

# **Kapitola 3: Derivace funkcí více proměnných**

# Parciální derivace

**Definice:** Necht'  $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce definovaná na  $\mathcal{O}(\mathbf{a})$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M$ . Potom **parciální derivací funkce  $f$  podle  $x_j$  v bodě  $\mathbf{a}$**  rozumíme

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_j + h, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h}.$$

Druhou parciální derivací podle proměnných  $x_i$  a  $x_j$  na otevřené množině  $G \subset \mathbb{R}^n$  rozumíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right), \quad \mathbf{x} \in G.$$

**Věta:** Má-li funkce  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  spojitě všechny druhé parciální derivace na otevřené množině  $G \subset \mathbb{R}^n$ , pak na  $G$  platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}).$$

# Parciální derivace

**Definice:** Necht'  $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce definovaná na  $\mathcal{O}(\mathbf{a})$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M$ . Potom **parciální derivací funkce  $f$  podle  $x_j$  v bodě  $\mathbf{a}$**  rozumíme

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_j + h, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h}.$$

Druhou parciální derivací podle proměnných  $x_i$  a  $x_j$  na otevřené množině  $G \subset \mathbb{R}^n$  rozumíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right), \quad \mathbf{x} \in G.$$

**Věta:** Má-li funkce  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  spojitě všechny druhé parciální derivace na otevřené množině  $G \subset \mathbb{R}^n$ , pak na  $G$  platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}).$$

# Parciální derivace

**Definice:** Necht'  $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce definovaná na  $\mathcal{O}(\mathbf{a})$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M$ . Potom **parciální derivací funkce  $f$  podle  $x_j$  v bodě  $\mathbf{a}$**  rozumíme

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_j + h, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h}.$$

Druhou parciální derivací podle proměnných  $x_i$  a  $x_j$  na otevřené množině  $G \subset \mathbb{R}^n$  rozumíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right), \quad \mathbf{x} \in G.$$

**Věta:** Má-li funkce  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  spojitě všechny druhé parciální derivace na otevřené množině  $G \subset \mathbb{R}^n$ , pak na  $G$  platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}).$$

# Parciální derivace

**Definice:** Necht'  $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce definovaná na  $\mathcal{O}(\mathbf{a})$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M$ . Potom **parciální derivací funkce  $f$  podle  $x_j$  v bodě  $\mathbf{a}$**  rozumíme

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_j + h, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h}.$$

Druhou parciální derivací podle proměnných  $x_i$  a  $x_j$  na otevřené množině  $G \subset \mathbb{R}^n$  rozumíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right), \quad \mathbf{x} \in G.$$

**Věta:** Má-li funkce  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  spojitě všechny druhé parciální derivace na otevřené množině  $G \subset \mathbb{R}^n$ , pak na  $G$  platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}).$$

# Množiny $C^k(G)$

Můžeme nyní zavést množiny:

$$C(G) = \{f, \text{ kde } f \text{ je spojitá funkce na } G\}$$

$$C^k(G) = \{f, \text{ kde } f \text{ má } k\text{-té spojitě parciální derivace na } G\}$$

Je-li  $f \in C^1(G)$  říkáme, že  $f$  je spojitě diferencovatelná na  $G$

Je-li  $f \in C^k(G)$  říkáme, že  $f$  je  $k$ -krát spojitě diferencovatelná na  $G$ .

**Věta:** Nechť  $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G$  je otevřená podmnožina  $M$ . Jestliže  $f \in C^1(G)$ , potom  $f$  je spojitá na  $G$ .

**Poznámka:** Platí

$$C^{k+1}(G) \subset C^k(G), \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

# Množiny $C^k(G)$

Můžeme nyní zavést množiny:

$$C(G) = \{f, \text{ kde } f \text{ je spojitá funkce na } G\}$$

$$C^k(G) = \{f, \text{ kde } f \text{ má } k\text{-té spojitě parciální derivace na } G\}$$

Je-li  $f \in C^1(G)$  říkáme, že  $f$  je spojitě diferencovatelná na  $G$

Je-li  $f \in C^k(G)$  říkáme, že  $f$  je  $k$ -krát spojitě diferencovatelná na  $G$ .

**Věta:** Nechť  $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G$  je otevřená podmnožina  $M$ .  
Jestliže  $f \in C^1(G)$ , potom  $f$  je spojitá na  $G$ .

**Poznámka:** Platí

$$C^{k+1}(G) \subset C^k(G), \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

# Množiny $C^k(G)$

Můžeme nyní zavést množiny:

$$C(G) = \{f, \text{ kde } f \text{ je spojitá funkce na } G\}$$

$$C^k(G) = \{f, \text{ kde } f \text{ má } k\text{-té spojitě parciální derivace na } G\}$$

Je-li  $f \in C^1(G)$  říkáme, že  $f$  je spojitě diferencovatelná na  $G$

Je-li  $f \in C^k(G)$  říkáme, že  $f$  je  $k$ -krát spojitě diferencovatelná na  $G$ .

