: $Ly = 0$

Množinu všech řešeni HLDR označme V_H, potom můžeme psát

$$V_H = \{y \in C^2(I);\ Ly = 0\} = \mathcal{N}(L).$$

Protože L je lineární víme, že V_H je lineární podprostor $C^2(I)$.

Věta: Množina V_H je lineární podprostor $C^2(I)$ a platí
$\dim V_H = 2$.

Definice: Bázi prostoru V_H názýváme fundamentální systém řešení HLDR

Je-li $y_1(x)$, $y_2(x)$ fundamentální systém řešeni HLDR 2. řádu potom obecné řešení je tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Homogenní LDR 2. řádu

$L: C^2(I) \to C(I)$

$L(y) = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$, L je lineární

HLDR 2. řádu: $Ly = 0$

Množinu všech řešeni HLDR označme V_H, potom můžeme psát

$$V_H = \{y \in C^2(I);\ Ly = 0\} = \mathcal{N}(L).$$

Protože L je lineární víme, že V_H je lineární podprostor $C^2(I)$.

Věta: Množina V_H je lineární podprostor $C^2(I)$ a platí $\dim V_H = 2$.

Definice: Bázi prostoru V_H názýváme fundamentální systém řešení HLDR

Je-li $y_1(x)$, $y_2(x)$ fundamentální systém řešeni HLDR 2. řádu potom obecné řešení je tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Homogenní LDR 2. řádu

$L: C^2(I) \to C(I)$

$L(y) = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$, L je lineární

HLDR 2. řádu: $Ly = 0$

Množinu všech řešeni HLDR označme V_H, potom můžeme psát

$$V_H = \{y \in C^2(I);\ Ly = 0\} = \mathcal{N}(L).$$

Protože L je lineární víme, že V_H je lineární podprostor $C^2(I)$.

Věta: Množina V_H je lineární podprostor $C^2(I)$ a platí $\dim V_H = 2$.

Definice: Bázi prostoru V_H názýváme fundamentální systém řešení HLDR

Je-li $y_1(x)$, $y_2(x)$ fundamentální systém řešeni HLDR 2. řádu potom obecné řešení je tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Homogenní LDR 2. řádu

$L: C^2(I) \to C(I)$

$L(y) = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$, L je lineární

HLDR 2. řádu: $Ly = 0$

Množinu všech řešeni HLDR označme V_H, potom můžeme psát

$$V_H = \{y \in C^2(I);\ Ly = 0\} = \mathcal{N}(L).$$

Protože L je lineární víme, že V_H je lineární podprostor $C^2(I)$.

Věta: Množina V_H je lineární podprostor $C^2(I)$ a platí $\dim V_H = 2$.

Definice: Bázi prostoru V_H názýváme fundamentální systém řešení HLDR

Je-li $y_1(x)$, $y_2(x)$ fundamentální systém řešeni HLDR 2. řádu potom obecné řešení je tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Homogenní LDR 2. řádu

$L: \; C^2(I) \; \to \; C(I)$

$L(y) \; = \; a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$, L je lineární

HLDR 2. řádu: $Ly \; = \; 0$

Množinu všech řešeni HLDR označme V_H, potom můžeme psát

$$V_H = \{y \in C^2(I);\; Ly = 0\} = \mathcal{N}(L).$$

Protože L je lineární víme, že V_H je lineární podprostor $C^2(I)$.

Věta: Množina V_H je lineární podprostor $C^2(I)$ a platí
$\dim V_H = 2$.

Definice: Bázi prostoru V_H názýváme fundamentální systém řešení HLDR

Je-li $y_1(x)$, $y_2(x)$ fundamentální systém řešeni HLDR 2. řádu potom obecné řešení je tvaru

$$y(x) \; = \; C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Homogenní LDR 2. řádu

$L: \ C^2(I) \ \rightarrow \ C(I)$

$L(y) \ = \ a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$, L je lineární

HLDR 2. řádu: $Ly \ = \ 0$

Množinu všech řešeni HLDR označme V_H, potom můžeme psát

$$V_H = \{y \in C^2(I); \ Ly = 0\} = \mathcal{N}(L).$$

Protože L je lineární víme, že V_H je lineární podprostor $C^2(I)$.

Věta: Množina V_H je lineární podprostor $C^2(I)$ a platí
$\dim V_H = 2$.

Definice: Bázi prostoru V_H názýváme fundamentální systém řešení HLDR

Je-li $y_1(x)$, $y_2(x)$ fundamentální systém řešeni HLDR 2. řádu potom obecné řešení je tvaru

$$y(x) \ = \ C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Homogenní LDR 2. řádu

$L: \ C^2(I) \ \rightarrow \ C(I)$

$L(y) \ = \ a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$, L je lineární

HLDR 2. řádu: $Ly \ = \ 0$

Množinu všech řešeni HLDR označme V_H, potom můžeme psát

$$V_H = \{y \in C^2(I); \ Ly = 0\} = \mathcal{N}(L).$$

Protože L je lineární víme, že V_H je lineární podprostor $C^2(I)$.

Věta: Množina V_H je lineární podprostor $C^2(I)$ a platí
dim $V_H = 2$.

Definice: Bázi prostoru V_H názýváme fundamentální systém řešení HLDR

Je-li $y_1(x), \ y_2(x)$ fundamentální systém řešeni HLDR 2. řádu potom obecné řešení je tvaru

$$y(x) \ = \ C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Homogenní LDR 1. řádu

$L : C^1(I) \to C(I)$

$L(y) = a_0(x)y' + a_1(x)y$, L je lineární

HLDR 1. řádu: $Ly = 0$

V_H je lineární podprostor $C^1(I)$, $\dim V_H = 1$.

Je-li $y_1(x)$ fundamentální systém řešeni HLDR 1. řádu potom obecné řešení je tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x).$$

HLDR 1. řádu umíme řešit metodou separace proměnných.

