Kapitola 4: Extrémy funkcí dvou proměnných

Lokální extrémy

Definice: Nechť $f : M \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $(x_0, y_0) \in M$.
Říkáme, že fce f má v bodě (x_0, y_0) lokální maximum (resp. lokální minimum) jestliže existuje $\mathcal{O}(x_0, y_0)$ takové že

$$\forall (x, y) \in \mathcal{O}(x_0, y_0) \cap M \;\Rightarrow\; f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$
$$(\text{resp. } f(x, y) \geq f(x_0, y_0)\ )$$

Platí-li, že

$$\forall (x, y) \in \mathcal{P}(x_0, y_0) \cap M \;\Rightarrow\; f(x, y) < f(x_0, y_0)$$
$$(\text{resp. } f(x, y) > f(x_0, y_0)\ )$$

říkáme, že fce f má v bodě (x_0, y_0) ostré lokální maximum (resp. ostré lokální minimum)
Platí-li, že

$$\forall (x, y) \in M \;\Rightarrow\; f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$
$$(\text{resp. } f(x, y) \geq f(x_0, y_0)\ )$$

říkáme, že fce f má v bodě (x_0, y_0) globální maximum (resp. globální minimum) na množině M

Lokální extrémy

Definice: Nechť $f : M \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $(x_0, y_0) \in M$.
Říkáme, že fce f má v bodě (x_0, y_0) lokální maximum (resp. lokální minimum) jestliže existuje $\mathcal{O}(x_0, y_0)$ takové že

$$\forall\,(x,y) \in \mathcal{O}(x_0,y_0) \cap M \;\Rightarrow\; f(x,y) \le f(x_0,y_0)$$
$$(\text{resp. } \; f(x,y) \ge f(x_0,y_0)\ )$$

Platí-li, že

$$\forall\,(x,y) \in \mathcal{P}(x_0,y_0) \cap M \;\Rightarrow\; f(x,y) < f(x_0,y_0)$$
$$(\text{resp. } \; f(x,y) > f(x_0,y_0)\ )$$

říkáme, že fce f má v bodě (x_0, y_0) ostré lokální maximum (resp. ostré lokální minimum)
Platí-li, že

$$\forall\,(x,y) \in M \;\Rightarrow\; f(x,y) \le f(x_0,y_0)$$
$$(\text{resp. } \; f(x,y) \ge f(x_0,y_0)\ )$$

říkáme, že fce f má v bodě (x_0, y_0) globální maximum (resp. globální minimum) na množině M

Lokální extrémy

Definice: Nechť $f : M \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $(x_0, y_0) \in M$.
Říkáme, že fce f má v bodě (x_0, y_0) lokální maximum (resp. lokální minimum) jestliže existuje $\mathcal{O}(x_0, y_0)$ takové že

$$\forall (x,y) \in \mathcal{O}(x_0,y_0) \cap M \;\Rightarrow\; f(x,y) \le f(x_0,y_0)$$
$$(\text{resp. } f(x,y) \ge f(x_0,y_0)\ )$$

Platí-li, že

$$\forall (x,y) \in \mathcal{P}(x_0,y_0) \cap M \;\Rightarrow\; f(x,y) < f(x_0,y_0)$$
$$(\text{resp. } f(x,y) > f(x_0,y_0)\ )$$

říkáme, že fce f má v bodě (x_0, y_0) ostré lokální maximum (resp. ostré lokální minimum)

Platí-li, že

$$\forall (x,y) \in M \;\Rightarrow\; f(x,y) \le f(x_0,y_0)$$
$$(\text{resp. } f(x,y) \ge f(x_0,y_0)\ )$$

říkáme, že fce f má v bodě (x_0, y_0) globální maximum (resp. globální minimum) na množině M

