Kapitola 5: Implicitně zadané funkce

Implicitní funkce jedné proměnné

Definice: Říkáme, že rovnice $F(x, y) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0) implicitně funkci $y = f(x)$, jestliže

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\exists\, \delta > 0$ a $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \;\; \exists!\, y \in \mathcal{O}_\varepsilon(y_0) \text{ takové, že } F(x, y) = 0\,.$$

Poznámka: Symbol $\exists!$ čteme "existuje právě jedno".

Funkce $y = f(x)$ je definována na $\mathcal{O}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, hodnoty funkce $y = f(x)$ leží v okolí $\mathcal{O}_\varepsilon(y_0) = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$.

Platí $f(x_0) = y_0$.

Implicitní funkce jedné proměnné

Definice: Říkáme, že rovnice $F(x, y) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0) implicitně funkci $y = f(x)$, jestliže

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\exists\, \delta > 0$ a $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \;\; \exists!\, y \in \mathcal{O}_\varepsilon(y_0) \text{ takové, že } F(x, y) = 0\,.$$

Poznámka: Symbol $\exists!$ čteme "existuje právě jedno".

Funkce $y = f(x)$ je definována na $\mathcal{O}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, hodnoty funkce $y = f(x)$ leží v okolí $\mathcal{O}_\varepsilon(y_0) = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$.

Platí $f(x_0) = y_0$.

Implicitní funkce jedné proměnné

Definice: Říkáme, že rovnice $F(x, y) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0) implicitně funkci $y = f(x)$, jestliže

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\exists\, \delta > 0$ a $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_\delta(x_0)\ \ \exists!\, y \in \mathcal{O}_\varepsilon(y_0) \text{ takové, že } F(x, y) = 0\,.$$

Poznámka: Symbol $\exists!$ čteme "existuje právě jedno".

Funkce $y = f(x)$ je definována na $\mathcal{O}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, hodnoty funkce $y = f(x)$ leží v okolí $\mathcal{O}_\varepsilon(y_0) = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$.

Platí $f(x_0) = y_0$.

Implicitní funkce jedné proměnné

Definice: Říkáme, že rovnice $F(x, y) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0) implicitně funkci $y = f(x)$, jestliže

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\exists\, \delta > 0$ a $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \;\; \exists!\, y \in \mathcal{O}_\varepsilon(y_0) \text{ takové, že } F(x, y) = 0\,.$$

Poznámka: Symbol $\exists!$ čteme "existuje právě jedno".

Funkce $y = f(x)$ je definována na $\mathcal{O}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, hodnoty funkce $y = f(x)$ leží v okolí $\mathcal{O}_\varepsilon(y_0) = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$.

Platí $f(x_0) = y_0$.

Implicitní funkce jedné proměnné

Definice: Říkáme, že rovnice $F(x, y) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0) implicitně funkci $y = f(x)$, jestliže

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\exists\, \delta > 0$ a $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \;\; \exists!\, y \in \mathcal{O}_\varepsilon(y_0) \text{ takové, že } F(x, y) = 0\,.$$

Poznámka: Symbol $\exists!$ čteme "existuje právě jedno".

Funkce $y = f(x)$ je definována na $\mathcal{O}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, hodnoty funkce $y = f(x)$ leží v okolí $\mathcal{O}_\varepsilon(y_0) = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$.

Platí $f(x_0) = y_0$.

Implicitní funkce jedné proměnné

Definice: Říkáme, že rovnice $F(x, y) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0) implicitně funkci $y = f(x)$, jestliže

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\exists\, \delta > 0$ a $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \;\; \exists!\, y \in \mathcal{O}_\varepsilon(y_0) \text{ takové, že } F(x, y) = 0\,.$$

Poznámka: Symbol $\exists!$ čteme "existuje právě jedno".

Funkce $y = f(x)$ je definována na $\mathcal{O}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, hodnoty funkce $y = f(x)$ leží v okolí $\mathcal{O}_\varepsilon(y_0) = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$.