Homogenní LDR 1. řádu

$L : C^1(I) \to C(I)$

$L(y) = a_0(x)y' + a_1(x)y$, L je lineární

HLDR 1. řádu: $Ly = 0$

V_H je lineární podprostor $C^1(I)$, dim $V_H = 1$.

Je-li $y_1(x)$ fundamentální systém řešeni HLDR 1. řádu potom obecné řešení je tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x).$$

HLDR 1. řádu umíme řešit metodou separace proměnných.

Homogenní LDR 1. řádu

$L: C^1(I) \to C(I)$

$L(y) = a_0(x)y' + a_1(x)y$, L je lineární

HLDR 1. řádu: $Ly = 0$

V_H je lineární podprostor $C^1(I)$, $\dim V_H = 1$.

Je-li $y_1(x)$ fundamentální systém řešeni HLDR 1. řádu potom obecné řešení je tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x).$$

HLDR 1. řádu umíme řešit metodou separace proměnných.

Homogenní LDR 1. řádu

$L: C^1(I) \to C(I)$

$L(y) = a_0(x)y' + a_1(x)y$, L je lineární

HLDR 1. řádu: $Ly = 0$

V_H je lineární podprostor $C^1(I)$, dim $V_H = 1$.

Je-li $y_1(x)$ fundamentální systém řešeni HLDR 1. řádu potom obecné řešení je tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x).$$

HLDR 1. řádu umíme řešit metodou separace proměnných.

Homogenní LDR 1. řádu

$L: C^1(I) \to C(I)$

$L(y) = a_0(x)y' + a_1(x)y$, L je lineární

HLDR 1. řádu: $Ly = 0$

V_H je lineární podprostor $C^1(I)$, $\dim V_H = 1$.

Je-li $y_1(x)$ fundamentální systém řešeni HLDR 1. řádu potom obecné řešení je tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x).$$

HLDR 1. řádu umíme řešit metodou separace proměnných.

Homogenní LDR 1. řádu

$L: C^1(I) \to C(I)$

$L(y) = a_0(x)y' + a_1(x)y$, L je lineární

HLDR 1. řádu: $Ly = 0$

V_H je lineární podprostor $C^1(I)$, $\dim V_H = 1$.

Je-li $y_1(x)$ fundamentální systém řešeni HLDR 1. řádu potom obecné řešení je tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x).$$

HLDR 1. řádu umíme řešit metodou separace proměnných.

Homogenní LDR 1. řádu

$L: C^1(I) \to C(I)$

$L(y) = a_0(x)y' + a_1(x)y$, L je lineární

HLDR 1. řádu: $Ly = 0$

V_H je lineární podprostor $C^1(I)$, $\dim V_H = 1$.

Je-li $y_1(x)$ fundamentální systém řešeni HLDR 1. řádu potom obecné řešení je tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x).$$

HLDR 1. řádu umíme řešit metodou separace proměnných.

Homogenní LDR 1. řádu

$L: C^1(I) \to C(I)$

$L(y) = a_0(x)y' + a_1(x)y$, L je lineární

HLDR 1. řádu: $Ly = 0$

V_H je lineární podprostor $C^1(I)$, $\dim V_H = 1$.

Je-li $y_1(x)$ fundamentální systém řešeni HLDR 1. řádu potom obecné řešení je tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x).$$

HLDR 1. řádu umíme řešit metodou separace proměnných.

Řešení homogenní LDR 2.řádu s konstantními koeficienty.

$$a_0 y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = 0 \quad \text{pro } \forall\, x \in I$$

$a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ jsou konstanty a $a_0 \neq 0$.

Algebraická rovnice

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

se nazývá charakteristická rovnice LDR 2. řádu s konstantními koeficienty.

Charakteristická rovnice má 2 kořemy λ_1, λ_2, mohou nastat tři případy

1. dva různé reálné kořeny,
2. dva stejné reálné kořeny (dvojnásobný kořen),
3. dva komplexně sdružené kořeny.

Řešení homogenní LDR 2.řádu s konstantními koeficienty.

$$a_0 y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) \;=\; 0 \quad \text{pro } \forall\, x \in I$$

$a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ jsou konstanty a $a_0 \neq 0$.

Algebraická rovnice

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 \;=\; 0$$

se nazývá charakteristická rovnice LDR 2. řádu s konstantními koeficienty.

Charakteristická rovnice má 2 kořemy λ_1, λ_2, mohou nastat tři případy

1. dva různé reálné kořeny,
2. dva stejné reálné kořeny (dvojnásobný kořen),
3. dva komplexně sdružené kořeny.

Řešení homogenní LDR 2.řádu s konstantními koeficienty.

$$a_0 y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) \;=\; 0 \quad \text{pro } \forall\, x \in I$$

$a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ jsou konstanty a $a_0 \neq 0$.

Algebraická rovnice

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 \;=\; 0$$

se nazývá charakteristická rovnice LDR 2. řádu s konstantními koeficienty.

Charakteristická rovnice má 2 kořemy λ_1, λ_2, mohou nastat tři případy

1. dva různé reálné kořeny,
2. dva stejné reálné kořeny (dvojnásobný kořen),
3. dva komplexně sdružené kořeny.

Řešení homogenní LDR 2.řádu s konstantními koeficienty.

$$a_0 y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) \;=\; 0 \quad \text{pro } \forall\, x \in I$$

$a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ jsou konstanty a $a_0 \neq 0$.

Algebraická rovnice

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 \;=\; 0$$

se nazývá charakteristická rovnice LDR 2. řádu s konstantními koeficienty.

Charakteristická rovnice má 2 kořemy $\lambda_1,\ \lambda_2$, mohou nastat tři případy

1. dva různé reálné kořeny,
2. dva stejné reálné kořeny (dvojnásobný kořen),
3. dva komplexně sdružené kořeny.