Lokální extrémy

Definice: Nechť $f : M \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $(x_0, y_0) \in M$.
Říkáme, že fce f má v bodě (x_0, y_0) lokální maximum (resp. lokální minimum) jestliže existuje $\mathcal{O}(x_0, y_0)$ takové že

$$\forall\,(x, y) \in \mathcal{O}(x_0, y_0) \cap M \;\Rightarrow\; f(x, y) \le f(x_0, y_0)$$
$$(\text{resp. } \; f(x, y) \ge f(x_0, y_0)\ )$$

Platí-li, že

$$\forall\,(x, y) \in \mathcal{P}(x_0, y_0) \cap M \;\Rightarrow\; f(x, y) < f(x_0, y_0)$$
$$(\text{resp. } \; f(x, y) > f(x_0, y_0)\ )$$

říkáme, že fce f má v bodě (x_0, y_0) ostré lokální maximum (resp. ostré lokální minimum)
Platí-li, že

$$\forall\,(x, y) \in M \;\Rightarrow\; f(x, y) \le f(x_0, y_0)$$
$$(\text{resp. } \; f(x, y) \ge f(x_0, y_0)\ )$$

říkáme, že fce f má v bodě (x_0, y_0) globální maximum (resp. globální minimum) na množině M

Lokální extrémy - 2

Věta: Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f \in C^1(G)$. Má-li funkce f v bodě $(x_0, y_0) \in G$ lokální extrém, potom platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Bod splňující tuto podmínku se nazývá stacionární bod funkce f.

Podmínka nulových derivací je pouze nutná podmínka.

Definice: Je-li $f \in C^2(G)$, $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená. Nazýváme matici

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix}$$

Hessovou maticí funkce f. Determinant Hessovy matice funkce f nazýváme Hessiánem a značíme $H_f(x, y)$.

Lokální extrémy - 2

Věta: Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f \in C^1(G)$. Má-li funkce f v bodě $(x_0, y_0) \in G$ lokální extrém, potom platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Bod splňující tuto podmínku se nazývá stacionární bod funkce f.

Podmínka nulových derivací je pouze nutná podmínka.

Definice: Je-li $f \in C^2(G)$, $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená. Nazýváme matici

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix}$$

Hessovou maticí funkce f. Determinant Hessovy matice funkce f nazýváme Hessiánem a značíme $H_f(x, y)$.

Lokální extrémy - 3

Věta: Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f \in C^2(G)$ a $(x_0, y_0) \in G$ je stacionární bod funkce f. Potom

1. Je-li $H_f(x_0, y_0) > 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální extrém
   a) Je-li $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) ostré lokální minimum.
   b) Je-li $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) ostré lokální maximum.
2. Je-li $H_f(x_0, y_0) < 0$, nemá funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální extrém (má v tomto bodě sedlový bod).
3. Je-li $H_f(x_0, y_0) = 0$, neumíme jednoduše rozhodnout zda v tomto bodě je extrém.

Lokální extrémy - 3

Věta: Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f \in C^2(G)$ a $(x_0, y_0) \in G$ je stacionární bod funkce f. Potom

1. Je-li $H_f(x_0, y_0) > 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální extrém
   a) Je-li $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) ostré lokální minimum.
   b) Je-li $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) ostré lokální maximum.
2. Je-li $H_f(x_0, y_0) < 0$, nemá funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální extrém (má v tomto bodě sedlový bod).
3. Je-li $H_f(x_0, y_0) = 0$, neumíme jednoduše rozhodnout zda v tomto bodě je extrém.

Lokální extrémy - 3

Věta: Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f \in C^2(G)$ a $(x_0, y_0) \in G$ je stacionární bod funkce f. Potom

1. Je-li $H_f(x_0, y_0) > 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální extrém
   a) Je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) ostré lokální minimum.
   b) Je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) ostré lokální maximum.
2. Je-li $H_f(x_0, y_0) < 0$, nemá funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální extrém (má v tomto bodě sedlový bod).
3. Je-li $H_f(x_0, y_0) = 0$, neumíme jednoduše rozhodnout zda v tomto bodě je extrém.