Platí $f(x_0) = y_0$.

Implicitní funkce jedné proměnné

Definice: Říkáme, že rovnice $F(x, y) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0) implicitně funkci $y = f(x)$, jestliže

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\exists\, \delta > 0$ a $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \;\; \exists!\, y \in \mathcal{O}_\varepsilon(y_0) \text{ takové, že } F(x, y) = 0\,.$$

Poznámka: Symbol $\exists!$ čteme "existuje právě jedno".

Funkce $y = f(x)$ je definována na $\mathcal{O}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, hodnoty funkce $y = f(x)$ leží v okolí $\mathcal{O}_\varepsilon(y_0) = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$.

Platí $f(x_0) = y_0$.

Věta o existenci implicitní funkce

Věta: Nechť $F \in C^k(G)$ a $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $k \geq 1$. Nechť $(x_0, y_0) \in G$ je takový bod, že

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Potom rovnice $F(x, y) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0) implicitně nějakou funkci $y = f(x)$. Navíc platí $f \in C^k(\mathcal{O}_\delta(x_0))$ pro jisté $\delta > 0$.

Poznámka: Věta je pouze existenční věta, neříká nic o velikosti δ a ε ani o vyjádření funkce $y = f(x)$, pouze o existenci takové funkce. Explicitní vyjádření funkce většinou neumíme určit.

Věta o existenci implicitní funkce

Věta: Nechť $F \in C^k(G)$ a $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $k \geq 1$. Nechť $(x_0, y_0) \in G$ je takový bod, že

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Potom rovnice $F(x, y) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0) implicitně nějakou funkci $y = f(x)$. Navíc platí $f \in C^k(\mathcal{O}_\delta(x_0))$ pro jisté $\delta > 0$.

Poznámka: Věta je pouze existenční věta, neříká nic o velikosti δ a ε ani o vyjádření funkce $y = f(x)$, pouze o existenci takové funkce. Explicitní vyjádření funkce většinou neumíme určit.

Věta o existenci implicitní funkce

Věta: Nechť $F \in C^k(G)$ a $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $k \geq 1$. Nechť $(x_0, y_0) \in G$ je takový bod, že

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Potom rovnice $F(x, y) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0) implicitně nějakou funkci $y = f(x)$. Navíc platí $f \in C^k(\mathcal{O}_\delta(x_0))$ pro jisté $\delta > 0$.

Poznámka: Věta je pouze existenční věta, neříká nic o velikosti δ a ε ani o vyjádření funkce $y = f(x)$, pouze o existenci takové funkce. Explicitní vyjádření funkce většinou neumíme určit.

Věta o existenci implicitní funkce

Věta: Nechť $F \in C^k(G)$ a $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $k \geq 1$. Nechť $(x_0, y_0) \in G$ je takový bod, že

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Potom rovnice $F(x, y) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0) implicitně nějakou funkci $y = f(x)$. Navíc platí $f \in C^k(\mathcal{O}_\delta(x_0))$ pro jisté $\delta > 0$.

Poznámka: Věta je pouze existenční věta, neříká nic o velikosti δ a ε ani o vyjádření funkce $y = f(x)$, pouze o existenci takové funkce. Explicitní vyjádření funkce většinou neumíme určit.

Věta o existenci implicitní funkce

Věta: Nechť $F \in C^k(G)$ a $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $k \geq 1$. Nechť $(x_0, y_0) \in G$ je takový bod, že

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Potom rovnice $F(x, y) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0) implicitně nějakou funkci $y = f(x)$. Navíc platí $f \in C^k(\mathcal{O}_\delta(x_0))$ pro jisté $\delta > 0$.

Poznámka: Věta je pouze existenční věta, neříká nic o velikosti δ a ε ani o vyjádření funkce $y = f(x)$, pouze o existenci takové funkce. Explicitní vyjádření funkce většinou neumíme určit.

