Kapitola 12: Soustavy diferenciálních rovnic 1. řádu

Základní pojmy
Definice: Rovnice tvaru

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= f(t,x,y)\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= g(t,x,y),\ t \in I\end{aligned}$$

nazýváme *soustavou dvou diferenciálních rovnic 1. řádu*. Řešením soustavy rozumíme takovou dvojici funkcí $(x(t), y(t))$, definovaných na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, které po dosazení do rovnic tyto rovnice splňují pro všechna $t \in I$.
Poznámka: Budeme psát

$$\begin{aligned}x' &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\ y' &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

Autonomní soustavy

Autonomní soustava je soustava

$$\begin{aligned}x' &= f(x,y)\\ y' &= g(x,y),\ t \in I\end{aligned}$$

řešením je $x = x(t)$, $y = y(t)$ $\forall t \in I$. Každému řešení $(x(t), y(t))$ $\forall t \in I$ odpovídá rovinná křivka.
Definice: Rovinnou křivku odpovídající řešení $(x(t), y(t))$ $\forall t \in I$ dané soustavy nazýváme *trajektorií* řešení. Rovnice $x = x(t)$, $y = y(t)$ $\forall t \in I$ jsou parametrickými rovnicemi trajektorie řešení. Bod $S = (x_0, y_0)$ nazýváme *rovnovážným stavem* soustavy jestliže $f(x_0, y_0) = 0,\ g(x_0, y_0) = 0$. Příslušné řešení $x(t) = x_0,\ y(t) = y_0\ \forall t \in I$ nazýváme stacionárním řešením.

Autonomní lineární systém
Definice: Soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{12}y\\ y' &= a_{21}x + a_{22}y,\end{aligned}$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2; j = 1, 2$ nazýváme *soustavu lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s konstantními koeficienty*. Matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

nazýváme *maticí soustavy*.

Poznámka: Označme $\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, pak $\vec{z}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ a soustavu lze pomocí matice A a vektorové funkce $\vec{z}(t)$ zapsat ve vektorovém tvaru

$$\vec{z}'(t) \, = \, A \, \vec{z}(t).$$

Řešení autonomní lineární soustavy

Protože zobrazení, které každé vektorové funkci $\vec{z}$ přiřadí vektorovou funkci $(\vec{z}' \, = \, A \, \vec{z})$ je lineární. Jeho jádro V_H je lineární podprostor prostoru $(C^1(I))^2$ dimenze 2. Fundamentální systém bude mít tedy dva prvky $\{\vec{z}_1(t), \, \vec{z}_2(t)\}$. Poznamenejme, že vektorové funkce $\vec{z}_1(t)$, $\vec{z}_2(t)$ jsou řešením autonomní lineární soustavy

$$\vec{z}'(t) \, = \, A \, \vec{z}(t).$$

a jsou to LN prvky $(C^1(I))^2$. *Obecné řešení* soustavy má tvar

$$\vec{z}(t) \, = \, C_1 \, \vec{z}_1(t) \, + \, C_2 \, \vec{z}_2(t).$$

Postup řešení soustavy DR

Hledáme řešení ve tvaru $\vec{z} = \mathrm{e}^{\lambda t} \vec{h}$, tj.

$$\vec{z} = \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda t} h_1 \\ \mathrm{e}^{\lambda t} h_2 \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do soustavy DR a dostaneme

$$\lambda \, \vec{h} \, = \, A \, \vec{h},$$

hledáme tedy číslo λ a vektor $\vec{h}$ tak, aby splňovaly předchozí rovnici.

Definice: Nenulový vektor $\vec{h}$ a číslo λ, které splňují rovnici $A \, \vec{h} = \lambda \, \vec{h}$ nazýváme *vlastním vektorem* a *vlastním číslem matice A*.

Poznámka: Vektor $\vec{h} \neq \vec{0}$ je vlastní vektor matice A příslušející vlastnímu číslu λ matice A.

Postup řešení soustavy DR - 2
Poznámka: Jestliže $\vec{h}$ je vlastní vektor matice A příslušející vlastnímu číslu λ, potom pro všechna nenulová $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\alpha\,\vec{h}$ také vlastním vektorem matice A příslušející vlastnímu číslu λ. Dále platí

$$\left(\lambda\,\vec{h} \;=\; A\,\vec{h},\; \vec{h} \neq \vec{O}\right) \;\Leftrightarrow\; \det(A \,-\, \lambda\,E) \;=\; 0,$$

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A \;=\; 0.$$

Mohou nastat tři případy:

1. dvě různá vlastní čísla $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
2. dvě stejná vlastní čísla $\lambda_1 = \lambda_2,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, (nebudeme dělat)
3. dvě komplexně sdružená vlastní čísla.

