

Kapitola 2: Reálné funkce více proměnných

Vlastnosti bodových množin

Definice: Je-li $\varepsilon > 0$, pak ε -ovým okolím bodu $X \in \mathbb{R}^n$ rozumíme množinu bodů

$$\mathcal{O}_\varepsilon(X) = \{Y \in \mathbb{R}^n, \rho(X, Y) < \varepsilon\}$$

Podobně prstencové okolí

$$\mathcal{P}_\varepsilon(X) = \{Y \in \mathbb{R}^n, 0 < \rho(X, Y) < \varepsilon\}$$

Definice: Necht' $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Říkáme, že bod $X \in M$ je **vnitřní bod** množiny M právě tehdy, když

$$\exists \mathcal{O}_\varepsilon(X) \text{ takové, že } \mathcal{O}_\varepsilon(X) \subseteq M.$$

Říkáme, že bod Y je **hraniční bod** množiny M právě tehdy, když

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(Y) \text{ platí } \mathcal{O}_\varepsilon(Y) \cap M \neq \emptyset \text{ a } \mathcal{O}_\varepsilon(Y) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$$

Vlastnosti bodových množin

Definice: Je-li $\varepsilon > 0$, pak ε -ovým okolím bodu $X \in \mathbb{R}^n$ rozumíme množinu bodů

$$\mathcal{O}_\varepsilon(X) = \{Y \in \mathbb{R}^n, \rho(X, Y) < \varepsilon\}$$

Podobně prstencové okolí

$$\mathcal{P}_\varepsilon(X) = \{Y \in \mathbb{R}^n, 0 < \rho(X, Y) < \varepsilon\}$$

Definice: Necht' $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Říkáme, že bod $X \in M$ je **vnitřní bod** množiny M právě tehdy, když

$$\exists \mathcal{O}_\varepsilon(X) \text{ takové, že } \mathcal{O}_\varepsilon(X) \subseteq M.$$

Říkáme, že bod Y je **hraniční bod** množiny M právě tehdy, když

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(Y) \text{ platí } \mathcal{O}_\varepsilon(Y) \cap M \neq \emptyset \text{ a } \mathcal{O}_\varepsilon(Y) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$$

Vlastnosti bodových množin

Definice: Je-li $\varepsilon > 0$, pak ε -ovým okolím bodu $X \in \mathbb{R}^n$ rozumíme množinu bodů

$$\mathcal{O}_\varepsilon(X) = \{Y \in \mathbb{R}^n, \rho(X, Y) < \varepsilon\}$$

Podobně prstencové okolí

$$\mathcal{P}_\varepsilon(X) = \{Y \in \mathbb{R}^n, 0 < \rho(X, Y) < \varepsilon\}$$

Definice: Necht' $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Říkáme, že bod $X \in M$ je **vnitřní bod** množiny M právě tehdy, když

$$\exists \mathcal{O}_\varepsilon(X) \text{ takové, že } \mathcal{O}_\varepsilon(X) \subseteq M.$$

Říkáme, že bod Y je **hraniční bod** množiny M právě tehdy, když

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(Y) \text{ platí } \mathcal{O}_\varepsilon(Y) \cap M \neq \emptyset \text{ a } \mathcal{O}_\varepsilon(Y) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$$

Vlastnosti bodových množin - 2

Definice: Množinu všech vnitřních bodů množiny M nazýváme **vnitřkem množiny M** a značíme $\text{int}(M)$

Množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme **hranicí množiny M** a značíme $\mathcal{H}(M)$.

Definice: Říkáme, že množina $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je **otevřená množina**, jestliže

$$\forall X \in G, \text{ platí že } X \text{ je vnitřní bod množiny } G.$$

Říkáme, že množina $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je **uzavřená množina**, jestliže doplněk $\mathbb{R}^n \setminus F$ je množina otevřená.

Věta: Množina $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavřená právě tehdy, když $\mathcal{H}(F) \subseteq F$.

Vlastnosti bodových množin - 2

Definice: Množinu všech vnitřních bodů množiny M nazýváme **vnitřkem množiny M** a značíme $\text{int}(M)$

Množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme **hranicí množiny M** a značíme $\mathcal{H}(M)$.