**Věta:** Necht'  $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G$  je otevřená podmnožina  $M$ . Jestliže  $f \in C^1(G)$ , potom  $f$  je spojitá na  $G$ .

**Poznámka:** Platí

$$C^{k+1}(G) \subset C^k(G), \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$



# Množiny $C^k(G)$

Můžeme nyní zavést množiny:

$$C(G) = \{f, \text{ kde } f \text{ je spojitá funkce na } G\}$$

$$C^k(G) = \{f, \text{ kde } f \text{ má } k\text{-té spojitě parciální derivace na } G\}$$

Je-li  $f \in C^1(G)$  říkáme, že  $f$  je spojitě diferencovatelná na  $G$

Je-li  $f \in C^k(G)$  říkáme, že  $f$  je  $k$ -krát spojitě diferencovatelná na  $G$ .

**Věta:** Necht'  $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G$  je otevřená podmnožina  $M$ . Jestliže  $f \in C^1(G)$ , potom  $f$  je spojitá na  $G$ .

**Poznámka:** Platí

$$C^{k+1}(G) \subset C^k(G), \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

# Gradient

**Definice:** Necht'  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  je funkce  $n$  proměnných, bod  $\mathbf{a} \in \mathcal{D}(f)$  a existuje  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ . Vektor

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right)$$

nazýváme **gradient funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{a}$**  a značíme

$\text{grad } f(\mathbf{a})$ .

## Derivace ve směru

**Definice:** Necht'  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  je funkce  $n$  proměnných  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}(f)$ ,  $f$  je definována na  $\mathcal{O}(\mathbf{x}_0)$ ,  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  takový, že  $\|\vec{a}\| = 1$ . Potom

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\vec{a}) - f(\mathbf{x}_0)}{h},$$

pokud existuje, nezýváme derivací funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{x}_0$  ve směru vektoru  $\vec{a}$  a značíme ji

$$Df(\mathbf{x}_0, \vec{a}).$$

**Věta:** Je-li  $f \in C^1(G)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina,  $\mathbf{x}_0 \in G$  a  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|\vec{a}\| = 1$ , pak

$$Df(\mathbf{x}_0, \vec{a}) = \text{grad } f(\mathbf{x}_0) \vec{a}.$$

## Derivace ve směru

**Definice:** Necht'  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  je funkce  $n$  proměnných  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}(f)$ ,  $f$  je definována na  $\mathcal{O}(\mathbf{x}_0)$ ,  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  takový, že  $\|\vec{a}\| = 1$ . Potom

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\vec{a}) - f(\mathbf{x}_0)}{h},$$

pokud existuje, nezýváme derivací funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{x}_0$  ve směru vektoru  $\vec{a}$  a značíme ji

$$Df(\mathbf{x}_0, \vec{a}).$$

**Věta:** Je-li  $f \in C^1(G)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina,  $\mathbf{x}_0 \in G$  a  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|\vec{a}\| = 1$ , pak

$$Df(\mathbf{x}_0, \vec{a}) = \text{grad } f(\mathbf{x}_0) \vec{a}.$$

# Derivování složených funkcí

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{h} : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ g : G \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{H}(\mathbf{h}) \subseteq \mathcal{D}(g) = G \end{array} \right\} f = g \circ \mathbf{h} \Rightarrow f : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_k(\mathbf{x})), \text{ kde } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g(\mathbf{a}) = g(a_1, a_2, \dots, a_k)$$

**Věta:** Nechť  $G \subset \mathbb{R}^k$  je otevřená množina a  $g \in C^1(G)$ .  
Nechť  $H \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a funkce  $h_j \in C^1(H)$ , pro  $j = 1, \dots, k$ .

Nechť pro každé  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H$  je  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in G$ .

Položme  $a_j = h_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$  pro  $j = 1, 2, \dots, k$  a

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_k(x_1, \dots, x_n)).$$

Potom  $f \in C^1(H)$  a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial a_j}(\mathbf{a}) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial a_j}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

## Derivování složených funkcí

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{h}: H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ g: G \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{H}(\mathbf{h}) \subseteq \mathcal{D}(g) = G \end{array} \right\} f = g \circ \mathbf{h} \Rightarrow f: H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_k(\mathbf{x})), \text{ kde } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g(\mathbf{a}) = g(a_1, a_2, \dots, a_k)$$

**Věta:** Nechť  $G \subset \mathbb{R}^k$  je otevřená množina a  $g \in C^1(G)$ .  
Nechť  $H \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a funkce  $h_j \in C^1(H)$ , pro  $j = 1, \dots, k$ .

Nechť pro každé  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H$  je  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in G$ .