Řešení homogenní LDR 2.řádu s konstantními koeficienty-2

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ potom fundamentální systém je tvaru $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ a obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1\, \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\, \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$

2. $\lambda_{12} = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$ potom fundamentální systém je tvaru $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y_2(x) = x\ \mathrm{e}^{\lambda x}$ a obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1\, \mathrm{e}^{\lambda x} + C_2 x\ \mathrm{e}^{\lambda x}$$

3. $\lambda_{12} = a \pm \mathrm{i}b,\ a, b \in \mathbb{R}$ potom fundamentální systém je tvaru $y_1(x) = \mathrm{e}^{a\,x} \cos b\,x$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{a\,x} \sin b\,x$ a obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1\, \mathrm{e}^{a\,x} \cos b\,x + C_2\ \mathrm{e}^{a\,x} \sin b\,x$$

Řešení homogenní LDR 2.řádu s konstantními koeficienty-2

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ potom fundamentální systém je tvaru $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ a obecné řešení má tvar
$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$

2. $\lambda_{12} = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$ potom fundamentální systém je tvaru $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ a obecné řešení má tvar
$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{\lambda x}$$

3. $\lambda_{12} = a \pm \mathrm{i}b,\ a, b \in \mathbb{R}$ potom fundamentální systém je tvaru $y_1(x) = \mathrm{e}^{a x}\cos b\,x$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{a x}\sin b\,x$ a obecné řešení má tvar
$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{a x}\cos b\,x + C_2\,\mathrm{e}^{a x}\sin b\,x$$

Řešení homogenní LDR 2.řádu s konstantními koeficienty-2

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ potom fundamentální systém je tvaru $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ a obecné řešení má tvar
$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$

2. $\lambda_{12} = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$ potom fundamentální systém je tvaru $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ a obecné řešení má tvar
$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{\lambda x}$$

3. $\lambda_{12} = a \pm \mathrm{i}b,\ a, b \in \mathbb{R}$ potom fundamentální systém je tvaru $y_1(x) = \mathrm{e}^{a x}\cos b\,x$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{a x}\sin b\,x$ a obecné řešení má tvar
$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{a x}\cos b\,x + C_2\,\mathrm{e}^{a x}\sin b\,x$$

Řešení homogenní LDR 2.řádu s konstantními koeficienty-2

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ potom fundamentální systém je tvaru $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ a obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$

2. $\lambda_{12} = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$ potom fundamentální systém je tvaru $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ a obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{\lambda x}$$

3. $\lambda_{12} = a \pm \mathrm{i}b,\ a, b \in \mathbb{R}$ potom fundamentální systém je tvaru $y_1(x) = \mathrm{e}^{ax}\cos bx$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{ax}\sin bx$ a obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{ax}\cos bx + C_2\,\mathrm{e}^{ax}\sin bx$$

Metoda snížení řádu

Předpokládejme rovnici:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' = 0, \quad a_0(x) \neq 0, \quad x \in I.$$

Zavedeme substituci: $z(x) = y'(x) \quad \forall\, x \in I$. Dostaneme rovnici:

$$a_0(x)z' + a_1(x)z = 0$$

HLDR 1. řádu vyřešíme metodu separace a dostaneme:

$$z(x) = C_1 z_1(x)$$

$$y(x) = \int z(x)\mathrm{d}x = C_1 \int z_1(x)\mathrm{d}x + C_2.$$

Fundamentální systém původní rovnice je

$$y_1(x) = \int z_1(x)\mathrm{d}x,\ y_2(x) = 1.$$

Metoda snížení řádu

Předpokládejme rovnici:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' \;=\; 0, \quad a_0(x) \neq 0, \quad x \in I.$$

Zavedeme substituci: $z(x) = y'(x) \quad \forall\, x \in I$. Dostaneme rovnici:

$$a_0(x)z' + a_1(x)z \;=\; 0$$

HLDR 1. řádu vyřešíme metodu separace a dostaneme:

$$z(x) = C_1 z_1(x)$$

$$y(x) \;=\; \int z(x)\mathrm{d}x \;=\; C_1 \int z_1(x)\mathrm{d}x \;+\; C_2.$$

Fundamentální systém původní rovnice je

$$y_1(x) = \int z_1(x)\mathrm{d}x,\; y_2(x) = 1.$$

Metoda snížení řádu

Předpokládejme rovnici:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' = 0, \quad a_0(x) \neq 0, \quad x \in I.$$

Zavedeme substituci: $z(x) = y'(x) \quad \forall\, x \in I$. Dostaneme rovnici:

$$a_0(x)z' + a_1(x)z = 0$$

HLDR 1. řádu vyřešíme metodu separace a dostaneme:

$$z(x) = C_1 z_1(x)$$

$$y(x) = \int z(x)\mathrm{d}x = C_1 \int z_1(x)\mathrm{d}x + C_2.$$

Fundamentální systém původní rovnice je

$$y_1(x) = \int z_1(x)\mathrm{d}x, \; y_2(x) = 1.$$

Metoda snížení řádu

Předpokládejme rovnici:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' = 0, \quad a_0(x) \neq 0, \quad x \in I.$$

Zavedeme substituci: $z(x) = y'(x) \quad \forall\, x \in I$. Dostaneme rovnici:

$$a_0(x)z' + a_1(x)z = 0$$

HLDR 1. řádu vyřešíme metodu separace a dostaneme:

$$z(x) = C_1 z_1(x)$$

$$y(x) = \int z(x)\mathrm{d}x = C_1 \int z_1(x)\mathrm{d}x + C_2.$$

Fundamentální systém původní rovnice je

$$y_1(x) = \int z_1(x)\mathrm{d}x, \; y_2(x) = 1.$$

Metoda snížení řádu

Předpokládejme rovnici:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' \;=\; 0, \quad a_0(x) \neq 0, \quad x \in I.$$