Definice: Říkáme, že množina $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je **otevřená množina**, jestliže

$$\forall X \in G, \text{ platí že } X \text{ je vnitřní bod množiny } G.$$

Říkáme, že množina $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je **uzavřená množina**, jestliže doplněk $\mathbb{R}^n \setminus F$ je množina otevřená.

Věta: Množina $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavřená právě tehdy, když $\mathcal{H}(F) \subseteq F$.

Vlastnosti bodových množin - 2

Definice: Množinu všech vnitřních bodů množiny M nazýváme **vnitřkem množiny M** a značíme $\text{int}(M)$

Množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme **hranicí množiny M** a značíme $\mathcal{H}(M)$.

Definice: Říkáme, že množina $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je **otevřená množina**, jestliže

$$\forall X \in G, \text{ platí že } X \text{ je vnitřní bod množiny } G.$$

Říkáme, že množina $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je **uzavřená množina**, jestliže doplněk $\mathbb{R}^n \setminus F$ je množina otevřená.

Věta: Množina $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavřená právě tehdy, když $\mathcal{H}(F) \subseteq F$.

Vlastnosti bodových množin - 2

Definice: Množinu všech vnitřních bodů množiny M nazýváme **vnitřkem množiny M** a značíme $\text{int}(M)$

Množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme **hranicí množiny M** a značíme $\mathcal{H}(M)$.

Definice: Říkáme, že množina $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je **otevřená množina**, jestliže

$$\forall X \in G, \text{ platí že } X \text{ je vnitřní bod množiny } G.$$

Říkáme, že množina $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je **uzavřená množina**, jestliže doplněk $\mathbb{R}^n \setminus F$ je množina otevřená.

Věta: Množina $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavřená právě tehdy, když $\mathcal{H}(F) \subseteq F$.

Vlastnosti bodových množin - 3

Definice: Říkáme, že množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je **omezená**, jestliže existuje $k > 0$ takové, že

$$\rho(X, O) \leq k,$$

vzdálenost bodu X od počátku je menší nebo rovna k .

Nechť zobrazení $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, $t \in \langle a, b \rangle$ je parametrizace křivky $\mathcal{K}$ v $\mathbb{R}^n$.

Definice: Říkáme, že $G \subset \mathbb{R}^n$ je **souvislá množina**, jestliže pro libovolné body $A, B \in G$ existuje křivka $\mathcal{K}$ ležící v G , pro kterou platí $\varphi(a) = A$ a $\varphi(b) = B$.

Souvislou otevřenou množinu budeme nazývat **oblast**.

Souvislou uzavřenou množinu budeme nazývat **uzavřenou oblastí**

Vlastnosti bodových množin - 3

Definice: Říkáme, že množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je **omezená**, jestliže existuje $k > 0$ takové, že

$$\rho(X, O) \leq k,$$

vzdálenost bodu X od počátku je menší nebo rovna k .

Nechť zobrazení $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, $t \in \langle a, b \rangle$ je parametrizace křivky $\mathcal{K}$ v $\mathbb{R}^n$.

Definice: Říkáme, že $G \subset \mathbb{R}^n$ je **souvislá množina**, jestliže pro libovolné body $A, B \in G$ existuje křivka $\mathcal{K}$ ležící v G , pro kterou platí $\varphi(a) = A$ a $\varphi(b) = B$.

Souvislou otevřenou množinu budeme nazývat **oblast**.

Souvislou uzavřenou množinu budeme nazývat **uzavřenou oblastí**

Vlastnosti bodových množin - 3

Definice: Říkáme, že množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je **omezená**, jestliže existuje $k > 0$ takové, že

$$\rho(X, O) \leq k,$$

vzdálenost bodu X od počátku je menší nebo rovna k .

Nechť zobrazení $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, $t \in \langle a, b \rangle$ je parametrizace křivky $\mathcal{K}$ v $\mathbb{R}^n$.

Definice: Říkáme, že $G \subset \mathbb{R}^n$ je **souvislá množina**, jestliže pro libovolné body $A, B \in G$ existuje křivka $\mathcal{K}$ ležící v G , pro kterou platí $\varphi(a) = A$ a $\varphi(b) = B$.