Položme  $a_j = h_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$  pro  $j = 1, 2, \dots, k$  a

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_k(x_1, \dots, x_n)).$$

Potom  $f \in C^1(H)$  a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial a_j}(\mathbf{a}) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial a_j}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

## Derivování složených funkcí

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{h}: H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ \mathbf{g}: G \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{H}(\mathbf{h}) \subseteq \mathcal{D}(\mathbf{g}) = G \end{array} \right\} f = \mathbf{g} \circ \mathbf{h} \Rightarrow f: H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_k(\mathbf{x})), \text{ kde } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g(\mathbf{a}) = g(a_1, a_2, \dots, a_k)$$

**Věta:** Necht'  $G \subset \mathbb{R}^k$  je otevřená množina a  $g \in C^1(G)$ .  
Necht'  $H \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a funkce  $h_j \in C^1(H)$ , pro  $j = 1, \dots, k$ .

Necht' pro každé  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H$  je  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in G$ .

Položme  $a_j = h_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$  pro  $j = 1, 2, \dots, k$  a

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_k(x_1, \dots, x_n)).$$

Potom  $f \in C^1(H)$  a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial a_j}(\mathbf{a}) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial a_j}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

## Derivování složených funkcí

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{h}: H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ \mathbf{g}: G \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{H}(\mathbf{h}) \subseteq \mathcal{D}(\mathbf{g}) = G \end{array} \right\} f = \mathbf{g} \circ \mathbf{h} \Rightarrow f: H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_k(\mathbf{x})), \text{ kde } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \mathbf{g}(\mathbf{a}) = g(a_1, a_2, \dots, a_k)$$

**Věta:** Nechť  $G \subset \mathbb{R}^k$  je otevřená množina a  $g \in C^1(G)$ .  
Nechť  $H \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a funkce  $h_j \in C^1(H)$ , pro  $j = 1, \dots, k$ .

Nechť pro každé  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H$  je  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in G$ .

Položme  $a_j = h_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$  pro  $j = 1, 2, \dots, k$  a

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_k(x_1, \dots, x_n)).$$

Potom  $f \in C^1(H)$  a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial a_j}(\mathbf{a}) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial a_j}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$



## Derivování složených funkcí

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{h}: H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ \mathbf{g}: G \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{H}(\mathbf{h}) \subseteq \mathcal{D}(\mathbf{g}) = G \end{array} \right\} f = \mathbf{g} \circ \mathbf{h} \Rightarrow f: H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_k(\mathbf{x})), \text{ kde } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \mathbf{g}(\mathbf{a}) = g(a_1, a_2, \dots, a_k)$$

**Věta:** Nechť  $G \subset \mathbb{R}^k$  je otevřená množina a  $\mathbf{g} \in C^1(G)$ .

Nechť  $H \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a funkce  $h_j \in C^1(H)$ , pro  $j = 1, \dots, k$ .

Nechť pro každé  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H$  je  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in G$ .

Položme  $a_j = h_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$  pro  $j = 1, 2, \dots, k$  a

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_k(x_1, \dots, x_n)).$$

Potom  $f \in C^1(H)$  a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial a_j}(\mathbf{a}) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial a_j}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

## Derivování složených funkcí

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{h}: H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ g: G \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{H}(\mathbf{h}) \subseteq \mathcal{D}(g) = G \end{array} \right\} f = g \circ \mathbf{h} \Rightarrow f: H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_k(\mathbf{x})), \text{ kde } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g(\mathbf{a}) = g(a_1, a_2, \dots, a_k)$$

**Věta:** Nechť  $G \subset \mathbb{R}^k$  je otevřená množina a  $g \in C^1(G)$ .  
Nechť  $H \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a funkce  $h_j \in C^1(H)$ , pro  $j = 1, \dots, k$ .

Nechť pro každé  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H$  je  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in G$ .

Položme  $a_j = h_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$  pro  $j = 1, 2, \dots, k$  a

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_k(x_1, \dots, x_n)).$$

Potom  $f \in C^1(H)$  a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial a_j}(\mathbf{a}) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial a_j}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

## Derivování složených funkcí

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{h}: H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ g: G \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{H}(\mathbf{h}) \subseteq \mathcal{D}(g) = G \end{array} \right\} f = g \circ \mathbf{h} \Rightarrow f: H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_k(\mathbf{x})), \text{ kde } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g(\mathbf{a}) = g(a_1, a_2, \dots, a_k)$$

**Věta:** Nechť  $G \subset \mathbb{R}^k$  je otevřená množina a  $g \in C^1(G)$ .  
Nechť  $H \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a funkce  $h_j \in C^1(H)$ , pro  $j = 1, \dots, k$ .

Nechť pro každé  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H$  je  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in G$ .

Položme  $a_j = h_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$  pro  $j = 1, 2, \dots, k$  a

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_k(x_1, \dots, x_n)).$$

Potom  $f \in C^1(H)$  a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial a_j}(\mathbf{a}) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial a_j}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

## Derivování složených funkcí

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{h}: H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ g: G \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{H}(\mathbf{h}) \subseteq \mathcal{D}(g) = G \end{array} \right\} f = g \circ \mathbf{h} \Rightarrow f: H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_k(\mathbf{x})), \text{ kde } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g(\mathbf{a}) = g(a_1, a_2, \dots, a_k)$$

**Věta:** Nechť  $G \subset \mathbb{R}^k$  je otevřená množina a  $g \in C^1(G)$ .  
Nechť  $H \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a funkce  $h_j \in C^1(H)$ , pro  $j = 1, \dots, k$ .