Zavedeme substituci: $z(x) = y'(x) \quad \forall\, x \in I$. Dostaneme rovnici:

$$a_0(x)z' + a_1(x)z \;=\; 0$$

HLDR 1. řádu vyřešíme metodu separace a dostaneme:

$$z(x) = C_1 z_1(x)$$

$$y(x) \;=\; \int z(x)\mathrm{d}x \;=\; C_1 \int z_1(x)\mathrm{d}x \;+\; C_2.$$

Fundamentální systém původní rovnice je

$$y_1(x) = \int z_1(x)\mathrm{d}x, \; y_2(x) = 1.$$

Metoda snížení řádu

Předpokládejme rovnici:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' \;=\; 0, \quad a_0(x) \neq 0, \quad x \in I.$$

Zavedeme substituci: $z(x) = y'(x) \quad \forall\, x \in I$. Dostaneme rovnici:

$$a_0(x)z' + a_1(x)z \;=\; 0$$

HLDR 1. řádu vyřešíme metodu separace a dostaneme:

$$z(x) = C_1 z_1(x)$$

$$y(x) \;=\; \int z(x)\mathrm{d}x \;=\; C_1 \int z_1(x)\mathrm{d}x \;+\; C_2.$$

Fundamentální systém původní rovnice je

$$y_1(x) = \int z_1(x)\mathrm{d}x,\; y_2(x) = 1.$$

Řešení nehomogenní LDR 2. řádu

Uvažujme obecnou LDR 2. řádu

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \; = \; b(x)$$

Nechť $y_1(x)$, $y_2(x)$ je fundamentální systém.

Označme řešení HLDR

$$y_H(x, \boldsymbol{C}) = C_1\, y_1(x) \; + \; C_2\, y_2(x), \;\; \text{kde } \boldsymbol{C} = (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Věta: Obecné řešení NLDR 2. řádu má tvar

$$y_N(x, \boldsymbol{C}) \; = \; y_H(x, \boldsymbol{C}) \; + \; y_p(x), \;\; \boldsymbol{C} = \in \mathbb{R}^2,$$

kde $y_H(x, \boldsymbol{C})$ je řešení HLDR 2. ř. a $y_p(x)$ je nějaké partikulární řešení NLDR 2. ř.

Řešení nehomogenní LDR 2. řádu

Uvažujme obecnou LDR 2. řádu

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \;=\; b(x)$$

Nechť $y_1(x)$, $y_2(x)$ je fundamentální systém.

Označme řešení HLDR

$$y_H(x, \boldsymbol{C}) = C_1\, y_1(x) \;+\; C_2\, y_2(x), \;\; \text{kde } \boldsymbol{C} = (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Věta: Obecné řešení NLDR 2. řádu má tvar

$$y_N(x, \boldsymbol{C}) \;=\; y_H(x, \boldsymbol{C}) \;+\; y_p(x), \;\; \boldsymbol{C} = \in \mathbb{R}^2,$$

kde $y_H(x, \boldsymbol{C})$ je řešení HLDR 2. ř. a $y_p(x)$ je nějaké partikulární řešení NLDR 2. ř.

Řešení nehomogenní LDR 2. řádu

Uvažujme obecnou LDR 2. řádu

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \;=\; b(x)$$

Nechť $y_1(x),\ y_2(x)$ je fundamentální systém.

Označme řešení HLDR

$$y_H(x,\boldsymbol{C}) = C_1\, y_1(x) \;+\; C_2\, y_2(x),\;\; \text{kde } \boldsymbol{C} = (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Věta: Obecné řešení NLDR 2. řádu má tvar

$$y_N(x,\boldsymbol{C}) \;=\; y_H(x,\boldsymbol{C}) \;+\; y_p(x),\;\; \boldsymbol{C} = \in \mathbb{R}^2,$$

kde $y_H(x,\boldsymbol{C})$ je řešení HLDR 2. ř. a $y_p(x)$ je nějaké partikulární řešení NLDR 2. ř.

Řešení nehomogenní LDR 2. řádu

Uvažujme obecnou LDR 2. řádu

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \ = \ b(x)$$

Nechť $y_1(x)$, $y_2(x)$ je fundamentální systém.

Označme řešení HLDR

$$y_H(x, \boldsymbol{C}) = C_1\, y_1(x) \ + \ C_2\, y_2(x), \ \text{kde } \boldsymbol{C} = (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Věta: Obecné řešení NLDR 2. řádu má tvar

$$y_N(x, \boldsymbol{C}) \ = \ y_H(x, \boldsymbol{C}) \ + \ y_p(x), \ \boldsymbol{C} = \in \mathbb{R}^2,$$

kde $y_H(x, \boldsymbol{C})$ je řešení HLDR 2. ř. a $y_p(x)$ je nějaké partikulární řešení NLDR 2. ř.

Řešení nehomogenní LDR 2. řádu

Uvažujme obecnou LDR 2. řádu

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \;=\; b(x)$$

Nechť $y_1(x),\ y_2(x)$ je fundamentální systém.

Označme řešení HLDR

$$y_H(x, \boldsymbol{C}) = C_1\, y_1(x) \;+\; C_2\, y_2(x), \;\; \text{kde } \boldsymbol{C} = (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Věta: Obecné řešení NLDR 2. řádu má tvar

$$y_N(x, \boldsymbol{C}) \;=\; y_H(x, \boldsymbol{C}) \;+\; y_p(x), \;\; \boldsymbol{C} = \in \mathbb{R}^2,$$

kde $y_H(x, \boldsymbol{C})$ je řešení HLDR 2. ř. a $y_p(x)$ je nějaké partikulární řešení NLDR 2. ř.