Věta o derivaci implicitní funkce

Věta: Nechť $F \in C^k(G)$ a $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $k \geq 1$. Nechť $(x_0, y_0) \in G$ je takový bod, že

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$,

potom derivace implicitně zadané funkce $y = f(x)$ je dána vztahem

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \quad \text{pro } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Věta o derivaci implicitní funkce

Věta: Nechť $F \in C^k(G)$ a $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $k \geq 1$. Nechť $(x_0, y_0) \in G$ je takový bod, že

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$,

potom derivace implicitně zadané funkce $y = f(x)$ je dána vztahem

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \quad \text{pro } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Věta o derivaci implicitní funkce

Věta: Nechť $F \in C^k(G)$ a $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $k \geq 1$. Nechť $(x_0, y_0) \in G$ je takový bod, že

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$,

potom derivace implicitně zadané funkce $y = f(x)$ je dána vztahem

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \quad \text{pro } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\,.$$

Normálový vektor ke křivce

Nechť $F(x, y) = 0$, $F \in C^1(G)$, $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Uvažujme křivku, která je 0-vrstevnici pro funkci $F(x, y)$.

Vezmeme bod (x_0, y_0), který leží na této vrstevnici (křivce).

grad $F(x_0, y_0)$ je normálovým vektorem k $0-$vrstevnici funkce $F(x, y)$ v bodě (x_0, y_0).

Věta: Nechť je dána rovnice $F(x, y) = 0$ a bod (x_0, y_0) takový, že $F(x_0, y_0) = 0$. Nechť grad $F(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, potom body $(x, y) \in \mathcal{O}(x_0, y_0)$, které splňují rovnici $F(x, y) = 0$ tvoří jistou křivku procházející bodem (x_0, y_0), jejíž normálový vektor v bodě (x_0, y_0) je právě grad $F(x_0, y_0)$.

Normálový vektor ke křivce

Nechť $F(x,y)=0$, $F \in C^1(G)$, $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Uvažujme křivku, která je 0-vrstevnici pro funkci $F(x,y)$.

Vezmeme bod (x_0, y_0), který leží na této vrstevnici (křivce).

grad $F(x_0, y_0)$ je normálovým vektorem k $0-$vrstevnici funkce $F(x,y)$ v bodě (x_0, y_0).

Věta: Nechť je dána rovnice $F(x,y)=0$ a bod (x_0, y_0) takový, že $F(x_0, y_0)=0$. Nechť grad $F(x_0, y_0) \neq (0,0)$, potom body $(x,y) \in \mathcal{O}(x_0, y_0)$, které splňují rovnici $F(x,y)=0$ tvoří jistou křivku procházející bodem (x_0, y_0), jejíž normálový vektor v bodě (x_0, y_0) je právě grad $F(x_0, y_0)$.

Normálový vektor ke křivce

Nechť $F(x, y) = 0$, $F \in C^1(G)$, $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Uvažujme křivku, která je 0-vrstevnici pro funkci $F(x, y)$.

Vezmeme bod (x_0, y_0), který leží na této vrstevnici (křivce).

grad $F(x_0, y_0)$ je normálovým vektorem k $0-$vrstevnici funkce $F(x, y)$ v bodě (x_0, y_0).

Věta: Nechť je dána rovnice $F(x, y) = 0$ a bod (x_0, y_0) takový, že $F(x_0, y_0) = 0$. Nechť grad $F(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, potom body $(x, y) \in \mathcal{O}(x_0, y_0)$, které splňují rovnici $F(x, y) = 0$ tvoří jistou křivku procházející bodem (x_0, y_0), jejíž normálový vektor v bodě (x_0, y_0) je právě grad $F(x_0, y_0)$.

Implicitní funkce dvou proměnných

Definice: Říkáme, že rovnice $F(x,y,z)=0$ definuje na okolí bodu (x_0,y_0,z_0) implicitně funkci $z=f(x,y)$, jestliže

1. $F(x_0,y_0,z_0)=0$
2. $\exists\,\delta>0$ a $\varepsilon>0$ takové, že

$\forall\,(x,y)\in\mathcal{O}_\delta(x_0,y_0)\ \ \exists!\,z\in(z_0-\varepsilon,z_0+\varepsilon)$ takové, že $F(x,y,z)=0$.

