Kapitola 3: Derivace funkcí více proměnných

Parciální derivace

Definice: Nechť $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná na $\mathcal{O}(\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M$. Potom *parciální derivací funkce f podle x_i v bodě $\boldsymbol{a}$* rozumíme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{h}.$$

Druhou parciální derivací podle proměnných x_i a x_j na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\right), \qquad \boldsymbol{x} \in G.$$

Věta: Má-li funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ spojité všechny druhé parciální derivace na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$, pak na G platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{x}).$$

Množiny $C^k(G)$

Můžeme nyní zavést množiny:

$$\begin{aligned} C(G) &= \{f, \text{ kde } f \text{ je spojita funkce na } G\} \\ C^k(G) &= \{f, \text{ kde } f \text{ má } k\text{-té spojité parciální derivace na } G\} \end{aligned}$$

Je-li $f \in C^1(G)$ říkáme, že f je spojitě diferencovatelná na G Je-li $f \in C^k(G)$ říkáme, že f je k-krát spojitě diferencovatelná na G.

Věta: Nechť $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, G je otevřená podmnožina M. Jestliže $f \in C^1(G)$, potom f je spojitá na G.

Poznámka: Platí

$$C^{k+1}(G) \subset C^k(G), \qquad \forall\, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Gradient

Definice: Nechť $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je funkce n proměnných, bod $\boldsymbol{a} \in \mathcal{D}(f)$ a existuje $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$. Vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right)$$

nazýváme *gradient funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$* a značíme

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}).$$

Derivace ve směru

Definice: Nechť $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je funkce n proměnných $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{D}(f)$, f je definována na $\mathcal{O}(\boldsymbol{x}_0)$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ takový, že $\|\vec{a}\| = 1$. Potom

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + h\vec{a}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{h},$$

pokud existuje, nezýváme derivací funkce f v bodě $\boldsymbol{x}_0$ ve směru vektoru $\vec{a}$ a značíme ji

$$Df(\boldsymbol{x}_0, \vec{a}).$$

Věta: Je-li $f \in C^1(G)$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\boldsymbol{x}_0 \in G$ a $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec{a}\| = 1$, pak

$$Df(\boldsymbol{x}_0, \vec{a}) \;=\; \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_0)\, \vec{a}\,.$$

Derivování složených funkcí

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{h}:\, H\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k\\ g:\, G\subset\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}\\ \mathcal{H}(\boldsymbol{h})\subseteq\mathcal{D}(g)=G \end{array}\right\}\ f=g\circ\boldsymbol{h}\ \Rightarrow\ f:\, H\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=(h_1(\boldsymbol{x}),h_2(\boldsymbol{x}),\dots,h_k(\boldsymbol{x}))$, kde $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ $g(\boldsymbol{a})=g(a_1,a_2,\dots,a_k)$
Věta: Nechť $G\subset\mathbb{R}^k$ je otevřená množina a $g\in C^1(G)$. Nechť $H\subset\mathbb{R}^n$ je otevřená množina a funkce $h_j\in C^1(H)$, pro $j=1,\dots,k$. Nechť pro každé $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in H$ je $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\in G$. Položme $a_j=h_j(x_1,x_2,\dots,x_n)$ pro $j=1,2,\dots,k$ a

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=g(h_1(x_1,\dots,x_n),\dots,h_k(x_1,\dots,x_n)).$$

Potom $f\in C^1(H)$ a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial g}{\partial a_j}(\boldsymbol{a})\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial g}{\partial a_j}(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}))\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}).$$

Derivování složených funkcí - poznámky

Můžeme psát

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial g}{\partial a_j}(\boldsymbol{a})\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial g}{\partial a_j}(\boldsymbol{a})\frac{\partial a_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}).$$

Platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\partial g}{\partial a_1}(\boldsymbol{a}),\dots,\frac{\partial g}{\partial a_k}(\boldsymbol{a})\right)\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial a_1}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\\ \vdots\\ \frac{\partial a_k}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}$$

Derivace zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$

Definice: nechť $\boldsymbol{f}:G\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$, $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\dots,f_k)$ a $f_i\in C^1(G)$ jsou funkce n proměnných $x_1,\dots,x_n$, označme $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Pak matici typu (k,n)

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}$$

nazýváme *derivací zobrazení $\boldsymbol{f}$ v bodě $\boldsymbol{x}$* nebo také *Jacobiho maticí zobrazení $\boldsymbol{f}$ v bodě $\boldsymbol{x}$*.
Poznámka: Jestliže $k=1$, potom se jedná o funkci $f:G\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ a

$$f'(\boldsymbol{x})=grad\,f(\boldsymbol{x}).$$

Derivování složených zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{h}:\, H\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k\\ \boldsymbol{g}:\, G\subset\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m\\ \mathcal{H}(\boldsymbol{h})\subseteq\mathcal{D}(\boldsymbol{g})=G \end{array}\right\}\ \boldsymbol{f}=\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{h}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{f}:\, H\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$$