Nechť pro každé  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H$  je  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in G$ .

Položme  $a_j = h_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$  pro  $j = 1, 2, \dots, k$  a

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_k(x_1, \dots, x_n)).$$

Potom  $f \in C^1(H)$  a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial a_j}(\mathbf{a}) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial a_j}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

# Derivování složených funkcí

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{h}: H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ g: G \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{H}(\mathbf{h}) \subseteq \mathcal{D}(g) = G \end{array} \right\} f = g \circ \mathbf{h} \Rightarrow f: H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_k(\mathbf{x})), \text{ kde } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g(\mathbf{a}) = g(a_1, a_2, \dots, a_k)$$

**Věta:** Nechť  $G \subset \mathbb{R}^k$  je otevřená množina a  $g \in C^1(G)$ .  
Nechť  $H \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a funkce  $h_j \in C^1(H)$ , pro  $j = 1, \dots, k$ .

Nechť pro každé  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H$  je  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in G$ .

Položme  $a_j = h_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$  pro  $j = 1, 2, \dots, k$  a

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_k(x_1, \dots, x_n)).$$

Potom  $f \in C^1(H)$  a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial a_j}(\mathbf{a}) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial a_j}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

## Derivování složených funkcí

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{h}: H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ g: G \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{H}(\mathbf{h}) \subseteq \mathcal{D}(g) = G \end{array} \right\} f = g \circ \mathbf{h} \Rightarrow f: H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_k(\mathbf{x})), \text{ kde } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g(\mathbf{a}) = g(a_1, a_2, \dots, a_k)$$

**Věta:** Nechť  $G \subset \mathbb{R}^k$  je otevřená množina a  $g \in C^1(G)$ .  
Nechť  $H \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a funkce  $h_j \in C^1(H)$ , pro  $j = 1, \dots, k$ .

Nechť pro každé  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H$  je  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in G$ .

Položme  $a_j = h_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$  pro  $j = 1, 2, \dots, k$  a

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_k(x_1, \dots, x_n)).$$

Potom  $f \in C^1(H)$  a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial a_j}(\mathbf{a}) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial a_j}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

# Derivování složených funkcí - poznámky

Můžeme psát

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial a_j}(\mathbf{a}) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial a_j}(\mathbf{a}) \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial g}{\partial a_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial g}{\partial a_k}(\mathbf{a}) \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial a_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

## Derivace zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$

**Definice:** necht'  $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$  a  $f_i \in C^1(G)$  jsou funkce  $n$  proměnných  $x_1, \dots, x_n$ , označme  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Pak matici typu  $(k, n)$

$$f'(\mathbf{x}) = J_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

nazýváme **derivací zobrazení  $f$  v bodě  $\mathbf{x}$**  nebo také **Jacobiho maticí zobrazení  $f$  v bodě  $\mathbf{x}$** .

**Poznámka:** Jestliže  $k = 1$ , potom se jedná o funkci  $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a

$$f'(\mathbf{x}) = \text{grad } f(\mathbf{x}).$$



## Derivace zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$

**Definice:** necht'  $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$  a  $f_i \in C^1(G)$  jsou funkce  $n$  proměnných  $x_1, \dots, x_n$ , označme  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Pak matici typu  $(k, n)$

$$f'(\mathbf{x}) = J_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

nazýváme **derivací zobrazení  $f$  v bodě  $\mathbf{x}$**  nebo také **Jacobiho maticí zobrazení  $f$  v bodě  $\mathbf{x}$** .

**Poznámka:** Jestliže  $k = 1$ , potom se jedná o funkci  $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a

$$f'(\mathbf{x}) = \text{grad } f(\mathbf{x}).$$

# Derivování složených zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$

$$\left. \begin{array}{l} h : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ g : G \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathcal{H}(h) \subseteq \mathcal{D}(g) = G \end{array} \right\} f = g \circ h \Rightarrow f : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$h(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_k(\mathbf{x}))$ , kde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$g(\mathbf{a}) = (g_1(\mathbf{a}), g_2(\mathbf{a}), \dots, g_m(\mathbf{a}))$ , kde  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)$

**Věta:** Nechť  $G \subset \mathbb{R}^k$  je otevřená množina a  $g_j \in C^1(G)$  pro  $j = 1, \dots, m$ .

Nechť  $H \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a funkce  $h_i \in C^1(H)$ , pro  $i = 1, \dots, k$ .

Nechť pro každé  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H$  je  $h(\mathbf{x}) \in G$ .

