Kapitola 6: Křivky zadané parametricky

Hladká křivka v $\mathbb{R}^n$

Definice: Hladkou křivkou v $\mathbb{R}^n$ nazýváme takovou množinu bodu $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$, pro kterou platí

$$\mathcal{K} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t) \text{ pro } t \in I\}.$$

O funkcích $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ předpokládáme, že

1. jsou spojité na intervalu I
2. mají spojité derivace na I
3. $((x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t)) \neq (0, 0, \dots, 0)$ pro $\forall\, x \in I$.

Jestliže podmínky 2) a 3) jsou splněny s výjimkou konečně mnoha bodů $t_1, t_2, \dots, t_k \in I$ mluvíme o křivce po částech hladké.

Definujme zobrazení $\boldsymbol{r} : I \to \mathbb{R}^n$

$$\boldsymbol{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)),\ t \in I.$$

Zobrazení $\boldsymbol{r}$ nazýváme parametrizací křivky $\mathcal{K}$.

Hladká křivka v $\mathbb{R}^n$

Definice: Hladkou křivkou v $\mathbb{R}^n$ nazýváme takovou množinu bodu $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$, pro kterou platí

$$\mathcal{K} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t) \text{ pro } t \in I\}.$$

O funkcích $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ předpokládáme, že

1. jsou spojité na intervalu I
2. mají spojité derivace na I
3. $((x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t)) \neq (0, 0, \dots, 0)$ pro $\forall\, x \in I$.

Jestliže podmínky 2) a 3) jsou splněny s výjimkou konečně mnoha bodů $t_1, t_2, \dots, t_k \in I$ mluvíme o křivce po částech hladké.

Definujme zobrazení $\boldsymbol{r} : I \to \mathbb{R}^n$

$$\boldsymbol{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)),\ t \in I.$$

Zobrazení $\boldsymbol{r}$ nazýváme parametrizací křivky $\mathcal{K}$.

Hladká křivka v $\mathbb{R}^n$

Definice: Hladkou křivkou v $\mathbb{R}^n$ nazýváme takovou množinu bodu $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$, pro kterou platí

$$\mathcal{K} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t) \text{ pro } t \in I\}.$$

O funkcích $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ předpokládáme, že

1. jsou spojité na intervalu I
2. mají spojité derivace na I
3. $((x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t)) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ pro $\forall\, x \in I$.

Jestliže podmínky 2) a 3) jsou splněny s výjimkou konečně mnoha bodů $t_1, t_2, \ldots, t_k \in I$ mluvíme o křivce po částech hladké.

Definujme zobrazení $\boldsymbol{r} :\ I \to \mathbb{R}^n$

$$\boldsymbol{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)),\ t \in I.$$

Zobrazení $\boldsymbol{r}$ nazýváme parametrizací křivky $\mathcal{K}$.

Hladká křivka v $\mathbb{R}^n$

Definice: Hladkou křivkou v $\mathbb{R}^n$ nazýváme takovou množinu bodu $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$, pro kterou platí

$$\mathcal{K} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t) \text{ pro } t \in I\}.$$

O funkcích $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ předpokládáme, že

1. jsou spojité na intervalu I
2. mají spojité derivace na I
3. $((x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t)) \neq (0, 0, \dots, 0)$ pro $\forall\, x \in I$.

Jestliže podmínky 2) a 3) jsou splněny s výjimkou konečně mnoha bodů $t_1, t_2, \dots, t_k \in I$ mluvíme o křivce po částech hladké.

Definujme zobrazení $\boldsymbol{r} : I \to \mathbb{R}^n$

$$\boldsymbol{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)),\ t \in I.$$

Zobrazení $\boldsymbol{r}$ nazýváme parametrizací křivky $\mathcal{K}$.

Hladká křivka v $\mathbb{R}^n$

Definice: Hladkou křivkou v $\mathbb{R}^n$ nazýváme takovou množinu bodu $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$, pro kterou platí

$$\mathcal{K} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t) \text{ pro } t \in I\}.$$

O funkcích $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ předpokládáme, že

1. jsou spojité na intervalu I
2. mají spojité derivace na I
3. $((x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t)) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ pro $\forall\, x \in I$.

Jestliže podmínky 2) a 3) jsou splněny s výjimkou konečně mnoha bodů $t_1, t_2, \ldots, t_k \in I$ mluvíme o křivce po částech hladké.

Definujme zobrazení $\boldsymbol{r} :\ I \to \mathbb{R}^n$

$$\boldsymbol{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)),\ \ t \in I.$$

Zobrazení $\boldsymbol{r}$ nazýváme parametrizací křivky $\mathcal{K}$.