Poznámka: Pro $(x,y)\in\mathcal{O}_\delta(x_0,y_0)$ platí $F(x,y,f(x,y))=0$ a $f(x_0,y_0)=z_0$.

Věta: Nechť $F\in C^k(G)$ a $G\subset\mathbb{R}^3$ je otevřená množina, $k\geq 1$. Nechť $(x_0,y_0,z_0)\in G$ je takový bod, že

1. $F(x_0,y_0,z_0)=0$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

Potom rovnice $F(x,y,z)=0$ definuje na okolí bodu (x_0,y_0,z_0) implicitně nějakou funkci $z=f(x,y)$. Navíc platí $f\in C^k(\mathcal{O}_\delta(x_0,y_0))$ pro jisté $\delta>0$.

Implicitní funkce dvou proměnných

Definice: Říkáme, že rovnice $F(x, y, z) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0, z_0) implicitně funkci $z = f(x, y)$, jestliže

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
2. $\exists\, \delta > 0$ a $\varepsilon > 0$ takové, že

$\forall\, (x, y) \in \mathcal{O}_\delta(x_0, y_0)\ \ \exists!\, z \in (z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$ takové, že $F(x, y, z) = 0$.

Poznámka: Pro $(x, y) \in \mathcal{O}_\delta(x_0, y_0)$ platí $F(x, y, f(x, y)) = 0$ a $f(x_0, y_0) = z_0$.

Věta: Nechť $F \in C^k(G)$ a $G \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina, $k \geq 1$. Nechť $(x_0, y_0, z_0) \in G$ je takový bod, že

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Potom rovnice $F(x, y, z) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0, z_0) implicitně nějakou funkci $z = f(x, y)$. Navíc platí $f \in C^k(\mathcal{O}_\delta(x_0, y_0))$ pro jisté $\delta > 0$.

Implicitní funkce dvou proměnných

Definice: Říkáme, že rovnice $F(x,y,z)=0$ definuje na okolí bodu (x_0,y_0,z_0) implicitně funkci $z=f(x,y)$, jestliže

1. $F(x_0,y_0,z_0)=0$
2. $\exists\,\delta>0$ a $\varepsilon>0$ takové, že

$\forall\,(x,y)\in\mathcal{O}_\delta(x_0,y_0)\ \ \exists!\,z\in(z_0-\varepsilon,z_0+\varepsilon)$ takové, že $F(x,y,z)=0$.

Poznámka: Pro $(x,y)\in\mathcal{O}_\delta(x_0,y_0)$ platí $F(x,y,f(x,y))=0$ a $f(x_0,y_0)=z_0$.

Věta: Nechť $F\in C^k(G)$ a $G\subset\mathbb{R}^3$ je otevřená množina, $k\geq 1$. Nechť $(x_0,y_0,z_0)\in G$ je takový bod, že

1. $F(x_0,y_0,z_0)=0$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

Potom rovnice $F(x,y,z)=0$ definuje na okolí bodu (x_0,y_0,z_0) implicitně nějakou funkci $z=f(x,y)$. Navíc platí $f\in C^k(\mathcal{O}_\delta(x_0,y_0))$ pro jisté $\delta>0$.

Implicitní funkce dvou proměnných

Definice: Říkáme, že rovnice $F(x, y, z) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0, z_0) implicitně funkci $z = f(x, y)$, jestliže

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
2. $\exists\, \delta > 0$ a $\varepsilon > 0$ takové, že

$\forall\, (x, y) \in \mathcal{O}_\delta(x_0, y_0)$ $\exists!\, z \in (z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$ takové, že $F(x, y, z) = 0$.

Poznámka: Pro $(x, y) \in \mathcal{O}_\delta(x_0, y_0)$ platí $F(x, y, f(x, y)) = 0$ a $f(x_0, y_0) = z_0$.