Souvislou otevřenou množinu budeme nazývat **oblast**.

Souvislou uzavřenou množinu budeme nazývat **uzavřenou oblastí**

Vlastnosti bodových množin - 3

Definice: Říkáme, že množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je **omezená**, jestliže existuje $k > 0$ takové, že

$$\rho(X, O) \leq k,$$

vzdálenost bodu X od počátku je menší nebo rovna k .

Nechť zobrazení $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, $t \in \langle a, b \rangle$ je parametrizace křivky $\mathcal{K}$ v $\mathbb{R}^n$.

Definice: Říkáme, že $G \subset \mathbb{R}^n$ je **souvislá množina**, jestliže pro libovolné body $A, B \in G$ existuje křivka $\mathcal{K}$ ležící v G , pro kterou platí $\varphi(a) = A$ a $\varphi(b) = B$.

Souvislou otevřenou množinu budeme nazývat **oblast**.

Souvislou uzavřenou množinu budeme nazývat **uzavřenou oblastí**

Vlastnosti bodových množin - 3

Definice: Říkáme, že množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je **omezená**, jestliže existuje $k > 0$ takové, že

$$\rho(X, O) \leq k,$$

vzdálenost bodu X od počátku je menší nebo rovna k .

Nechť zobrazení $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, $t \in \langle a, b \rangle$ je parametrizace křivky $\mathcal{K}$ v $\mathbb{R}^n$.

Definice: Říkáme, že $G \subset \mathbb{R}^n$ je **souvislá množina**, jestliže pro libovolné body $A, B \in G$ existuje křivka $\mathcal{K}$ ležící v G , pro kterou platí $\varphi(a) = A$ a $\varphi(b) = B$.

Souvislou otevřenou množinu budeme nazývat **oblast**.

Souvislou uzavřenou množinu budeme nazývat **uzavřenou oblastí**

Vlastnosti bodových množin - 4

Definice: Říkáme, že množina $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je **konvexní**, jestliže pro všechny body $A, B \in K$ leží úsečka s krajními body A, B v množině K .

Funkce více reálných proměnných

Definice: Necht' $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$. **Reálnou funkcí n reálných proměnných**, definovanou na množině M , rozumíme předpis f , který každé uspořádané n -tici reálných čísel

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$$

přiřazuje právě jedno reálné číslo $y \in \mathbb{R}$.

Množinu M nazýváme **definičním oborem** funkce f a píšeme $\mathcal{D}(f) = M$.

Přirozeným definičním oborem rozumíme množinu všech uspořádaných n -tic reálných čísel, pro která má předpis f smysl.

Definice: Necht' $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je funkce n reálných proměnných definovaná na $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$. Potom **grafem funkce f** rozumíme množinu

$$\text{graf}(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x_1, x_2, \dots, x_n) \in M \text{ a } y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}.$$

Funkce více reálných proměnných

Definice: Necht' $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$. Reálnou funkcí n reálných proměnných, definovanou na množině M , rozumíme předpis f , který každé uspořádané n -tici reálných čísel

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$$

přiřazuje právě jedno reálné číslo $y \in \mathbb{R}$.

Množinu M nazýváme **definičním oborem** funkce f a píšeme $\mathcal{D}(f) = M$.

Přirozeným definičním oborem rozumíme množinu všech uspořádaných n -tic reálných čísel, pro která má předpis f smysl.

Definice: Necht' $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je funkce n reálných proměnných definovaná na $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$. Potom **grafem funkce f** rozumíme množinu

$$\text{graf}(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x_1, x_2, \dots, x_n) \in M \text{ a } y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}.$$

Funkce více reálných proměnných

Definice: Necht' $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$. Reálnou funkcí n reálných proměnných, definovanou na množině M , rozumíme předpis f , který každé uspořádané n -tici reálných čísel

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$$

přiřazuje právě jedno reálné číslo $y \in \mathbb{R}$.

Množinu M nazýváme **definičním oborem** funkce f a píšeme $\mathcal{D}(f) = M$.

Přirozeným definičním oborem rozumíme množinu všech uspořádaných n -tic reálných čísel, pro která má předpis f smysl.