Metoda variace konstant

Řešíme NLDR 2. ř.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \;=\; b(x) \quad \forall\, x \in I,\; a_0(x) \neq 0\; \forall\, x \in I.$$

1. krok

Řešíme přidruženou HLDR 2. ř.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \;=\; 0 \quad \forall\, x \in I,\; a_0(x) \neq 0\; \forall\, x \in I.$$

Nechť $y_1(x)$, $y_2(x)$ je fundamentální systém HLDR 2. ř.

$$y_H \;=\; C_1\, y_1(x) \;+\; C_2\, y_2(x)$$

2. krok

Hledáme nějaké partikulární řešení NLDR 2. ř. Zkusíme ho hledat ve tvaru

$$y_p(x) \;=\; c_1(x)\, y_1(x) \;+\; c_2(x)\, y_2(x) \quad \forall\, x \in I.$$

Metoda variace konstant

Řešíme NLDR 2. ř.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) \quad \forall\, x \in I,\ a_0(x) \neq 0\ \forall\, x \in I.$$

1. krok

Řešíme přidruženou HLDR 2. ř.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad \forall\, x \in I,\ a_0(x) \neq 0\ \forall\, x \in I.$$

Nechť $y_1(x)$, $y_2(x)$ je fundamentální systém HLDR 2. ř.

$$y_H = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$$

2. krok

Hledáme nějaké partikulární řešení NLDR 2. ř. Zkusíme ho hledat ve tvaru

$$y_p(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x) \quad \forall\, x \in I.$$

Metoda variace konstant

Řešíme NLDR 2. ř.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) \quad \forall\, x \in I,\ a_0(x) \neq 0\ \forall\, x \in I.$$

1. krok

Řešíme přidruženou HLDR 2. ř.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad \forall\, x \in I,\ a_0(x) \neq 0\ \forall\, x \in I.$$

Nechť $y_1(x)$, $y_2(x)$ je fundamentální systém HLDR 2. ř.

$$y_H = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$$

2. krok

Hledáme nějaké partikulární řešení NLDR 2. ř. Zkusíme ho hledat ve tvaru

$$y_p(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x) \quad \forall\, x \in I.$$

Metoda variace konstant

Řešíme NLDR 2. ř.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \; = \; b(x) \quad \forall\, x \in I,\; a_0(x) \neq 0 \;\forall\, x \in I.$$

1. krok

Řešíme přidruženou HLDR 2. ř.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \; = \; 0 \quad \forall\, x \in I,\; a_0(x) \neq 0 \;\forall\, x \in I.$$

Nechť $y_1(x)$, $y_2(x)$ je fundamentální systém HLDR 2. ř.

$$y_H \; = \; C_1\, y_1(x) \; + \; C_2\, y_2(x)$$

2. krok

Hledáme nějaké partikulární řešení NLDR 2. ř. Zkusíme ho hledat ve tvaru

$$y_p(x) \; = \; c_1(x)\, y_1(x) \; + \; c_2(x)\, y_2(x) \quad \forall\, x \in I.$$

Metoda variace konstant

Řešíme NLDR 2. ř.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) \quad \forall\, x \in I,\ a_0(x) \neq 0\ \forall\, x \in I.$$

1. krok

Řešíme přidruženou HLDR 2. ř.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad \forall\, x \in I,\ a_0(x) \neq 0\ \forall\, x \in I.$$

Nechť $y_1(x)$, $y_2(x)$ je fundamentální systém HLDR 2. ř.

$$y_H = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$$

2. krok

Hledáme nějaké partikulární řešení NLDR 2. ř. Zkusíme ho hledat ve tvaru

$$y_p(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x) \quad \forall\, x \in I.$$

Metoda variace konstant

Řešíme NLDR 2. ř.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \;=\; b(x) \quad \forall\, x \in I,\; a_0(x) \neq 0 \;\forall\, x \in I.$$

1. krok

Řešíme přidruženou HLDR 2. ř.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \;=\; 0 \quad \forall\, x \in I,\; a_0(x) \neq 0 \;\forall\, x \in I.$$

Nechť $y_1(x),\; y_2(x)$ je fundamentální systém HLDR 2. ř.

$$y_H \;=\; C_1\, y_1(x) \;+\; C_2\, y_2(x)$$

2. krok

Hledáme nějaké partikulární řešení NLDR 2. ř. Zkusíme ho hledat ve tvaru

$$y_p(x) \;=\; c_1(x)\, y_1(x) \;+\; c_2(x)\, y_2(x) \quad \forall\, x \in I.$$

Metoda variace konstant

Řešíme NLDR 2. ř.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \;=\; b(x) \quad \forall\, x \in I,\; a_0(x) \neq 0 \;\forall\, x \in I.$$

1. krok

Řešíme přidruženou HLDR 2. ř.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \;=\; 0 \quad \forall\, x \in I,\; a_0(x) \neq 0 \;\forall\, x \in I.$$

Nechť $y_1(x),\ y_2(x)$ je fundamentální systém HLDR 2. ř.

$$y_H \;=\; C_1\, y_1(x) \;+\; C_2\, y_2(x)$$

2. krok

Hledáme nějaké partikulární řešení NLDR 2. ř. Zkusíme ho hledat ve tvaru

$$y_p(x) \;=\; c_1(x)\, y_1(x) \;+\; c_2(x)\, y_2(x) \quad \forall\, x \in I.$$

Metoda variace konstant - 2

Hledáme funkce $c_1'(x)$ a $c_2'(x)$ splňující rovnice:

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) &= \frac{b(x)}{a_0(x)}, \end{aligned}$$

potom

$$c_1(x) = \int c_1'(x)\mathrm{d}x \ \text{ a } \ c_2(x) = \int c_2'(x)\mathrm{d}x.$$

Dostáváme partikulární řešení HLDR 2. ř.

$$y_p(x) = c_1(x)\,y_1(x) + c_2(x)\,y_2(x) \quad \forall\, x \in I.$$

3. krok

$$\begin{aligned} y_N(x) &= y_H(x) + y_p(x) \quad \forall\, x \in I. \\ y_N(x) &= C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x) + y_p(x) \quad \forall\, x \in I \text{ a } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Metoda variace konstant - 2