Věta: Nechť $F \in C^k(G)$ a $G \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina, $k \geq 1$. Nechť $(x_0, y_0, z_0) \in G$ je takový bod, že

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Potom rovnice $F(x, y, z) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0, z_0) implicitně nějakou funkci $z = f(x, y)$. Navíc platí $f \in C^k(\mathcal{O}_\delta(x_0, y_0))$ pro jisté $\delta > 0$.

Implicitní funkce dvou proměnných

Definice: Říkáme, že rovnice $F(x,y,z)=0$ definuje na okolí bodu (x_0,y_0,z_0) implicitně funkci $z=f(x,y)$, jestliže

1. $F(x_0,y_0,z_0)=0$
2. $\exists\,\delta>0$ a $\varepsilon>0$ takové, že

$\forall\,(x,y)\in\mathcal{O}_\delta(x_0,y_0)\ \ \exists!\,z\in(z_0-\varepsilon,z_0+\varepsilon)$ takové, že $F(x,y,z)=0\,.$

Poznámka: Pro $(x,y)\in\mathcal{O}_\delta(x_0,y_0)$ platí $F(x,y,f(x,y))=0$ a $f(x_0,y_0)=z_0$.

Věta: Nechť $F\in C^k(G)$ a $G\subset\mathbb{R}^3$ je otevřená množina, $k\geq 1$. Nechť $(x_0,y_0,z_0)\in G$ je takový bod, že

1. $F(x_0,y_0,z_0)=0$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0\,.$

Potom rovnice $F(x,y,z)=0$ definuje na okolí bodu (x_0,y_0,z_0) implicitně nějakou funkci $z=f(x,y)$. Navíc platí $f\in C^k(\mathcal{O}_\delta(x_0,y_0))$ pro jisté $\delta>0$.

Implicitní funkce dvou proměnných

Definice: Říkáme, že rovnice $F(x, y, z) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0, z_0) implicitně funkci $z = f(x, y)$, jestliže

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
2. $\exists\, \delta > 0$ a $\varepsilon > 0$ takové, že

$\forall\,(x, y) \in \mathcal{O}_\delta(x_0, y_0)\ \ \exists!\, z \in (z_0-\varepsilon, z_0+\varepsilon)$ takové, že $F(x, y, z) = 0$.

Poznámka: Pro $(x, y) \in \mathcal{O}_\delta(x_0, y_0)$ platí $F(x, y, f(x, y)) = 0$ a $f(x_0, y_0) = z_0$.

Věta: Nechť $F \in C^k(G)$ a $G \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina, $k \geq 1$. Nechť $(x_0, y_0, z_0) \in G$ je takový bod, že

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Potom rovnice $F(x, y, z) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0, z_0) implicitně nějakou funkci $z = f(x, y)$. Navíc platí $f \in C^k(\mathcal{O}_\delta(x_0, y_0))$ pro jisté $\delta > 0$.

Implicitní funkce dvou proměnných

Definice: Říkáme, že rovnice $F(x,y,z)=0$ definuje na okolí bodu (x_0,y_0,z_0) implicitně funkci $z=f(x,y)$, jestliže

1. $F(x_0,y_0,z_0)=0$
2. $\exists\,\delta>0$ a $\varepsilon>0$ takové, že

$\forall\,(x,y)\in\mathcal{O}_\delta(x_0,y_0)\ \ \exists!\,z\in(z_0-\varepsilon,z_0+\varepsilon)$ takové, že $F(x,y,z)=0\,.$

Poznámka: Pro $(x,y)\in\mathcal{O}_\delta(x_0,y_0)$ platí $F(x,y,f(x,y))=0$ a $f(x_0,y_0)=z_0$.

Věta: Nechť $F\in C^k(G)$ a $G\subset\mathbb{R}^3$ je otevřená množina, $k\geq 1$. Nechť $(x_0,y_0,z_0)\in G$ je takový bod, že

1. $F(x_0,y_0,z_0)=0$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0\,.$

Potom rovnice $F(x,y,z)=0$ definuje na okolí bodu (x_0,y_0,z_0) implicitně nějakou funkci $z=f(x,y)$. Navíc platí $f\in C^k(\mathcal{O}_\delta(x_0,y_0))$ pro jisté $\delta>0$.