$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=(h_1(\boldsymbol{x}),h_2(\boldsymbol{x}),\dots,h_k(\boldsymbol{x}))$, kde $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})=(g_1(\boldsymbol{a}),g_2(\boldsymbol{a}),\dots,g_m(\boldsymbol{a}))$, kde $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\dots,a_k)$
Věta: Nechť $G\subset\mathbb{R}^k$ je otevřená množina a $g_j\in C^1(G)$ pro $j=1,\dots,m$. Nechť $H\subset\mathbb{R}^n$ je otevřená množina a funkce $h_i\in C^1(H)$, pro $i=1,\dots,k$. Nechť pro

každé $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H$ je $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \in G$. Pak pro derivaci složeného zobrazení $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}))$ platí

$$\underbrace{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})}_{\substack{J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) \\ \text{Jacobiho matice} \\ \text{zobrazení } \boldsymbol{f} \\ \text{v bodě } \boldsymbol{x}}} = \underbrace{\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}))}_{\substack{J_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})) \\ \text{Jacobiho matice} \\ \text{zobrazení } \boldsymbol{g} \\ \text{v bodě } \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})}} \underbrace{\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{x})}_{\substack{J_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}) \\ \text{Jacobiho matice} \\ \text{zobrazení } \boldsymbol{h} \\ \text{v bodě } \boldsymbol{x}}}.$$

Totální diferenciál

Definice: Nechť funkce $f(x, y)$ má spojité parciální derivace v bodě (x_0, y_0), potom výraz

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\mathrm{d}y$$

nazýváme *totální diferenciál* funkce f v bodě (x_0, y_0).

$$\triangle f(x_0, y_0, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = f(x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y) - f(x_0, y_0)$$

nazýváme *diferencí* funkce f v bodě (x_0, y_0).

Definice: Nechť funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ má spojité parciální derivace v bodě $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, potom výraz

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0, \mathrm{d}\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}x_n,$$

kde $\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \dots, \mathrm{d}x_n)$, nazýváme *totální diferenciál* funkce f v bodě $\boldsymbol{x}_0$.

$$\triangle f(\boldsymbol{x}_0, \mathrm{d}\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0 + \mathrm{d}\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)$$

nazýváme *diferencí* funkce f v bodě $\boldsymbol{x}_0$.

Tečná rovina ke grafu funkcí dvou proměnných

Definice: Má-li funkce $f(x, y)$ spojité parciální derivace v bodě (x_0, y_0), nazýváme rovnici

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

tečnou rovinou ke grafu funkce f v bodě $T = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Taylorův polynom

Omezíme se pouze na funkce dvou proměnných.

Definice: Nechť $f : M \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in M$,

$f \in C^1(\mathcal{O}(x_0, y_0))$

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

nazýváme *Taylorův polynom 1. stupně k funkci* f *v bodě* (x_0, y_0).

$f \in C^2(\mathcal{O}(x_0, y_0))$

$$\begin{aligned} T_2(x, y) = f(x_0, y_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2\right) \end{aligned}$$

nazýváme *Taylorův polynom 2. stupně k funkci* f *v bodě* (x_0, y_0).

Taylorův polynom - 2

$f \in C^3(\mathcal{O}(x_0, y_0))$

$$T_3(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right)+$$
$$+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0)(x-x_0)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)^2(y-y_0)+\right.$$
$$\left.+3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0,y_0)(y-y_0)^3\right)$$

nazýváme *Taylorův polynom 3. stupně k funkci f v bodě (x_0, y_0).*
$\forall\,(x,y) \in \mathcal{O}_\varepsilon(x_0,y_0)$ a pro ε malé platí

$$f(x,y) \doteq T_n(x,y).$$

Newtonova metoda

Mějme soustavu dvou nelineárních rovnic

$$\begin{array}{rcl} f_1(x,y) &=& 0 \\ f_2(x,y) &=& 0 \end{array} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}.$$

Nechť (x^*, y^*) je kořen soustavy a $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}(x^*, y^*)$, $\boldsymbol{F} \in C^2(\mathcal{O}(x^*, y^*))$ a det $J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}) \neq 0$ na $\mathcal{O}(x^*, y^*)$, potom metodu

$$J_{\boldsymbol{F}}(x_n, y_n)\begin{pmatrix} \triangle x \\ \triangle y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f_1(x_n, y_n) \\ f_2(x_n, y_n) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \triangle x \\ \triangle y \end{pmatrix}$$

nazýváme *Newtonova metoda* pro soustavu nelineárních rovnic.
Je-li $\mathcal{O}(x^*, y^*)$ dostatečně malé, potom $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x^*, y^*)$.