Pak pro derivaci složeného zobrazení  $f(\mathbf{x}) = g(h(\mathbf{x}))$  platí

$$\underbrace{f'(\mathbf{x})}_{J_f(\mathbf{x})} = \underbrace{g'(h(\mathbf{x}))}_{J_g(h(\mathbf{x}))} \underbrace{h'(\mathbf{x})}_{J_h(\mathbf{x})}.$$

Jacobiho matice  
zobrazení  $f$   
v bodě  $\mathbf{x}$

Jacobiho matice  
zobrazení  $g$   
v bodě  $h(\mathbf{x})$

Jacobiho matice  
zobrazení  $h$   
v bodě  $\mathbf{x}$

# Derivování složených zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{h} : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ \mathbf{g} : G \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathcal{H}(\mathbf{h}) \subseteq \mathcal{D}(\mathbf{g}) = G \end{array} \right\} \mathbf{f} = \mathbf{g} \circ \mathbf{h} \Rightarrow \mathbf{f} : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_k(\mathbf{x}))$ , kde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\mathbf{g}(\mathbf{a}) = (g_1(\mathbf{a}), g_2(\mathbf{a}), \dots, g_m(\mathbf{a}))$ , kde  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)$

**Věta:** Necht'  $G \subset \mathbb{R}^k$  je otevřená množina a  $g_j \in C^1(G)$  pro  $j = 1, \dots, m$ .

Necht'  $H \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a funkce  $h_i \in C^1(H)$ , pro  $i = 1, \dots, k$ .

Necht' pro každé  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H$  je  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in G$ .

Pak pro derivaci složeného zobrazení  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))$  platí

$$\underbrace{\mathbf{f}'(\mathbf{x})}_{J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})} = \underbrace{\mathbf{g}'(\mathbf{h}(\mathbf{x}))}_{J_{\mathbf{g}}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))} \underbrace{\mathbf{h}'(\mathbf{x})}_{J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}.$$

Jacobiho matice  
zobrazení  $\mathbf{f}$   
v bodě  $\mathbf{x}$

Jacobiho matice  
zobrazení  $\mathbf{g}$   
v bodě  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$

Jacobiho matice  
zobrazení  $\mathbf{h}$   
v bodě  $\mathbf{x}$

# Derivování složených zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{h} : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ \mathbf{g} : G \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathcal{H}(\mathbf{h}) \subseteq \mathcal{D}(\mathbf{g}) = G \end{array} \right\} \mathbf{f} = \mathbf{g} \circ \mathbf{h} \Rightarrow \mathbf{f} : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_k(\mathbf{x}))$ , kde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\mathbf{g}(\mathbf{a}) = (g_1(\mathbf{a}), g_2(\mathbf{a}), \dots, g_m(\mathbf{a}))$ , kde  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)$

**Věta:** Necht'  $G \subset \mathbb{R}^k$  je otevřená množina a  $g_j \in C^1(G)$  pro  $j = 1, \dots, m$ .

Necht'  $H \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a funkce  $h_i \in C^1(H)$ , pro  $i = 1, \dots, k$ .

Necht' pro každé  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H$  je  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in G$ .

Pak pro derivaci složeného zobrazení  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))$  platí

$$\underbrace{\mathbf{f}'(\mathbf{x})}_{J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})} = \underbrace{\mathbf{g}'(\mathbf{h}(\mathbf{x}))}_{J_{\mathbf{g}}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))} \underbrace{\mathbf{h}'(\mathbf{x})}_{J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}.$$

Jacobiho matice  
zobrazení  $\mathbf{f}$   
v bodě  $\mathbf{x}$

Jacobiho matice  
zobrazení  $\mathbf{g}$   
v bodě  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$

Jacobiho matice  
zobrazení  $\mathbf{h}$   
v bodě  $\mathbf{x}$

# Derivování složených zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{h} : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ \mathbf{g} : G \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathcal{H}(\mathbf{h}) \subseteq \mathcal{D}(\mathbf{g}) = G \end{array} \right\} \mathbf{f} = \mathbf{g} \circ \mathbf{h} \Rightarrow \mathbf{f} : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_k(\mathbf{x})), \text{ kde } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{a}) = (g_1(\mathbf{a}), g_2(\mathbf{a}), \dots, g_m(\mathbf{a})), \text{ kde } \mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)$$

**Věta:** Necht'  $G \subset \mathbb{R}^k$  je otevřená množina a  $g_j \in C^1(G)$  pro  $j = 1, \dots, m$ .

Necht'  $H \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a funkce  $h_i \in C^1(H)$ , pro  $i = 1, \dots, k$ .

Necht' pro každé  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H$  je  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in G$ .

Pak pro derivaci složeného zobrazení  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))$  platí

$$\underbrace{\mathbf{f}'(\mathbf{x})}_{J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})} = \underbrace{\mathbf{g}'(\mathbf{h}(\mathbf{x}))}_{J_{\mathbf{g}}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))} \underbrace{\mathbf{h}'(\mathbf{x})}_{J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}.$$

Jacobiho matice  
zobrazení  $\mathbf{f}$   
v bodě  $\mathbf{x}$

Jacobiho matice  
zobrazení  $\mathbf{g}$   
v bodě  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$

Jacobiho matice  
zobrazení  $\mathbf{h}$   
v bodě  $\mathbf{x}$

# Derivování složených zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{h} : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ \mathbf{g} : G \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathcal{H}(\mathbf{h}) \subseteq \mathcal{D}(\mathbf{g}) = G \end{array} \right\} \mathbf{f} = \mathbf{g} \circ \mathbf{h} \Rightarrow \mathbf{f} : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_k(\mathbf{x}))$ , kde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\mathbf{g}(\mathbf{a}) = (g_1(\mathbf{a}), g_2(\mathbf{a}), \dots, g_m(\mathbf{a}))$ , kde  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)$

**Věta:** Necht'  $G \subset \mathbb{R}^k$  je otevřená množina a  $g_j \in C^1(G)$  pro  $j = 1, \dots, m$ .

Necht'  $H \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a funkce  $h_i \in C^1(H)$ , pro  $i = 1, \dots, k$ .

