Kapitola 11: Lineární diferenciální rovnice

Lineární diferenciální rovnice-LDR
Definice: Nechť $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), b(x)$ jsou spojité funkce na nějakém intervalu I, $a_0(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$. Rovnici

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y \;=\; b(x),$$

kde $y \in C^n(I)$ je hledaná funkce, nazýváme *lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu* (LDR n-tého řádu).
Je-li $b(x) = 0$ pro všechna $x \in I$ nazýváme rovnici *homogenní LDR* (HLDR).
Existuje-li $x \in I$ takové, že $b(x) \neq 0$ nazýváme rovnici *nehomogenní LDR* (NLDR).
Funkce $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ nazýváme koeficienty LDR.
Jestliže tyto funkce nezávisí na x (jsou konstantní) nazávame rovnici *LDR s konstantními koeficienty*.

Proč lineární?
Nechť $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x) \in C(I)$
Definujeme-li zobrazení $L: \; C^n(I) \;\to\; C(I)$ předpisem

$$L(y) \;=\; a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y,$$

platí, že zobrazení L je lineární.
Nyní můžeme LDR zapsat

$$L\,y \;=\; b(x),$$

kde L je lineární zobrazení.

Věta o existenci a jednoznačnosti
Nechť $x_0 \in I$ a $y_0,\, y_1,\, y_2, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. *Počáteční podmínky* pro LDR n-tého řádu $Ly \;=\; b(x)$ jsou tvaru

$$y(x_0) = y_0,\; y'(x_0) = y_1,\; y''(x_0) = y_2, \ldots, y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}.$$

Věta: Nechť $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), b(x) \in C(I)$ a $a_0(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$ a nechť $x_0 \in I$, potom pro libovolné $y_0,\, y_1,\, y_2, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno řešení $y \in C^n(I)$ diferenciální rovnice $Ly \;=\; b(x)$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(x_0) = y_0,\; y'(x_0) = y_1,\; y''(x_0) = y_2, \ldots, y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$.

LDR 1. a 2. řádu

Obecně platí, a_0, a_1, a_2 jsou funkce proměnné x:

$$a_0, a_1, a_2 \in C(I).$$

LDR 1. řádu:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y \;=\; b(x)$$

Počáteční podmínky: $y(x_0) = y_0$. Řešení $y \in C^1(I)$.
LDR 2. řádu:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \;=\; b(x)$$

Počáteční podmínky: $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1$. Řešení $y \in C^2(I)$.
Nadále budeme pracovat jen s LDR 2. řádu. Všechny definice, věty a tvrzení budou podobně platit pro LDR n-tého řádu.

Homogenní LDR 2. řádu

$L :\ C^2(I) \;\rightarrow\; C(I)$
$L(y) \;=\; a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y,$
L je lineární
HLDR 2. řádu: $Ly \;=\; 0$
Množinu všech řešeni HLDR označme V_H, potom můžeme psát

$$V_H = \{y \in C^2(I);\ Ly = 0\} = \mathcal{N}(L).$$

Protože L je lineární víme, že V_H je lineární podprostor $C^2(I)$.
Věta: Množina V_H je lineární podprostor $C^2(I)$ a platí $\dim V_H = 2$.
Definice: Bázi prostoru V_H názýváme *fundamentální systém řešení HLDR*
Je-li $y_1(x),\ y_2(x)$ fundamentální systém řešeni HLDR 2. řádu potom obecné řešení je tvaru

$$y(x) \;=\; C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

Homogenní LDR 1. řádu

$L :\ C^1(I) \;\rightarrow\; C(I)$
$L(y) \;=\; a_0(x)y' + a_1(x)y,$
L je lineární

HLDR 1. řádu: $Ly = 0$
V_H je lineární podprostor $C^1(I)$, $\dim V_H = 1$.
Je-li $y_1(x)$ fundamentální systém řešeni HLDR 1. řádu potom obecné řešení je tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x).$$

HLDR 1. řádu umíme řešit metodou separace proměnných.

Řešení homogenní LDR 2.řádu s konstantními koeficienty.

$$a_0 y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = 0 \quad \text{pro } \forall\, x \in I$$

$a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ jsou konstanty a $a_0 \neq 0$.
Algebraická rovnice

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

se nazývá *charakteristická rovnice* LDR 2. řádu s konstantními koeficienty.
Charakteristická rovnice má 2 kořemy $\lambda_1,\ \lambda_2$, mohou nastat tři případy

1. dva různé reálné kořeny,
2. dva stejné reálné kořeny (dvojnásobný kořen),
3. dva komplexně sdružené kořeny.

Řešení homogenní LDR 2.řádu s konstantními koeficienty-2

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ potom fundamentální systém je tvaru $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x},\ y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ a obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1\, \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\, \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$

2. $\lambda_{12} = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$ potom fundamentální systém je tvaru $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x},\ y_2(x) = x\ \mathrm{e}^{\lambda x}$ a obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1\, \mathrm{e}^{\lambda x} + C_2 x\ \mathrm{e}^{\lambda x}$$

3. $\lambda_{12} = a \pm \mathrm{i}b,\ \ a, b \in \mathbb{R}$ potom fundamentální systém je tvaru $y_1(x) = \mathrm{e}^{a\,x}\cos b\,x,\ y_2(x) = \mathrm{e}^{a\,x}\sin b\,x$ a obecné řešení má tvar

$$y(x) \ = \ C_1\,\mathrm{e}^{a\,x}\cos b\,x + C_2\ \mathrm{e}^{a\,x}\sin b\,x$$

Metoda snížení řádu

Předpokládejme rovnici:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' \ = \ 0, \quad a_0(x) \neq 0, \quad x \in I.$$