Hladká křivka v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$

Definice: Hladkou křivkou v $\mathbb{R}^2$ nazýváme takovou množinu bodu $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2$, pro kterou platí

$$\mathcal{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = x(t), y = y(t) \text{ pro } t \in I\}.$$

O funkcích $x(t), y(t)$ předpokládáme, že

1. jsou spojité na intervalu I
2. mají spojité derivace na I
3. $((x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ pro $\forall\, x \in I$.

Definice: Hladkou křivkou v $\mathbb{R}^3$ nazýváme takovou množinu bodu $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$, pro kterou platí

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2;\ x = x(t), y = y(t), z = z(t) \text{ pro } t \in I\}.$$

O funkcích $x(t), y(t), z(t)$ předpokládáme, že

1. jsou spojité na intervalu I
2. mají spojité derivace na I
3. $((x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0, 0, 0)$ pro $\forall\, x \in I$.

Hladká křivka v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$

Definice: Hladkou křivkou v $\mathbb{R}^2$ nazýváme takovou množinu bodu $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2$, pro kterou platí

$$\mathcal{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = x(t), y = y(t) \text{ pro } t \in I\}.$$

O funkcích $x(t), y(t)$ předpokládáme, že

1. jsou spojité na intervalu I
2. mají spojité derivace na I
3. $((x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ pro $\forall\, x \in I$.

Definice: Hladkou křivkou v $\mathbb{R}^3$ nazýváme takovou množinu bodu $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$, pro kterou platí

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2;\ x = x(t), y = y(t), z = z(t) \text{ pro } t \in I\}.$$

O funkcích $x(t), y(t), z(t)$ předpokládáme, že

1. jsou spojité na intervalu I
2. mají spojité derivace na I
3. $((x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0, 0, 0)$ pro $\forall\, x \in I$.

Hladká křivka v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$

Definice: Hladkou křivkou v $\mathbb{R}^2$ nazýváme takovou množinu bodu $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2$, pro kterou platí

$$\mathcal{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = x(t), y = y(t) \text{ pro } t \in I\}.$$

O funkcích $x(t), y(t)$ předpokládáme, že

1. jsou spojité na intervalu I
2. mají spojité derivace na I
3. $((x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ pro $\forall\, x \in I$.

Definice: Hladkou křivkou v $\mathbb{R}^3$ nazýváme takovou množinu bodu $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$, pro kterou platí

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2;\ x = x(t), y = y(t), z = z(t) \text{ pro } t \in I\}.$$

O funkcích $x(t), y(t), z(t)$ předpokládáme, že

1. jsou spojité na intervalu I
2. mají spojité derivace na I
3. $((x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0, 0, 0)$ pro $\forall\, x \in I$.

Jednoduchá po částech hladká křivka

Předpokládejme, že $I = \langle a, b \rangle$

Definice: Křivka $\mathcal{K}$ se nazývá hladkým obloukem jestliže zobrazení $\boldsymbol{r}$ je prosté, t.j.

$$\forall\, t_1, t_2 \in I \text{ platí } t_1 \neq t_2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{r}(t_1) \neq \boldsymbol{r}(t_2).$$

Bod $\boldsymbol{r}(a)$ nazýváme počáteční bod křivky.
Bod $\boldsymbol{r}(b)$ nazýváme koncový bod křivky.

Křivka $\mathcal{K}$ se nazývá jednoduchá uzavřená jestliže její parametrizace $\boldsymbol{r}(t)$ je prostá na (a, b) a $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b)$.

Každou jednoduchou po částech hladkou křivku $\mathcal{K}$ lze vyjádřit

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_k.$$

$\mathcal{K}_i$ jsou oblouky a $\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j$ mají společný nejvýše jeden krajní bod.

Jednoduchá po částech hladká křivka

Předpokládejme, že $I = \langle a, b \rangle$

Definice: Křivka $\mathcal{K}$ se nazývá hladkým obloukem jestliže zobrazení $\boldsymbol{r}$ je prosté, t.j.

$$\forall\, t_1, t_2 \in I \ \text{ platí } t_1 \neq t_2 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{r}(t_1) \neq \boldsymbol{r}(t_2).$$

Bod $\boldsymbol{r}(a)$ nazýváme počáteční bod křivky.
Bod $\boldsymbol{r}(b)$ nazýváme koncový bod křivky.

Křivka $\mathcal{K}$ se nazývá jednoduchá uzavřená jestliže její parametrizace $\boldsymbol{r}(t)$ je prostá na (a, b) a $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b)$.

Každou jednoduchou po částech hladkou křivku $\mathcal{K}$ lze vyjádřit

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_k.$$

$\mathcal{K}_i$ jsou oblouky a $\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j$ mají společný nejvýše jeden krajní bod.

