

## Kapitola 4: Extrémy funkcí dvou proměnných

### Lokální extrémy

**Definice:** Necht'  $f : M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a  $(x_0, y_0) \in M$ . Říkáme, že fce  $f$  má v bodě  $(x_0, y_0)$  *lokální maximum* (resp. *lokální minimum*) jestliže existuje  $\mathcal{O}(x_0, y_0)$  takové že

$$\forall (x, y) \in \mathcal{O}(x_0, y_0) \cap M \Rightarrow f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

(resp.  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ )

Platí-li, že  $\forall (x, y) \in \mathcal{P}(x_0, y_0) \cap M \Rightarrow f(x, y) < f(x_0, y_0)$   
(resp.  $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ )

říkáme, že fce  $f$  má v bodě  $(x_0, y_0)$  *ostré lokální maximum* (resp. *ostré lokální minimum*)  
Platí-li, že

$$\forall (x, y) \in M \Rightarrow f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

(resp.  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ )

říkáme, že fce  $f$  má v bodě  $(x_0, y_0)$  *globální maximum* (resp. *globální minimum*) na množině  $M$

### Lokální extrémy - 2

**Věta:** Necht'  $G \subset \mathbb{R}^2$  je otevřená množina,  $f \in C^1(G)$ . Má-li funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0) \in G$  lokální extrém, potom platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Bod splňující tuto podmínku se nazývá *stacionární bod* funkce  $f$ . [3mm] Podmínka nulových derivací je pouze nutná podmínka. [3mm] **Definice:** Je-li  $f \in C^2(G)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^2$  je otevřená. Nazýváme matici

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix}$$

*Hessovou maticí* funkce  $f$ . Determinant Hessovy matice funkce  $f$  nazýváme *Hessiánem* a značíme  $H_f(x, y)$ . [3mm]

### Lokální extrémy - 3

**Věta:** Necht'  $G \subset \mathbb{R}^2$  je otevřená množina,  $f \in C^2(G)$  a  $(x_0, y_0) \in G$  je stacionární bod funkce  $f$ . Potom

1. Je-li  $H_f(x_0, y_0) > 0$ , má funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$  lokální extrém
  - a) Je-li  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ , má funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$  ostré lokální minimum. [1mm]
  - b) Je-li  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ , má funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$  ostré lokální maximum.
2. Je-li  $H_f(x_0, y_0) < 0$ , nemá funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$  lokální extrém (má v tomto bodě sedlový bod).
3. Je-li  $H_f(x_0, y_0) = 0$ , neumíme jednoduše rozhodnout zda v tomto bodě je extrém.

### Metoda nejmenších čtverců

Předpokládejme, že pro různé hodnoty  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nezávisle proměnné  $x$  získáme (například měření) hodnoty  $y_1, y_2, \dots, y_n$  závisle proměnné  $y$ . [1mm] **Věta:** Necht' jsou dány hodnoty  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a  $y_1, y_2, \dots, y_n$ ,  $n \geq 2$  tak, že  $x_i \neq x_j$  alespoň pro dva indexy  $i, j$ . Aproximujeme-li závislost  $y$  na  $x$  vztahem

$$y = ax + b,$$

pak koeficienty  $a, b$ , které určíme metodou nejmenších čtverců, tj. tak, aby hodnota

$$\sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

byla minimální, jsou jednoznačně určeny jako řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ n \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{pmatrix}$$