

Kapitola 5: Implicitně zadané funkce

Implicitní funkce jedné proměnné

Definice: Říkáme, že rovnice $F(x, y) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0) implicitně funkci $y = f(x)$, jestliže

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\exists \delta > 0$ a $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\forall x \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \exists! y \in \mathcal{O}_\varepsilon(y_0) \text{ takové, že } F(x, y) = 0.$$

Poznámka: Symbol $\exists!$ čteme "existuje právě jedno".

Funkce $y = f(x)$ je definována na $\mathcal{O}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, hodnoty funkce $y = f(x)$ leží v okolí $\mathcal{O}_\varepsilon(y_0) = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$.

Platí $f(x_0) = y_0$.

Věta o existenci implicitní funkce

Věta: Necht' $F \in C^k(G)$ a $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $k \geq 1$. Necht' $(x_0, y_0) \in G$ je takový bod, že

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Potom rovnice $F(x, y) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0) implicitně nějakou funkci $y = f(x)$. Navíc platí $f \in C^k(\mathcal{O}_\delta(x_0))$ pro jisté $\delta > 0$.

Poznámka: Věta je pouze existenční věta, neříká nic o velikosti δ a ε ani o vyjádření funkce $y = f(x)$, pouze o existenci takové funkce. Explicitní vyjádření funkce většinou neumíme určit.

Věta o derivaci implicitní funkce

Věta: Necht' $F \in C^k(G)$ a $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $k \geq 1$. Necht' $(x_0, y_0) \in G$ je takový bod, že

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$,

potom derivace implicitně zadané funkce $y = f(x)$ je dána vztahem

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \quad \text{pro } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Normálový vektor ke křivce

Necht' $F(x, y) = 0$, $F \in C^1(G)$, $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Uvažujme křivku, která je 0-vrstevnicí pro funkci $F(x, y)$.

Vezmeme bod (x_0, y_0) , který leží na této vrstevnici (křivce).

grad $F(x_0, y_0)$ je normálovým vektorem k 0-vrstevnici funkce $F(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) .

Věta: Necht' je dána rovnice $F(x, y) = 0$ a bod (x_0, y_0) takový, že $F(x_0, y_0) = 0$. Necht' grad $F(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, potom body $(x, y) \in \mathcal{O}(x_0, y_0)$, které splňují rovnici $F(x, y) = 0$ tvoří jistou křivku procházející bodem (x_0, y_0) , jejíž normálový vektor v bodě (x_0, y_0) je právě grad $F(x_0, y_0)$.

Implicitní funkce dvou proměnných

Definice: Říkáme, že rovnice $F(x, y, z) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0, z_0) implicitně funkci $z = f(x, y)$, jestliže

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
2. $\exists \delta > 0$ a $\varepsilon > 0$ takové, že
$$\forall (x, y) \in \mathcal{O}_\delta(x_0, y_0) \exists! z \in (z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon) \text{ takové, že } F(x, y, z) = 0.$$

Poznámka: Pro $(x, y) \in \mathcal{O}_\delta(x_0, y_0)$ platí $F(x, y, f(x, y)) = 0$ a $f(x_0, y_0) = z_0$.

Věta: Necht' $F \in C^k(G)$ a $G \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina, $k \geq 1$. Necht' $(x_0, y_0, z_0) \in G$ je takový bod, že

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
2. $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Potom rovnice $F(x, y, z) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0, z_0) implicitně nějakou funkci $z = f(x, y)$. Navíc platí $f \in C^k(\mathcal{O}_\delta(x_0, y_0))$ pro jisté $\delta > 0$.

Věta o derivaci implicitní funkce dvou proměnných

Věta: Necht' $F \in C^k(G)$ a $G \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina, $k \geq 1$. Necht' $(x_0, y_0, z_0) \in G$ je takový bod, že

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
2. $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$,

potom derivace implicitně zadané funkce $z = f(x, y)$ je dána vztahem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))} \quad \text{pro } (x, y) \in \mathcal{O}(x_0, y_0).$$

Normálový vektor ke ploše v \mathbb{R}^3

Věta: Necht' je dána rovnice $F(x, y, z) = 0$ a bod (x_0, y_0, z_0) takový, že $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Necht' $\text{grad } F(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$, potom body $(x, y, z) \in \mathcal{O}(x_0, y_0, z_0)$, které splňují rovnici $F(x, y, z) = 0$ tvoří jistou plochu procházející bodem (x_0, y_0, z_0) , jejíž normálový vektor v bodě (x_0, y_0, z_0) je právě $\text{grad } F(x_0, y_0, z_0)$.