Jednoduchá po částech hladká křivka

Předpokládejme, že $I = \langle a, b \rangle$

Definice: Křivka $\mathcal{K}$ se nazývá hladkým obloukem jestliže zobrazení $\boldsymbol{r}$ je prosté, t.j.

$$\forall\, t_1, t_2 \in I \ \text{ platí } t_1 \neq t_2 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{r}(t_1) \neq \boldsymbol{r}(t_2).$$

Bod $\boldsymbol{r}(a)$ nazýváme počáteční bod křivky.
Bod $\boldsymbol{r}(b)$ nazýváme koncový bod křivky.

Křivka $\mathcal{K}$ se nazývá jednoduchá uzavřená jestliže její parametrizace $\boldsymbol{r}(t)$ je prostá na (a, b) a $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b)$.

Každou jednoduchou po částech hladkou křivku $\mathcal{K}$ lze vyjádřit

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_k.$$

$\mathcal{K}_i$ jsou oblouky a $\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j$ mají společný nejvýše jeden krajní bod.

Jednoduchá po částech hladká křivka

Předpokládejme, že $I = \langle a, b \rangle$

Definice: Křivka $\mathcal{K}$ se nazývá hladkým obloukem jestliže zobrazení $\boldsymbol{r}$ je prosté, t.j.

$$\forall\, t_1, t_2 \in I \text{ platí } t_1 \neq t_2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{r}(t_1) \neq \boldsymbol{r}(t_2).$$

Bod $\boldsymbol{r}(a)$ nazýváme počáteční bod křivky.
Bod $\boldsymbol{r}(b)$ nazýváme koncový bod křivky.

Křivka $\mathcal{K}$ se nazývá jednoduchá uzavřená jestliže její parametrizace $\boldsymbol{r}(t)$ je prostá na (a, b) a $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b)$.

Každou jednoduchou po částech hladkou křivku $\mathcal{K}$ lze vyjádřit

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_k.$$

$\mathcal{K}_i$ jsou oblouky a $\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j$ mají společný nejvýše jeden krajní bod.

Jednoduchá po částech hladká křivka

Předpokládejme, že $I = \langle a, b \rangle$

Definice: Křivka $\mathcal{K}$ se nazývá hladkým obloukem jestliže zobrazení $\boldsymbol{r}$ je prosté, t.j.

$$\forall\, t_1, t_2 \in I \text{ platí } t_1 \neq t_2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{r}(t_1) \neq \boldsymbol{r}(t_2).$$

Bod $\boldsymbol{r}(a)$ nazýváme počáteční bod křivky.
Bod $\boldsymbol{r}(b)$ nazýváme koncový bod křivky.

Křivka $\mathcal{K}$ se nazývá jednoduchá uzavřená jestliže její parametrizace $\boldsymbol{r}(t)$ je prostá na (a, b) a $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b)$.

Každou jednoduchou po částech hladkou křivku $\mathcal{K}$ lze vyjádřit

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_k.$$

$\mathcal{K}_i$ jsou oblouky a $\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j$ mají společný nejvýše jeden krajní bod.

Orientace křivky. Tečný vektor.

Tím, že jsme určili počáteční bod křivky a koncový bod křivky jsme určili orientaci křivky.

Jestliže $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_k$ a p.b.$\mathcal{K}_{i+1} =$ k.b.$\mathcal{K}_i$, potom píšeme

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \dot{+} \mathcal{K}_2 \dot{+} \ldots \dot{+} \mathcal{K}_k$$

a Říkáme, že $\mathcal{K}$ je orientovaným součtem oblouku $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_k$.

Jestliže $\boldsymbol{r}(a) =$p.b.$\mathcal{K}$ a $\boldsymbol{r}(b) =$k.b.$\mathcal{K}$ říkáme, že křivka je orientovaná souhlasně s parametrizací $\boldsymbol{r}$.

Definice: Nechť $\boldsymbol{r} : \langle a, b\rangle \Rightarrow \mathbb{R}^3$ je parametrizace hladké křivky $\mathcal{K}$. Nechť $P_0 \in \mathcal{K}$ a $P_0 = \boldsymbol{r}(t_0)$ pro $t_0 \in \langle a, b\rangle$. Pak vektor

$$\vec{r}\,'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

je směrovým vektorem tečny ke křivce $\mathcal{K}$ v bodě P_0 a nazýváme ho tečný vektor ke křivce $\mathcal{K}$ v bodě P_0

Orientace křivky. Tečný vektor.

Tím, že jsme určili počáteční bod křivky a koncový bod křivky jsme určili orientaci křivky.

Jestliže $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_k$ a p.b.$\mathcal{K}_{i+1} =$ k.b.$\mathcal{K}_i$, potom píšeme

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \dot{+} \mathcal{K}_2 \dot{+} \ldots \dot{+} \mathcal{K}_k$$

a Říkáme, že $\mathcal{K}$ je orientovaným součtem oblouku $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_k$.