Necht' pro každé  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H$  je  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in G$ .

Pak pro derivaci složeného zobrazení  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))$  platí

$$\underbrace{\mathbf{f}'(\mathbf{x})}_{J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})} = \underbrace{\mathbf{g}'(\mathbf{h}(\mathbf{x}))}_{J_{\mathbf{g}}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))} \underbrace{\mathbf{h}'(\mathbf{x})}_{J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}.$$

Jacobiho matice  
zobrazení  $\mathbf{f}$   
v bodě  $\mathbf{x}$

Jacobiho matice  
zobrazení  $\mathbf{g}$   
v bodě  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$

Jacobiho matice  
zobrazení  $\mathbf{h}$   
v bodě  $\mathbf{x}$

# Derivování složených zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{h} : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ \mathbf{g} : G \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathcal{H}(\mathbf{h}) \subseteq \mathcal{D}(\mathbf{g}) = G \end{array} \right\} \mathbf{f} = \mathbf{g} \circ \mathbf{h} \Rightarrow \mathbf{f} : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_k(\mathbf{x}))$ , kde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\mathbf{g}(\mathbf{a}) = (g_1(\mathbf{a}), g_2(\mathbf{a}), \dots, g_m(\mathbf{a}))$ , kde  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)$

**Věta:** Necht'  $G \subset \mathbb{R}^k$  je otevřená množina a  $g_j \in C^1(G)$  pro  $j = 1, \dots, m$ .

Necht'  $H \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a funkce  $h_i \in C^1(H)$ , pro  $i = 1, \dots, k$ .

Necht' pro každé  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H$  je  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in G$ .

Pak pro derivaci složeného zobrazení  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))$  platí

$$\underbrace{\mathbf{f}'(\mathbf{x})}_{J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})} = \underbrace{\mathbf{g}'(\mathbf{h}(\mathbf{x}))}_{J_{\mathbf{g}}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))} \underbrace{\mathbf{h}'(\mathbf{x})}_{J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}.$$

Jacobiho matice  
zobrazení  $\mathbf{f}$   
v bodě  $\mathbf{x}$

Jacobiho matice  
zobrazení  $\mathbf{g}$   
v bodě  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$

Jacobiho matice  
zobrazení  $\mathbf{h}$   
v bodě  $\mathbf{x}$

# Derivování složených zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{h} : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ \mathbf{g} : G \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathcal{H}(\mathbf{h}) \subseteq \mathcal{D}(\mathbf{g}) = G \end{array} \right\} \mathbf{f} = \mathbf{g} \circ \mathbf{h} \Rightarrow \mathbf{f} : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_k(\mathbf{x}))$ , kde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\mathbf{g}(\mathbf{a}) = (g_1(\mathbf{a}), g_2(\mathbf{a}), \dots, g_m(\mathbf{a}))$ , kde  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)$

**Věta:** Necht'  $G \subset \mathbb{R}^k$  je otevřená množina a  $g_j \in C^1(G)$  pro  $j = 1, \dots, m$ .

Necht'  $H \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a funkce  $h_i \in C^1(H)$ , pro  $i = 1, \dots, k$ .

Necht' pro každé  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H$  je  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in G$ .

Pak pro derivaci složeného zobrazení  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))$  platí

$$\underbrace{\mathbf{f}'(\mathbf{x})}_{J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})} = \underbrace{\mathbf{g}'(\mathbf{h}(\mathbf{x}))}_{J_{\mathbf{g}}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))} \underbrace{\mathbf{h}'(\mathbf{x})}_{J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}.$$

Jacobiho matice  
zobrazení  $\mathbf{f}$   
v bodě  $\mathbf{x}$

Jacobiho matice  
zobrazení  $\mathbf{g}$   
v bodě  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$

Jacobiho matice  
zobrazení  $\mathbf{h}$   
v bodě  $\mathbf{x}$



# Derivování složených zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{h} : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ \mathbf{g} : G \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathcal{H}(\mathbf{h}) \subseteq \mathcal{D}(\mathbf{g}) = G \end{array} \right\} \mathbf{f} = \mathbf{g} \circ \mathbf{h} \Rightarrow \mathbf{f} : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_k(\mathbf{x}))$ , kde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\mathbf{g}(\mathbf{a}) = (g_1(\mathbf{a}), g_2(\mathbf{a}), \dots, g_m(\mathbf{a}))$ , kde  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)$

**Věta:** Necht'  $G \subset \mathbb{R}^k$  je otevřená množina a  $g_j \in C^1(G)$  pro  $j = 1, \dots, m$ .

Necht'  $H \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a funkce  $h_i \in C^1(H)$ , pro  $i = 1, \dots, k$ .