Implicitní funkce dvou proměnných

Definice: Říkáme, že rovnice $F(x,y,z)=0$ definuje na okolí bodu (x_0,y_0,z_0) implicitně funkci $z=f(x,y)$, jestliže

1. $F(x_0,y_0,z_0)=0$
2. $\exists\,\delta>0$ a $\varepsilon>0$ takové, že

$\forall\,(x,y)\in\mathcal{O}_\delta(x_0,y_0)\ \ \exists!\,z\in(z_0-\varepsilon,z_0+\varepsilon)$ takové, že $F(x,y,z)=0$.

Poznámka: Pro $(x,y)\in\mathcal{O}_\delta(x_0,y_0)$ platí $F(x,y,f(x,y))=0$ a $f(x_0,y_0)=z_0$.

Věta: Nechť $F\in C^k(G)$ a $G\subset\mathbb{R}^3$ je otevřená množina, $k\geq 1$. Nechť $(x_0,y_0,z_0)\in G$ je takový bod, že

1. $F(x_0,y_0,z_0)=0$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

Potom rovnice $F(x,y,z)=0$ definuje na okolí bodu (x_0,y_0,z_0) implicitně nějakou funkci $z=f(x,y)$. Navíc platí $f\in C^k(\mathcal{O}_\delta(x_0,y_0))$ pro jisté $\delta>0$.

Věta o derivaci implicitní funkce dvou proměnných

Věta: Nechť $F \in C^k(G)$ a $G \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina, $k \geq 1$. Nechť $(x_0, y_0, z_0) \in G$ je takový bod, že

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$,

potom derivace implicitně zadané funkce $z = f(x, y)$ je dána vztahem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))} \quad \text{pro } (x, y) \in \mathcal{O}(x_0, y_0).$$

Věta o derivaci implicitní funkce dvou proměnných

Věta: Nechť $F \in C^k(G)$ a $G \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina, $k \geq 1$. Nechť $(x_0, y_0, z_0) \in G$ je takový bod, že

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$,

potom derivace implicitně zadané funkce $z = f(x, y)$ je dána vztahem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))} \quad \text{pro } (x, y) \in \mathcal{O}(x_0, y_0).$$

Věta o derivaci implicitní funkce dvou proměnných

Věta: Nechť $F \in C^k(G)$ a $G \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina, $k \geq 1$.
Nechť $(x_0, y_0, z_0) \in G$ je takový bod, že

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$,

potom derivace implicitně zadané funkce $z = f(x, y)$ je dána vztahem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))} ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))} \quad \text{pro } (x, y) \in \mathcal{O}(x_0, y_0) .$$

Normálový vektor ke ploše v $\mathbb{R}^3$

Věta: Nechť je dáne rovnice $F(x, y, z) = 0$ a bod (x_0, y_0, z_0) takový, že $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Nechť grad $F(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$, potom body $(x, y, z) \in \mathcal{O}(x_0, y_0, z_0)$, které splňují rovnici $F(x, y, z) = 0$ tvoří jistou plochu procházející bodem (x_0, y_0, z_0), jejíž normálový vektor v bodě (x_0, y_0, z_0) je právě grad $F(x_0, y_0, z_0)$.

Normálový vektor ke ploše v $\mathbb{R}^3$

Věta: Nechť je dáne rovnice $F(x, y, z) = 0$ a bod (x_0, y_0, z_0) takový, že $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Nechť grad $F(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$, potom body $(x, y, z) \in \mathcal{O}(x_0, y_0, z_0)$, které splňují rovnici $F(x, y, z) = 0$ tvoří jistou plochu procházející bodem (x_0, y_0, z_0), jejíž normálový vektor v bodě (x_0, y_0, z_0) je právě grad $F(x_0, y_0, z_0)$.