Kapitola 2: Reálné funkce více proměnných

Vlastnosti bodových množin
Definice: Je-li $\varepsilon > 0$, pak *ε-ovým okolím bodu* $X \in \mathbb{R}^n$ rozumíme množinu bodů

$$\mathcal{O}_\varepsilon(X) = \{Y \in \mathbb{R}^n,\ \rho(X,Y) < \varepsilon\}$$

Podobně prstencové okolí

$$\mathcal{P}_\varepsilon(X) = \{Y \in \mathbb{R}^n,\ 0 < \rho(X,Y) < \varepsilon\}$$

Definice: Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Říkáme, že bod $X \in M$ je *vnitřní bod* množiny M právě tehdy, když

$$\exists\, \mathcal{O}_\varepsilon(X) \text{ takové, že } \mathcal{O}_\varepsilon(X) \subseteq M\,.$$

Říkáme, že bod Y je *hraniční bod* množiny M právě tehdy, když

$$\forall\, \mathcal{O}_\varepsilon(Y) \text{ platí } \mathcal{O}_\varepsilon(Y) \cap M \neq \emptyset \text{ a } \mathcal{O}_\varepsilon(Y) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$$

Vlastnosti bodových množin - 2
Definice: Množinu všech vnitřních bodů množiny M nazýváme *vnitřkem množiny* M a značíme int(M) Množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme *hranicí množiny* M a značíme $\mathcal{H}(M)$.
Definice: Říkáme, že množina $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je *otevřená množina*, jestliže

$$\forall\, X \in G,\ \text{platí že } X \text{ je vnitřní bod množiny } G\,.$$

Říkáme, že množina $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je *uzavřená množina*, jestliže doplněk $\mathbb{R}^n \setminus F$ je množina otevřená.
Věta: Množina $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavřená právě tehdy, když $\mathcal{H}(F) \subseteq F$.

Vlastnosti bodových množin - 3
Definice: Říkáme, že množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je *omezená*, jestliže existuje $k > 0$ takové, že

$$\rho(X,O) \leq k,$$

vzdálenost bodu X od počátku je menší nebo rovna k.

Nechť zobrazení $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)),\ t \in \langle a,b\rangle$ je parametrizace křivky $\mathcal{K}$ v $\mathbb{R}^n$.

Definice: Říkáme, že $G \subset \mathbb{R}^n$ je *souvislá množina*, jestliže pro libovolné body $A, B \in G$ existuje křivka $\mathcal{K}$ ležící v G, pro kterou platí $\boldsymbol{\varphi}(a) = A$ a $\boldsymbol{\varphi}(b) = B$.

Souvislou otevřenou množinu budeme nazývat *oblast*.

Souvislou uzavřenou množinu budeme nazývat *uzavřenou oblastí*

Vlastnosti bodových množin - 4
Definice: Říkáme, že množina $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je *konvexní*, jestliže pro všechny body $A, B \in K$ leží úsečka s krajními body A, B v množině K.

Funkce více reálných proměnných
Definice: Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n,\ M \neq \emptyset$. *Reálnou funkcí n reálných proměnných*, definovanou na množině M, rozumíme předpis f, který každé uspořádané n-tici reálných čísel

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$$

přiřazuje právě jedno reálné číslo $y \in \mathbb{R}$. Množinu M nazýváme *definičním oborem* funkce f a píšeme $\mathcal{D}(f) = M$.
Přirozeným definičním oborem rozumíme množinu všech uspořádaných n-tic reálných čísel, pro která má předpis f smysl.
Definice: Nechť $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je funkce n reálných proměnných definovaná na $M \subseteq \mathbb{R}^n,\ M \neq \emptyset$. Potom *grafem funkce* f rozumíme množinu

$$\text{graf}(f) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1};\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M \text{ a } y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}.$$

Zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$
Definice: Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n,\ M \neq \emptyset$. *Zobrazením $\boldsymbol{f}$ z množiny M do množiny $\mathbb{R}^k$* rozumíme předpis, který každé uspořádané n-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$ přiřazuje právě jednu uspořádanou k-tici $(y_1, y_2, \ldots, , y_k)$. Zapisujeme

$$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, , y_k) = \boldsymbol{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

nebo

$$\boldsymbol{f} : M \subseteq \mathbb{R}^n \ \rightarrow\ \mathbb{R}^k$$

Množinu M nazýváme definičním oborem zobrazení $\boldsymbol{f}$ a píšeme $\mathcal{D}(\boldsymbol{f}) = M$.