Necht' pro každé  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H$  je  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in G$ .

Pak pro derivaci složeného zobrazení  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))$  platí

$$\underbrace{\mathbf{f}'(\mathbf{x})}_{J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})} = \underbrace{\mathbf{g}'(\mathbf{h}(\mathbf{x}))}_{J_{\mathbf{g}}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))} \underbrace{\mathbf{h}'(\mathbf{x})}_{J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}.$$

Jacobiho matice  
zobrazení  $\mathbf{f}$   
v bodě  $\mathbf{x}$

Jacobiho matice  
zobrazení  $\mathbf{g}$   
v bodě  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$

Jacobiho matice  
zobrazení  $\mathbf{h}$   
v bodě  $\mathbf{x}$

# Totální diferenciál

**Definice:** Necht' funkce  $f(x, y)$  má spojité parciální derivace v bodě  $(x_0, y_0)$ , potom výraz

$$df(x_0, y_0, dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$$

nazýváme **totální diferenciál** funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .

$$\Delta f(x_0, y_0, dx, dy) = f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0)$$

nazýváme **diferenci** funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .

**Definice:** Necht' funkce  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  má spojité parciální derivace v bodě  $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , potom výraz

$$df(\mathbf{x}_0, d\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)dx_n,$$

kde  $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ , nazýváme **totální diferenciál** funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{x}_0$ .

$$\Delta f(\mathbf{x}_0, d\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0 + d\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$$

nazýváme **diferenci** funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{x}_0$ .

# Totální diferenciál

**Definice:** Necht' funkce  $f(x, y)$  má spojité parciální derivace v bodě  $(x_0, y_0)$ , potom výraz

$$df(x_0, y_0, dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$$

nazýváme **totální diferenciál** funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .

$$\Delta f(x_0, y_0, dx, dy) = f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0)$$

nazýváme **diferenci** funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .

**Definice:** Necht' funkce  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  má spojité parciální derivace v bodě  $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , potom výraz

$$df(\mathbf{x}_0, d\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)dx_n,$$

kde  $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ , nazýváme **totální diferenciál** funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{x}_0$ .

$$\Delta f(\mathbf{x}_0, d\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0 + d\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$$

nazýváme **diferenci** funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{x}_0$ .

# Totální diferenciál

**Definice:** Necht' funkce  $f(x, y)$  má spojité parciální derivace v bodě  $(x_0, y_0)$ , potom výraz

$$df(x_0, y_0, dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$$

nazýváme **totální diferenciál** funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .

$$\Delta f(x_0, y_0, dx, dy) = f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0)$$

nazýváme **diferencí** funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .

**Definice:** Necht' funkce  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  má spojité parciální derivace v bodě  $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , potom výraz

$$df(\mathbf{x}_0, d\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)dx_n,$$

kde  $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ , nazýváme **totální diferenciál** funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{x}_0$ .

$$\Delta f(\mathbf{x}_0, d\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0 + d\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$$

nazýváme **diferencí** funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{x}_0$ .

# Totální diferenciál

**Definice:** Necht' funkce  $f(x, y)$  má spojité parciální derivace v bodě  $(x_0, y_0)$ , potom výraz

$$df(x_0, y_0, dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$$

nazýváme **totální diferenciál** funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .

$$\Delta f(x_0, y_0, dx, dy) = f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0)$$

nazýváme **diferencí** funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .

**Definice:** Necht' funkce  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  má spojité parciální derivace v bodě  $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , potom výraz

$$df(\mathbf{x}_0, d\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)dx_n,$$

kde  $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ , nazýváme **totální diferenciál** funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{x}_0$ .

$$\Delta f(\mathbf{x}_0, d\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0 + d\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$$

nazýváme **diferencí** funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{x}_0$ .

# Totální diferenciál

**Definice:** Necht' funkce  $f(x, y)$  má spojité parciální derivace v bodě  $(x_0, y_0)$ , potom výraz

$$df(x_0, y_0, dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$$

nazýváme **totální diferenciál** funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .

$$\Delta f(x_0, y_0, dx, dy) = f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0)$$

nazýváme **diferencí** funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .

**Definice:** Necht' funkce  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  má spojité parciální derivace v bodě  $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , potom výraz

$$df(\mathbf{x}_0, d\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)dx_n,$$

kde  $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ , nazýváme **totální diferenciál** funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{x}_0$ .

$$\Delta f(\mathbf{x}_0, d\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0 + d\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$$

nazýváme **diferencí** funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{x}_0$ .