Lokální extrémy - 3

Věta: Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f \in C^2(G)$ a $(x_0, y_0) \in G$ je stacionární bod funkce f. Potom

1. Je-li $H_f(x_0, y_0) > 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální extrém
   a) Je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) ostré lokální minimum.
   b) Je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) ostré lokální maximum.
2. Je-li $H_f(x_0, y_0) < 0$, nemá funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální extrém (má v tomto bodě sedlový bod).
3. Je-li $H_f(x_0, y_0) = 0$, neumíme jednoduše rozhodnout zda v tomto bodě je extrém.

Lokální extrémy - 3

Věta: Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f \in C^2(G)$ a $(x_0, y_0) \in G$ je stacionární bod funkce f. Potom

1. Je-li $H_f(x_0, y_0) > 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální extrém
   a) Je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) ostré lokální minimum.
   b) Je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) ostré lokální maximum.
2. Je-li $H_f(x_0, y_0) < 0$, nemá funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální extrém (má v tomto bodě sedlový bod).
3. Je-li $H_f(x_0, y_0) = 0$, neumíme jednoduše rozhodnout zda v tomto bodě je extrém.

Lokální extrémy - 3

Věta: Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f \in C^2(G)$ a $(x_0, y_0) \in G$ je stacionární bod funkce f. Potom

1. Je-li $H_f(x_0, y_0) > 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální extrém
   a) Je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) ostré lokální minimum.
   b) Je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) ostré lokální maximum.
2. Je-li $H_f(x_0, y_0) < 0$, nemá funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální extrém (má v tomto bodě sedlový bod).
3. Je-li $H_f(x_0, y_0) = 0$, neumíme jednoduše rozhodnout zda v tomto bodě je extrém.

Lokální extrémy - 3

Věta: Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f \in C^2(G)$ a $(x_0, y_0) \in G$ je stacionární bod funkce f. Potom

1. Je-li $H_f(x_0, y_0) > 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální extrém
   a) Je-li $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) ostré lokální minimum.
   b) Je-li $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) ostré lokální maximum.
2. Je-li $H_f(x_0, y_0) < 0$, nemá funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální extrém (má v tomto bodě sedlový bod).
3. Je-li $H_f(x_0, y_0) = 0$, neumíme jednoduše rozhodnout zda v tomto bodě je extrém.

Metoda nejmenších čtverců

Předpokládejme, že pro různé hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nezávisle proměnné x získáme (například měřením) hodnoty $y_1, y_2, \ldots, y_n$ závisle proměnné y.

Věta: Nechť jsou dány hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $n \geq 2$ tak, že $x_i \neq x_j$ alespoň pro dva indexy i, j.
Aproximujeme-li závislost y na x vztahem

$$y = a\,x + b\,,$$

pak koeficienty a, b,které určíme metodou nejmenších čtvercu, tj. tak, aby hodnota

$$\sum_{i=1}^{n} (a\,x_i + b - y_i)^2$$

byla minimální, jsou jednoznačně určeny jako řešení soustavy

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a + n\, b &= \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \end{aligned}$$

Metoda nejmenších čtverců

Předpokládejme, že pro různé hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nezávisle proměnné x získáme (například měřením) hodnoty $y_1, y_2, \ldots, y_n$ závisle proměnné y.

Věta: Nechť jsou dány hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $n \geq 2$ tak, že $x_i \neq x_j$ alespoň pro dva indexy i, j.
Aproximujeme-li závislost y na x vztahem

$$y \;=\; a\,x \;+\; b\,,$$

pak koeficienty a, b,které určíme metodou nejmenších čtvercu, tj. tak, aby hodnota

$$\sum_{i=1}^{n}(a\,x_i \;+\; b \;-\; y_i)^2$$

byla minimální, jsou jednoznačně určeny jako řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcl}
\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a & + & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b & = & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \\
\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a & + & n\;\; b & = & \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)
\end{array}$$