Zavedeme substituci: $z(x) = y'(x) \quad \forall\, x \in I$. Dostaneme rovnici:

$$a_0(x)z' + a_1(x)z \ = \ 0$$

HLDR 1. řádu vyřešíme metodu separace a dostaneme:

$$z(x) = C_1 z_1(x)$$

$$y(x) \ = \ \int z(x)\mathrm{d}x \ = \ C_1 \int z_1(x)\mathrm{d}x \ + \ C_2.$$

Fundamentální systém původní rovnice je

$$y_1(x) = \int z_1(x)\mathrm{d}x,\ \ y_2(x) = 1.$$

Řešení nehomogenní LDR 2. řádu

Uvažujme obecnou LDR 2. řádu

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \ = \ b(x)$$

Nechť $y_1(x),\ y_2(x)$ je fundamentální systém.
Označme řešení HLDR

$$y_H(x, \boldsymbol{C}) = C_1\,y_1(x) \ + \ C_2\,y_2(x), \ \ \text{kde } \boldsymbol{C} = (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Věta: Obecné řešení NLDR 2. řádu má tvar

$$y_N(x, \boldsymbol{C}) \;=\; y_H(x, \boldsymbol{C}) \;+\; y_p(x),\; \boldsymbol{C} = \in \mathbb{R}^2,$$

kde $y_H(x, \boldsymbol{C})$ je řešení HLDR 2. ř. a $y_p(x)$ je nějaké partikulární řešení NLDR 2. ř.

Metoda variace konstant

Řešíme NLDR 2. ř.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \;=\; b(x) \quad \forall\, x \in I,\; a_0(x) \neq 0\, \forall\, x \in I.$$

1. krok

Řešíme přidruženou HLDR 2. ř.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \;=\; 0 \quad \forall\, x \in I,\; a_0(x) \neq 0\, \forall\, x \in I.$$

Nechť $y_1(x),\; y_2(x)$ je fundamentální systém HLDR 2. ř.

$$y_H \;=\; C_1\, y_1(x) \;+\; C_2\, y_2(x)$$

2. krok

Hledáme nějaké partikulární řešení NLDR 2. ř. Zkusíme ho hledat ve tvaru

$$y_p(x) \;=\; c_1(x)\, y_1(x) \;+\; c_2(x)\, y_2(x) \quad \forall\, x \in I.$$

Hledáme funkce $c_1'(x)$ a $c_2'(x)$ splňující rovnice:

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1(x) \;+\; c_2'(x)y_2(x) \;&=\; 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) \;+\; c_2'(x)y_2'(x) \;&=\; \frac{b(x)}{a_0(x)}, \end{aligned}$$

potom

$$c_1(x) = \int c_1'(x)\mathrm{d}x \;\text{ a }\; c_2(x) = \int c_2'(x)\mathrm{d}x.$$

Dostáváme partikulární řešení HLDR 2. ř.

$$y_p(x) \;=\; c_1(x)\, y_1(x) \;+\; c_2(x)\, y_2(x) \quad \forall\, x \in I.$$

3. krok

$$\begin{aligned} y_N(x) &= y_H(x) + y_p(x) \quad \forall\, x \in I. \\ y_N(x) &= C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) + y_p(x) \quad \forall\, x \in I \text{ a } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Metoda odhadu

Připomeňme metodu odhadu pro řešení NLDR 2. ř. se spaciální pravou stranou.
Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty je rovnice tvaru

$$a_0\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_2\, y(x) = b(x) \quad \forall\, x \in I,\ a_0 \neq 0,$$

kde $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Předpokládejme, že $b(x)$ je speciální pravá strana ve tvaru

$$b(x) = e^{\alpha\, x}(P(x)\, \sin(\beta\, x) + Q(x)\, \cos(\beta\, x)),$$

kde $P(x), Q(x)$ jsou polynomy v proměnné x, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

1. krok

Řešíme přidruženou HLDR 2. ř. s konstantními koeficienty

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad \forall\, x \in I,\ a_0 \neq 0.$$

Nechť $y_1(x),\ y_2(x)$ je fundamentální systém, potom řešení HLDR 2. ř. je tvaru

$$y_H = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$$

2. krok

Hledáme nějaké partikulární řešení NLDR 2. ř. Zkusíme ho hledat ve tvaru

$$y_p(x) = x^k\, e^{\alpha\, x}(R(x)\, \sin(\beta\, x) + S(x)\, \cos(\beta\, x)), \text{ kde}$$

- $k \in \{0, 1, 2\}$

  0 $\alpha + i\beta$ není kořen charakteristické rovnice

  1 $\alpha + i\beta$ je jednonásobný kořen char. rovnice

  2 $\alpha + i\beta$ je dvojnásobný kořen char. rovnice

- $R(x), S(x)$ - polynomy stupně $\max\{\text{st. } P(x), \text{st. } Q(x)\}$

3. krok

Obecné řešení NLDR

$$\begin{aligned} y_N(x) &= y_H(x) + y_p(x) \quad \forall\, x \in I. \\ y_N(x) &= C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) + y_p(x) \quad \forall\, x \in I \text{ a } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Okrajové úlohy

Uvažujme obecnou LDR 2. řádu

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x), \quad x \in \langle a, b \rangle$$

Počáteční podmínky

$$y(a) = y_0, \; y'(a) = y_1$$

Platí věta o existenci a jednoznačnosti.
Existuje právě jedno řešení splňující počáteční podmínky

Okrajové podmínky

$$y(a) = y_0, \; y(b) = y_1$$

Neplatí věta o existenci a jednoznačnosti.

- Existuje řešení
- neexistuje řešení
- existuje nekonečně mnoho řešení

splňující okrajové podmínky.