Jestliže $\boldsymbol{r}(a) =$p.b.$\mathcal{K}$ a $\boldsymbol{r}(b) =$k.b.$\mathcal{K}$ říkáme, že křivka je orientovaná souhlasně s parametrizací $\boldsymbol{r}$.

Definice: Nechť $\boldsymbol{r} : \langle a, b \rangle \Rightarrow \mathbb{R}^3$ je parametrizace hladké křivky $\mathcal{K}$. Nechť $P_0 \in \mathcal{K}$ a $P_0 = \boldsymbol{r}(t_0)$ pro $t_0 \in \langle a, b \rangle$. Pak vektor

$$\vec{r}\,'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

je směrovým vektorem tečny ke křivce $\mathcal{K}$ v bodě P_0 a nazýváme ho tečný vektor ke křivce $\mathcal{K}$ v bodě P_0

Orientace křivky. Tečný vektor.

Tím, že jsme určili počáteční bod křivky a koncový bod křivky jsme určili orientaci křivky.

Jestliže $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_k$ a p.b.$\mathcal{K}_{i+1} =$ k.b.$\mathcal{K}_i$, potom píšeme

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \dot{+} \mathcal{K}_2 \dot{+} \ldots \dot{+} \mathcal{K}_k$$

a Říkáme, že $\mathcal{K}$ je orientovaným součtem oblouku $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_k$.

Jestliže $\boldsymbol{r}(a) =$p.b.$\mathcal{K}$ a $\boldsymbol{r}(b) =$k.b.$\mathcal{K}$ říkáme, že křivka je orientovaná souhlasně s parametrizací $\boldsymbol{r}$.

Definice: Nechť $\boldsymbol{r} : \langle a, b \rangle \Rightarrow \mathbb{R}^3$ je parametrizace hladké křivky $\mathcal{K}$. Nechť $P_0 \in \mathcal{K}$ a $P_0 = \boldsymbol{r}(t_0)$ pro $t_0 \in \langle a, b \rangle$. Pak vektor

$$\vec{r}\,'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

je směrovým vektorem tečny ke křivce $\mathcal{K}$ v bodě P_0 a nazýváme ho tečný vektor ke křivce $\mathcal{K}$ v bodě P_0

Orientace křivky. Tečný vektor.

Tím, že jsme určili počáteční bod křivky a koncový bod křivky jsme určili orientaci křivky.

Jestliže $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_k$ a p.b.$\mathcal{K}_{i+1} =$ k.b.$\mathcal{K}_i$, potom píšeme

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \dot{+} \mathcal{K}_2 \dot{+} \ldots \dot{+} \mathcal{K}_k$$

a Říkáme, že $\mathcal{K}$ je orientovaným součtem oblouku $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_k$.

Jestliže $\boldsymbol{r}(a) =$p.b.$\mathcal{K}$ a $\boldsymbol{r}(b) =$k.b.$\mathcal{K}$ říkáme, že křivka je orientovaná souhlasně s parametrizací $\boldsymbol{r}$.

Definice: Nechť $\boldsymbol{r} : \langle a, b\rangle \Rightarrow \mathbb{R}^3$ je parametrizace hladké křivky $\mathcal{K}$. Nechť $P_0 \in \mathcal{K}$ a $P_0 = \boldsymbol{r}(t_0)$ pro $t_0 \in \langle a, b\rangle$. Pak vektor

$$\vec{r}\,'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

je směrovým vektorem tečny ke křivce $\mathcal{K}$ v bodě P_0 a nazýváme ho tečný vektor ke křivce $\mathcal{K}$ v bodě P_0

Orientace křivky. Tečný vektor.

Tím, že jsme určili počáteční bod křivky a koncový bod křivky jsme určili orientaci křivky.

Jestliže $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_k$ a p.b.$\mathcal{K}_{i+1} =$ k.b.$\mathcal{K}_i$, potom píšeme

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \dot{+} \mathcal{K}_2 \dot{+} \ldots \dot{+} \mathcal{K}_k$$

a Říkáme, že $\mathcal{K}$ je orientovaným součtem oblouku $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_k$.

Jestliže $\boldsymbol{r}(a) =$p.b.$\mathcal{K}$ a $\boldsymbol{r}(b) =$k.b.$\mathcal{K}$ říkáme, že křivka je orientovaná souhlasně s parametrizací $\boldsymbol{r}$.

Definice: Nechť $\boldsymbol{r} : \langle a, b\rangle \Rightarrow \mathbb{R}^3$ je parametrizace hladké křivky $\mathcal{K}$. Nechť $P_0 \in \mathcal{K}$ a $P_0 = \boldsymbol{r}(t_0)$ pro $t_0 \in \langle a, b\rangle$. Pak vektor

$$\vec{r}\,'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

je směrovým vektorem tečny ke křivce $\mathcal{K}$ v bodě P_0 a nazýváme ho tečný vektor ke křivce $\mathcal{K}$ v bodě P_0