Definice: Necht' $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je funkce n reálných proměnných definovaná na $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$. Potom **grafem funkce f** rozumíme množinu

$$\text{graf}(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x_1, x_2, \dots, x_n) \in M \text{ a } y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}.$$

Zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$

Definice: Necht' $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$. Zobrazením $\mathbf{f}$ z množiny M do množiny $\mathbb{R}^k$ rozumíme předpis, který každé uspořádané n -tici $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$ přiřazuje právě jednu uspořádanou k -tici $(y_1, y_2, \dots, y_k)$. Zapisujeme

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k) = \mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

nebo

$$\mathbf{f} : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

Množinu M nazýváme definičním oborem zobrazení $\mathbf{f}$ a píšeme $\mathcal{D}(\mathbf{f}) = M$.

Poznámka: $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_k)$, pro definiční obor platí

$$\mathcal{D}(\mathbf{f}) = \bigcap_{i=1}^k \mathcal{D}(f_i)$$

Zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$

Definice: Necht' $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$. Zobrazením $\mathbf{f}$ z množiny M do množiny $\mathbb{R}^k$ rozumíme předpis, který každé uspořádané n -tici $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$ přiřazuje právě jednu uspořádanou k -tici $(y_1, y_2, \dots, y_k)$. Zapisujeme

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k) = \mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

nebo

$$\mathbf{f} : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

Množinu M nazýváme definičním oborem zobrazení $\mathbf{f}$ a píšeme $\mathcal{D}(\mathbf{f}) = M$.

Poznámka: $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_k)$, pro definiční obor platí

$$\mathcal{D}(\mathbf{f}) = \bigcap_{i=1}^k \mathcal{D}(f_i)$$

Zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$

Definice: Necht' $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$. Zobrazením $\mathbf{f}$ z množiny M do množiny $\mathbb{R}^k$ rozumíme předpis, který každé uspořádané n -tici $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$ přiřazuje právě jednu uspořádanou k -tici $(y_1, y_2, \dots, y_k)$. Zapisujeme

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k) = \mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

nebo

$$\mathbf{f} : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

Množinu M nazýváme definičním oborem zobrazení $\mathbf{f}$ a píšeme $\mathcal{D}(\mathbf{f}) = M$.

Poznámka: $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_k)$, pro definiční obor platí

$$\mathcal{D}(\mathbf{f}) = \bigcap_{i=1}^k \mathcal{D}(f_i)$$

Spojitosť funkcí více proměnných

Definice: Necht' $M \subset \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Říkáme, že funkce f je **spojitá v bodě** $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M$, jestliže platí

$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(f(\mathbf{a})) \exists \mathcal{O}_\delta(\mathbf{a})$ takové, že $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}_\delta(\mathbf{a}) \cap M$ platí $f(\mathbf{x}) \in \mathcal{O}_\varepsilon(f(\mathbf{a}))$.

Funkce $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je **spojitá na množině** M , jestliže je spojitá v každém bodě $\mathbf{x} \in M$.

Spojitosť funkcí více proměnných

Definice: Necht' $M \subset \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Říkáme, že funkce f je **spojitá v bodě** $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M$, jestliže platí

$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(f(\mathbf{a})) \exists \mathcal{O}_\delta(\mathbf{a})$ takové, že $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}_\delta(\mathbf{a}) \cap M$ platí $f(\mathbf{x}) \in \mathcal{O}_\varepsilon(f(\mathbf{a}))$.

Funkce $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je **spojitá na množině** M , jestliže je spojitá v každém bodě $\mathbf{x} \in M$.

Spojítost funkcí více proměnných - 2

Věta: Necht' $f : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \mathcal{D}(g) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Jsou-li funkce $f(\mathbf{x})$ a $g(\mathbf{x})$ spojité v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, potom jsou spojité v bodě $\mathbf{a}$ i funkce

$$f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x}), \quad f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}), \quad \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \text{ pokud } g(\mathbf{a}) \neq 0.$$

Věta: Necht' $f : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D}(g) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$\mathcal{H}(f) \subset \mathcal{D}(g)$ a $h(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$ ($h : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$).