Hledáme funkce $c_1'(x)$ a $c_2'(x)$ splňující rovnice:

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1(x) \ + \ c_2'(x)y_2(x) \ &= \ 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) \ + \ c_2'(x)y_2'(x) \ &= \ \frac{b(x)}{a_0(x)}, \end{aligned}$$

potom

$$c_1(x) = \int c_1'(x)\mathrm{d}x \ \text{ a } \ c_2(x) = \int c_2'(x)\mathrm{d}x.$$

Dostáváme partikulární řešení HLDR 2. ř.

$$y_p(x) \ = \ c_1(x)\, y_1(x) \ + \ c_2(x)\, y_2(x) \quad \forall\, x \in I.$$

3. krok

$$\begin{aligned} y_N(x) \ &= \ y_H(x) \ + \ y_p(x) \quad \forall\, x \in I. \\ y_N(x) \ &= \ C_1\, y_1(x) \ + \ C_2\, y_2(x) \ + \ y_p(x) \quad \forall\, x \in I \text{ a } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Metoda variace konstant - 2

Hledáme funkce $c_1'(x)$ a $c_2'(x)$ splňující rovnice:

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1(x) &+ c_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) &+ c_2'(x)y_2'(x) &= \frac{b(x)}{a_0(x)}, \end{aligned}$$

potom

$$c_1(x) = \int c_1'(x)\mathrm{d}x \ \text{ a } \ c_2(x) = \int c_2'(x)\mathrm{d}x.$$

Dostáváme partikulární řešení HLDR 2. ř.

$$y_p(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x) \quad \forall\, x \in I.$$

3. krok

$$\begin{aligned} y_N(x) &= y_H(x) + y_p(x) \quad \forall\, x \in I. \\ y_N(x) &= C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) + y_p(x) \quad \forall\, x \in I \text{ a } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Metoda variace konstant - 2

Hledáme funkce $c_1'(x)$ a $c_2'(x)$ splňující rovnice:

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1(x) &+ c_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) &+ c_2'(x)y_2'(x) &= \frac{b(x)}{a_0(x)}, \end{aligned}$$

potom

$$c_1(x) = \int c_1'(x)\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad c_2(x) = \int c_2'(x)\mathrm{d}x.$$

Dostáváme partikulární řešení HLDR 2. ř.

$$y_p(x) = c_1(x)\,y_1(x) + c_2(x)\,y_2(x) \quad \forall\, x \in I.$$

3. krok

$$y_N(x) = y_H(x) + y_p(x) \quad \forall\, x \in I.$$

$$y_N(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x) + y_p(x) \quad \forall\, x \in I \text{ a } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Metoda variace konstant - 2

Hledáme funkce $c_1'(x)$ a $c_2'(x)$ splňující rovnice:

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1(x) \;+\; c_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) \;+\; c_2'(x)y_2'(x) &= \frac{b(x)}{a_0(x)}, \end{aligned}$$

potom

$$c_1(x) = \int c_1'(x)\mathrm{d}x \;\text{ a }\; c_2(x) = \int c_2'(x)\mathrm{d}x.$$

Dostáváme partikulární řešení HLDR 2. ř.

$$y_p(x) \;=\; c_1(x)\,y_1(x) \;+\; c_2(x)\,y_2(x) \quad \forall\, x \in I.$$

3. krok

$$\begin{aligned} y_N(x) &= y_H(x) \;+\; y_p(x) \quad \forall\, x \in I. \\ y_N(x) &= C_1\,y_1(x) \;+\; C_2\,y_2(x) \;+\; y_p(x) \quad \forall\, x \in I \text{ a } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Metoda variace konstant - 2

Hledáme funkce $c_1'(x)$ a $c_2'(x)$ splňující rovnice:

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1(x) \ + \ c_2'(x)y_2(x) \ &= \ 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) \ + \ c_2'(x)y_2'(x) \ &= \ \frac{b(x)}{a_0(x)}, \end{aligned}$$

potom

$$c_1(x) = \int c_1'(x)\mathrm{d}x \ \text{ a } \ c_2(x) = \int c_2'(x)\mathrm{d}x.$$

Dostáváme partikulární řešení HLDR 2. ř.

$$y_p(x) \ = \ c_1(x)\, y_1(x) \ + \ c_2(x)\, y_2(x) \quad \forall\, x \in I.$$

3. krok

$$\begin{aligned} y_N(x) \ &= \ y_H(x) \ + \ y_p(x) \quad \forall\, x \in I. \\ y_N(x) \ &= \ C_1\, y_1(x) \ + \ C_2\, y_2(x) \ + \ y_p(x) \quad \forall\, x \in I \text{ a } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Metoda odhadu

Připomeňme metodu odhadu pro řešení NLDR 2. ř. se spaciální pravou stranou.

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty je rovnice tvaru

$$a_0\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_2\, y(x) = b(x) \quad \forall\, x \in I,\ a_0 \neq 0,$$

kde $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Předpokládejme, že $b(x)$ je speciální pravá strana ve tvaru

$$b(x) = e^{\alpha\, x}(P(x)\, \sin(\beta\, x) + Q(x)\, \cos(\beta\, x)),$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy v proměnné x, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Metoda odhadu

Připomeňme metodu odhadu pro řešení NLDR 2. ř. se spaciální pravou stranou.

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty je rovnice tvaru

$$a_0\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_2\, y(x) = b(x) \quad \forall\, x \in I,\ a_0 \neq 0,$$

kde $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Předpokládejme, že $b(x)$ je speciální pravá strana ve tvaru

$$b(x) = e^{\alpha\, x}(P(x)\, \sin(\beta\, x) + Q(x)\, \cos(\beta\, x)),$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy v proměnné x, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Metoda odhadu

Připomeňme metodu odhadu pro řešení NLDR 2. ř. se spaciální pravou stranou.