Případ 1.

$$\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \begin{array}{lll} \vec{h}_1 & \text{vlastní vektor přisl.} & \lambda_1 \\ \vec{h}_2 & \text{vlastní vektor přisl.} & \lambda_2 \end{array}$$

$$\text{Fundamentální systém}\quad \begin{array}{rcl} \vec{z}_1(t) & = & \mathrm{e}^{\lambda_1\,t}\,\vec{h}_1 \\ \vec{z}_2(t) & = & \mathrm{e}^{\lambda_2\,t}\,\vec{h}_2 \end{array}$$

Obecné řešení autonomní lineární soustavy dvou DR 1. řádu je:

$$\vec{z} \;=\; C_1\ \mathrm{e}^{\lambda_1\,t}\vec{h}_1 \;+\; C_2\ \mathrm{e}^{\lambda_2\,t}\vec{h}_2.$$

Případ 3.

Vlastní čísla $\lambda_{12} = a \,\pm\, \mathrm{i}\,b$, vlastní vektory budou také komplexně sdružené.

$$\text{Fundamentální systém}\quad \begin{array}{rcl} \vec{z}_1(t) & = & \mathrm{Re}(\,\mathrm{e}^{\lambda_1\,t}\,\vec{h}_1) \\ \vec{z}_2(t) & = & \mathrm{Im}(\,\mathrm{e}^{\lambda_1\,t}\,\vec{h}_1) \end{array}$$

Obecné řešení autonomní lineární soustavy dvou DR 1. řádu je:

$$\vec{z}(t) \;=\; C_1\,\vec{z}_1(t) \;+\; C_2\,\vec{z}_2(t).$$

Eulerova metoda

Metoda pro přibližné řešení soustavy DR 1. řádu.

Mějme soustavu DR 1. řádu

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= f(t,x,y)\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= g(t,x,y),\ t \in \langle a,b\rangle\end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $x(a) = x_0$, $y(a) = y_0$.

Zvolme dělení intervalu $\langle a,b\rangle$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ a krok metody $h = \frac{b-a}{n}$, potom $t_i = a + i\,h$.

Označme $x_i \doteq x(t_i)$ a $y_i \doteq y(t_i)$.

Potom jeden krok Eulerovy metody je

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + h\,f(t_i,x_i,y_i)\\ y_{i+1} &= y_i + h\,g(t_i,x_i,y_i).\end{aligned}$$

Model "Dravec - kořist

V rybníku žijí dva druhy ryb:

Malé ryby - kořist (živí se třeba planktonem a mají ho dostatek nezávisle na počtu ryb)

Velké ryby - dravec (požírají malé ryby)

Sestrojíme jednoduchý matematický model

$x(t)\ldots$ množství malých ryb v čase t

$y(t)\ldots$ množství velkých ryb v čase t

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\ldots$ rychlost změny množství malých ryb

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\ldots$ rychlost změny množství velkých ryb

Model "Dravec - kořist"- 2

Kdyby v rybníku byly jen malé ryby, chování malých ryb můžeme popsat rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a\,x(t),$$

kde $a > 0$ je přírůstkový koeficient.

Jestliže v rybníku budou i velké ryby, tak bude přírůstek malých ryb záviset na počtu velkých ryb. Místo koeficientu a bude koeficient $\tilde{a}$, kde

$$\tilde{a} \;=\; a \;-\; \alpha\, y(t), \quad \alpha > 0.$$

Rovnice pro chování malých ryb má pak tvar

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \;=\; (a - \alpha y(t))\, x(t).$$

Model "Dravec - kořist"- 3

Kdyby v rybníku byly jen velké ryby, chování velkých ryb můžeme popsat rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \;=\; -b\, y(t),$$

kde $b > 0$ je koeficient vymírání.

Jestliže v rybníku budou i malé ryby, tak bude vymírání velkých ryb záviset na počtu malých ryb. Místo koeficientu b bude koeficient $\tilde{b}$, kde

$$\tilde{b} \;=\; b \;-\; \beta\, x(t), \quad \beta > 0.$$

Rovnice pro chování velkých ryb má pak tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \;=\; -(b - \beta x(t))\, y(t).$$

Model "Dravec - kořist"- 4

Dostáváme tedy autonomní soustavu dvou diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= (a - \alpha y(t))\, x(t) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -(b - \beta x(t))\, y(t), \end{aligned}$$

kde $\alpha, \beta, a, b > 0$.

Soustava má dva rovnovážné stavy

$$S_1 = [0, 0], \quad S_2 = \left[\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right].$$

Nelineární soustavu DR neumíme řešit, ale umíme najít rovnici pro trajektorii řešení.

Nebo můžeme soustavu DR vyřešit numericky a dostaneme přibližné řešení $x(t), y(t)$ v nějakých uzlových bodech $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$.