Poznámka: $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_k)$, pro definiční obor platí $\mathcal{D}(\boldsymbol{f}) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{D}(f_i)$

Spojitost funkcí více proměnných
Definice: Nechť $M \subset \mathbb{R}^n,\ M \neq \emptyset,\ f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Říkáme, že fukce f je *spojitá v bodě* $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M$, jestliže platí

$$\forall\, \mathcal{O}_\varepsilon(f(\boldsymbol{a}))\ \exists\, \mathcal{O}_\delta(\boldsymbol{a}) \text{ takové, že } \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathcal{O}_\delta(\boldsymbol{a}) \cap M \text{ platí } f(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{O}_\varepsilon(f(\boldsymbol{a})).$$

Funkce $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je *spojitá na množině* M, jestliže je spojitá v každém bodě $\boldsymbol{x} \in M$.

Spojitost funkcí více proměnných - 2
Věta: Nechť $f : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \mathcal{D}(g) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Jsou-li funkce $f(\boldsymbol{x})$ a $g(\boldsymbol{x})$ spojité v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, potom jsou spojité v bodě $\boldsymbol{a}$ i funkce

$$f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x}), \quad f(\boldsymbol{x}) \cdot g(\boldsymbol{x}), \quad \frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} \text{ pokud } g(\boldsymbol{a}) \neq 0\,.$$

Věta: Nechť $f : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D}(g) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) \subset \mathcal{D}(g)$ a $h(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x}))$ ($h : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$). Je-li funkce $f(\boldsymbol{x})$ spojitá v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a funkce $g(y)$ spojitá v bodě $f(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}$, potom funkce $h(\boldsymbol{x})$ je spojitá v bodě $\boldsymbol{a}$.
Věta: Nechť $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je definovaná předpisem

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$$

pro nějaké pevně $i = 1, \ldots, n$. Potom funkce f je spojitá na $\mathbb{R}^n$.

Globální maximum a minimum
Definice: Nechť $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Říkáme, že funkce f má v bodě $\boldsymbol{x}_0 \in M$ *globální maximum (resp. minimum)*, jestliže pro každé $\boldsymbol{x} \in M$ platí

$$f(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x}_0) \qquad \text{(resp. } f(\boldsymbol{x}) \ge f(\boldsymbol{x}_0)\text{)}.$$

Věta: Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená a ohraničená množina a funkce f je spojitá na množině M. Potom funkce f nabývá na množině M svého maxima a minima.

Limita funkcí více proměnných
Definice: Nechť $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a nechť pro všechna prstencová okolí $\mathcal{P}_\delta(\boldsymbol{a})$ platí $\mathcal{P}_\delta(\boldsymbol{a}) \cap M \neq \emptyset$. Říkáme, že *funkce má v bodě $\boldsymbol{a}$ limitu L* a píšeme $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = L$ jestliže

$$\forall\, \mathcal{O}_\varepsilon(L)\ \exists\, \mathcal{P}_\delta(\boldsymbol{a}) \text{ takové, že } \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathcal{P}_\delta(\boldsymbol{a}) \cap M \text{ platí } f(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L).$$

Věta: Funkce $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ nejvýše jednu limitu.

Věta: Nechť $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, M je otevřená a $\boldsymbol{a} \in M$. Potom funkce f je spojitá v bodě $\boldsymbol{a} \Leftrightarrow \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$[2cm]