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty je rovnice tvaru

$$a_0\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_2\, y(x) = b(x) \quad \forall\, x \in I,\ a_0 \neq 0,$$

kde $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Předpokládejme, že $b(x)$ je speciální pravá strana ve tvaru

$$b(x) = e^{\alpha\, x}(P(x)\, \sin(\beta\, x) + Q(x)\, \cos(\beta\, x)),$$

kde $P(x), Q(x)$ jsou polynomy v proměnné x, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Metoda odhadu -2

1. krok

Řešíme přidruženou HLDR 2. ř. s konstantními koeficienty

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y \;=\; 0 \quad \forall\, x \in I,\; a_0 \neq 0.$$

Nechť $y_1(x)$, $y_2(x)$ je fundamentální systém, potom řešení HLDR 2. ř. je tvaru

$$y_H \;=\; C_1\, y_1(x) \;+\; C_2\, y_2(x)$$

2. krok

Hledáme nějaké partikulární řešení NLDR 2. ř. Zkusíme ho hledat ve tvaru

$$y_p(x) = x^k\, e^{\alpha\, x}(R(x)\,\sin(\beta\, x) + S(x)\,\cos(\beta\, x)),$$ kde

Metoda odhadu -2

1. krok

Řešíme přidruženou HLDR 2. ř. s konstantními koeficienty

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad \forall\, x \in I,\ a_0 \neq 0.$$

Nechť $y_1(x)$, $y_2(x)$ je fundamentální systém, potom řešení HLDR 2. ř. je tvaru

$$y_H = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$$

2. krok

Hledáme nějaké partikulární řešení NLDR 2. ř. Zkusíme ho hledat ve tvaru

$$y_p(x) = x^k\, e^{\alpha\, x}(R(x) \sin(\beta\, x) + S(x) \cos(\beta\, x)), \quad \text{kde}$$

Metoda odhadu -2

1. krok

Řešíme přidruženou HLDR 2. ř. s konstantními koeficienty

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y \;=\; 0 \quad \forall\, x \in I,\; a_0 \neq 0.$$

Nechť $y_1(x)$, $y_2(x)$ je fundamentální systém, potom řešení HLDR 2. ř. je tvaru

$$y_H \;=\; C_1\, y_1(x) \;+\; C_2\, y_2(x)$$

2. krok

Hledáme nějaké partikulární řešení NLDR 2. ř. Zkusíme ho hledat ve tvaru

$$y_p(x) = x^k\, e^{\alpha\, x}(R(x)\, \sin(\beta\, x) + S(x)\, \cos(\beta\, x)), \quad \text{kde}$$

Metoda odhadu -2

1. krok

Řešíme přidruženou HLDR 2. ř. s konstantními koeficienty

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y \;=\; 0 \quad \forall\, x \in I,\; a_0 \neq 0.$$

Nechť $y_1(x)$, $y_2(x)$ je fundamentální systém, potom řešení HLDR 2. ř. je tvaru

$$y_H \;=\; C_1\, y_1(x) \;+\; C_2\, y_2(x)$$

2. krok

Hledáme nějaké partikulární řešení NLDR 2. ř. Zkusíme ho hledat ve tvaru

$$y_p(x) = x^k\, e^{\alpha\, x}(R(x)\, \sin(\beta\, x) + S(x)\, \cos(\beta\, x)),\quad \text{kde}$$

Metoda odhadu -2

1. krok

Řešíme přidruženou HLDR 2. ř. s konstantními koeficienty

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y \; = \; 0 \quad \forall\, x \in I, \; a_0 \neq 0.$$

Nechť $y_1(x)$, $y_2(x)$ je fundamentální systém, potom řešení HLDR 2. ř. je tvaru

$$y_H \; = \; C_1\, y_1(x) \; + \; C_2\, y_2(x)$$

2. krok

Hledáme nějaké partikulární řešení NLDR 2. ř. Zkusíme ho hledat ve tvaru

$$y_p(x) = x^k\, e^{\alpha\, x}(R(x)\, \sin(\beta\, x) + S(x)\, \cos(\beta\, x)), \quad \text{kde}$$

Metoda odhadu -3

- $k \in \{0, 1, 2\}$
  0 $\quad \alpha + i\beta$ není kořen charakteristické rovnice
  1 $\quad \alpha + i\beta$ je jednonásobný kořen char. rovnice
  2 $\quad \alpha + i\beta$ je dvojnásobný kořen char. rovnice
- $R(x), S(x)$ - polynomy stupně $\max\{\text{st. } P(x), \text{st. } Q(x)\}$

3. krok

Obecné řešení NLDR

$$\begin{aligned} y_N(x) &= y_H(x) + y_p(x) \quad \forall\, x \in I. \\ y_N(x) &= C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) + y_p(x) \quad \forall\, x \in I \text{ a } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Metoda odhadu -3

- $k \in \{0, 1, 2\}$

  0 $\alpha + i\beta$ není kořen charakteristické rovnice

  1 $\alpha + i\beta$ je jednonásobný kořen char. rovnice

  2 $\alpha + i\beta$ je dvojnásobný kořen char. rovnice

- $R(x), S(x)$ - polynomy stupně $\max\{\text{st. } P(x), \text{st. } Q(x)\}$

3. krok

Obecné řešení NLDR

$$\begin{aligned} y_N(x) &= y_H(x) + y_p(x) \quad \forall\, x \in I. \\ y_N(x) &= C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) + y_p(x) \quad \forall\, x \in I \text{ a } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Metoda odhadu -3

- $k \in \{0, 1, 2\}$
  - 0 $\alpha + i\beta$ není kořen charakteristické rovnice
  - 1 $\alpha + i\beta$ je jednonásobný kořen char. rovnice
  - 2 $\alpha + i\beta$ je dvojnásobný kořen char. rovnice
- $R(x), S(x)$ - polynomy stupně $\max\{\text{st. } P(x), \text{st. } Q(x)\}$