Je-li funkce $f(\mathbf{x})$ spojitá v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a funkce $g(y)$ spojitá v bodě $f(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}$, potom funkce $h(\mathbf{x})$ je spojitá v bodě $\mathbf{a}$.

Věta: Necht' $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je definovaná předpisem

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$$

pro nějaké pevně $i = 1, \dots, n$. Potom funkce f je spojitá na $\mathbb{R}^n$.

Spojitost funkcí více proměnných - 2

Věta: Necht' $f : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \mathcal{D}(g) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Jsou-li funkce $f(\mathbf{x})$ a $g(\mathbf{x})$ spojité v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, potom jsou spojité v bodě $\mathbf{a}$ i funkce

$$f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x}), \quad f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}), \quad \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \text{ pokud } g(\mathbf{a}) \neq 0.$$

Věta: Necht' $f : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D}(g) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$\mathcal{H}(f) \subset \mathcal{D}(g)$ a $h(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$ ($h : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$).

Je-li funkce $f(\mathbf{x})$ spojitá v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a funkce $g(y)$ spojitá v bodě $f(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}$, potom funkce $h(\mathbf{x})$ je spojitá v bodě $\mathbf{a}$.

Věta: Necht' $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je definovaná předpisem

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$$

pro nějaké pevně $i = 1, \dots, n$. Potom funkce f je spojitá na $\mathbb{R}^n$.

Globální maximum a minimum

Definice: Necht' $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Říkáme, že funkce f má v bodě $\mathbf{x}_0 \in M$ **globální maximum (resp. minimum)**, jestliže pro každé $\mathbf{x} \in M$ platí

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad (\text{resp. } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)).$$

Věta: Necht' $M \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená a ohraničená množina a funkce f je spojitá na množině M . Potom funkce f nabývá na množině M svého maxima a minima.

Limita funkcí více proměnných

Definice: Necht' $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a necht' pro všechna prstencová okolí $\mathcal{P}_\delta(\mathbf{a})$ platí $\mathcal{P}_\delta(\mathbf{a}) \cap M \neq \emptyset$. Říkáme, že **funkce má v bodě $\mathbf{a}$ limitu L** a píšeme $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ jestliže

$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(L) \exists \mathcal{P}_\delta(\mathbf{a})$ takové, že $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{P}_\delta(\mathbf{a}) \cap M$ platí $f(\mathbf{x}) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L)$.

Věta: Funkce $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $\mathbf{a}$ nejvýše jednu limitu.

Věta: Necht' $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, M je otevřená a $\mathbf{a} \in M$. Potom funkce f je spojitá v bodě $\mathbf{a} \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$

Limita funkcí více proměnných

Definice: Necht' $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a necht' pro všechna prstencová okolí $\mathcal{P}_\delta(\mathbf{a})$ platí $\mathcal{P}_\delta(\mathbf{a}) \cap M \neq \emptyset$. Říkáme, že **funkce má v bodě $\mathbf{a}$ limitu L** a píšeme $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ jestliže

$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(L) \exists \mathcal{P}_\delta(\mathbf{a})$ takové, že $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{P}_\delta(\mathbf{a}) \cap M$ platí $f(\mathbf{x}) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L)$.

Věta: Funkce $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $\mathbf{a}$ nejvýše jednu limitu.

Věta: Necht' $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, M je otevřená a $\mathbf{a} \in M$.
Potom funkce f je spojitá v bodě $\mathbf{a} \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$

Limita funkcí více proměnných

Definice: Necht' $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a necht' pro všechna prstencová okolí $\mathcal{P}_\delta(\mathbf{a})$ platí $\mathcal{P}_\delta(\mathbf{a}) \cap M \neq \emptyset$. Říkáme, že **funkce má v bodě $\mathbf{a}$ limitu L** a píšeme $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ jestliže

$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(L) \exists \mathcal{P}_\delta(\mathbf{a})$ takové, že $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{P}_\delta(\mathbf{a}) \cap M$ platí $f(\mathbf{x}) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L)$.

Věta: Funkce $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $\mathbf{a}$ nejvýše jednu limitu.

Věta: Necht' $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, M je otevřená a $\mathbf{a} \in M$. Potom funkce f je spojitá v bodě $\mathbf{a} \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$