# Tečná rovina ke grafu funkcí dvou proměnných

**Definice:** Má-li funkce  $f(x, y)$  spojité parciální derivace v bodě  $(x_0, y_0)$ , nazýváme rovnici

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

tečnou rovinou ke grafu funkce  $f$  v bodě  $T = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

# Tečná rovina ke grafu funkcí dvou proměnných

**Definice:** Má-li funkce  $f(x, y)$  spojité parciální derivace v bodě  $(x_0, y_0)$ , nazýváme rovnici

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

**tečnou rovinou** ke grafu funkce  $f$  v bodě  $T = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .



# Taylorův polynom

Omezíme se pouze na funkce dvou proměnných.

**Definice:** Necht'  $f : M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_0, y_0) \in M$ ,

$f \in C^1(\mathcal{O}(x_0, y_0))$

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

nazýváme Taylorův polynom 1. stupně k funkci  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .

$f \in C^2(\mathcal{O}(x_0, y_0))$

$$T_2(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right)$$

nazýváme Taylorův polynom 2. stupně k funkci  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .

# Taylorův polynom

Omezíme se pouze na funkce dvou proměnných.

**Definice:** Necht'  $f : M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_0, y_0) \in M$ ,

$f \in C^1(\mathcal{O}(x_0, y_0))$

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

nazýváme **Taylorův polynom 1. stupně** k funkci  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .

$f \in C^2(\mathcal{O}(x_0, y_0))$

$$T_2(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right)$$

nazýváme **Taylorův polynom 2. stupně** k funkci  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .

# Taylorův polynom

Omezíme se pouze na funkce dvou proměnných.

**Definice:** Necht'  $f : M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_0, y_0) \in M$ ,

$f \in C^1(\mathcal{O}(x_0, y_0))$

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

nazýváme **Taylorův polynom 1. stupně k funkci  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .**

$f \in C^2(\mathcal{O}(x_0, y_0))$

$$T_2(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right)$$

nazýváme **Taylorův polynom 2. stupně k funkci  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .**

## Taylorův polynom - 2

$$f \in C^3(\mathcal{O}(x_0, y_0))$$

$$\begin{aligned} T_3(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right) + \\ & + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, y_0)(x - x_0)^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)^2(y - y_0) + \right. \\ & \left. + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0, y_0)(y - y_0)^3 \right) \end{aligned}$$

nazýváme Taylorův polynom 3. stupně k funkci  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .

$\forall (x, y) \in \mathcal{O}_\varepsilon(x_0, y_0)$  a pro  $\varepsilon$  malé platí

$$f(x, y) \doteq T_n(x, y).$$

## Taylorův polynom - 2

$$f \in C^3(\mathcal{O}(x_0, y_0))$$

$$\begin{aligned} T_3(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right) + \\ & + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, y_0)(x - x_0)^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)^2(y - y_0) + \right. \\ & \left. + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0, y_0)(y - y_0)^3 \right) \end{aligned}$$

nazýváme **Taylorův polynom 3. stupně** k funkci  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .

$\forall (x, y) \in \mathcal{O}_\varepsilon(x_0, y_0)$  a pro  $\varepsilon$  malé platí

$$f(x, y) \doteq T_n(x, y).$$

## Taylorův polynom - 2

$$f \in C^3(\mathcal{O}(x_0, y_0))$$

$$\begin{aligned} T_3(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right) + \\ & + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, y_0)(x - x_0)^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)^2(y - y_0) + \right. \\ & \left. + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0, y_0)(y - y_0)^3 \right) \end{aligned}$$

nazýváme **Taylorův polynom 3. stupně k funkci  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$** .

$\forall (x, y) \in \mathcal{O}_\varepsilon(x_0, y_0)$  a pro  $\varepsilon$  malé platí

$$f(x, y) \doteq T_n(x, y).$$

# Newtonova metoda

Mějme soustavu dvou nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 0 \\ f_2(x, y) &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Nechť  $(x^*, y^*)$  je kořen soustavy a  $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}(x^*, y^*)$ ,  
 $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O}(x^*, y^*))$  a  $\det \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \neq 0$  na  $\mathcal{O}(x^*, y^*)$ , potom metodu

$$\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(x_n, y_n) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_1(x_n, y_n) \\ f_2(x_n, y_n) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

nazýváme **Newtonova metoda** pro soustavu nelineárních rovnic.

Je-li  $\mathcal{O}(x^*, y^*)$  dostatečně malé, potom  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x^*, y^*)$ .

# Newtonova metoda

Mějme soustavu dvou nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 0 \\ f_2(x, y) &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Nechť  $(x^*, y^*)$  je kořen soustavy a  $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}(x^*, y^*)$ ,  $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O}(x^*, y^*))$  a  $\det \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \neq 0$  na  $\mathcal{O}(x^*, y^*)$ , potom metodu

$$\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(x_n, y_n) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_1(x_n, y_n) \\ f_2(x_n, y_n) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

nazýváme **Newtonova metoda** pro soustavu nelineárních rovnic.

Je-li  $\mathcal{O}(x^*, y^*)$  dostatečně malé, potom  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x^*, y^*)$ .