3. krok

Obecné řešení NLDR

$$
\begin{aligned}
y_N(x) &= y_H(x) + y_p(x) \quad \forall\, x \in I. \\
y_N(x) &= C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) + y_p(x) \quad \forall\, x \in I \text{ a } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Okrajové úlohy

Uvažujme obecnou LDR 2. řádu

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \;=\; b(x), \quad x \in \langle a, b \rangle$$

Počáteční podmínky

$y(a) = y_0,\; y'(a) = y_1$

Platí věta o existenci a jednoznačnosti.
Existuje právě jedno řešení splňující počáteční podmínky

Okrajové podmínky

$y(a) = y_0,\; y(b) = y_1$

Neplatí věta o existenci a jednoznačnosti.

- Existuje řešení
- neexistuje řešení
- existuje nekonečně mnoho řešení

splňující okrajové podmínky.

Okrajové úlohy

Uvažujme obecnou LDR 2. řádu

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \;=\; b(x), \quad x \in \langle a, b\rangle$$

Počáteční podmínky

$y(a) = y_0, \; y'(a) = y_1$

Platí věta o existenci a jednoznačnosti.
Existuje právě jedno řešení splňující počáteční podmínky

Okrajové podmínky

$y(a) = y_0, \; y(b) = y_1$

Neplatí věta o existenci a jednoznačnosti.

- Existuje řešení
- neexistuje řešení
- existuje nekonečně mnoho řešení

splňující okrajové podmínky.

Okrajové úlohy

Uvažujme obecnou LDR 2. řádu

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x), \quad x \in \langle a, b\rangle$$

Počáteční podmínky

$$y(a) = y_0, \; y'(a) = y_1$$

Platí věta o existenci a jednoznačnosti.
Existuje právě jedno řešení splňující počáteční podmínky

Okrajové podmínky

$$y(a) = y_0, \; y(b) = y_1$$

Neplatí věta o existenci a jednoznačnosti.

- Existuje řešení
- neexistuje řešení
- existuje nekonečně mnoho řešení

splňující okrajové podmínky.

Okrajové úlohy

Uvažujme obecnou LDR 2. řádu

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \;=\; b(x), \quad x \in \langle a, b\rangle$$

Počáteční podmínky

$$y(a) = y_0, \; y'(a) = y_1$$

Platí věta o existenci a jednoznačnosti.
Existuje právě jedno řešení splňující počáteční podmínky

Okrajové podmínky

$$y(a) = y_0, \; y(b) = y_1$$

Neplatí věta o existenci a jednoznačnosti.

- Existuje řešení
- neexistuje řešení
- existuje nekonečně mnoho řešení

splňující okrajové podmínky.

Okrajové úlohy

Uvažujme obecnou LDR 2. řádu

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \;=\; b(x), \quad x \in \langle a, b\rangle$$

Počáteční podmínky

$$y(a) = y_0, \; y'(a) = y_1$$

Platí věta o existenci a jednoznačnosti.
Existuje právě jedno řešení splňující počáteční podmínky

Okrajové podmínky

$$y(a) = y_0, \; y(b) = y_1$$

Neplatí věta o existenci a jednoznačnosti.

- Existuje řešení
- neexistuje řešení
- existuje nekonečně mnoho řešení

splňující okrajové podmínky.

Okrajové úlohy

Uvažujme obecnou LDR 2. řádu

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \;=\; b(x), \quad x \in \langle a, b \rangle$$

Počáteční podmínky

$$y(a) = y_0, \; y'(a) = y_1$$

Platí věta o existenci a jednoznačnosti.
Existuje právě jedno řešení splňující počáteční podmínky

Okrajové podmínky

$$y(a) = y_0, \; y(b) = y_1$$

Neplatí věta o existenci a jednoznačnosti.

- Existuje řešení
- neexistuje řešení
- existuje nekonečně mnoho řešení

splňující okrajové podmínky.

Okrajové úlohy

Uvažujme obecnou LDR 2. řádu

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x), \quad x \in \langle a, b\rangle$$

Počáteční podmínky

$$y(a) = y_0, \; y'(a) = y_1$$

Platí věta o existenci a jednoznačnosti.
Existuje právě jedno řešení splňující počáteční podmínky

Okrajové podmínky

$$y(a) = y_0, \; y(b) = y_1$$

Neplatí věta o existenci a jednoznačnosti.

- Existuje řešení
- neexistuje řešení
- existuje nekonečně mnoho řešení

splňující okrajové podmínky.

Okrajové úlohy

Uvažujme obecnou LDR 2. řádu

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \;=\; b(x), \quad x \in \langle a, b \rangle$$

Počáteční podmínky

$$y(a) = y_0, \; y'(a) = y_1$$

Platí věta o existenci a jednoznačnosti.
Existuje právě jedno řešení splňující počáteční podmínky

Okrajové podmínky

$$y(a) = y_0, \; y(b) = y_1$$

Neplatí věta o existenci a jednoznačnosti.

- Existuje řešení
- neexistuje řešení
- existuje nekonečně mnoho řešení

splňující okrajové podmínky.

Okrajové úlohy

Uvažujme obecnou LDR 2. řádu

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x), \quad x \in \langle a, b\rangle$$

Počáteční podmínky

$$y(a) = y_0, \; y'(a) = y_1$$

Platí věta o existenci a jednoznačnosti.
Existuje právě jedno řešení splňující počáteční podmínky

Okrajové podmínky

$$y(a) = y_0, \; y(b) = y_1$$

Neplatí věta o existenci a jednoznačnosti.

- Existuje řešení
- neexistuje řešení
- existuje nekonečně mnoho řešení

splňující okrajové podmínky.