

## Kapitola 6: Křivky zadané parametricky

### Hladká křivka v $\mathbb{R}^n$

**Definice:** Hladkou křivkou v  $\mathbb{R}^n$  nazýváme takovou množinu bodů  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ , pro kterou platí

$$\mathcal{K} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t) \text{ pro } t \in I\}.$$

O funkcích  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  předpokládáme, že

1. jsou spojité na intervalu  $I$
2. mají spojité derivace na  $I$
3.  $((x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t)) \neq (0, 0, \dots, 0) \text{ pro } \forall t \in I$ .

Jestliže podmínky 2) a 3) jsou splněny s výjimkou konečně mnoha bodů  $t_1, t_2, \dots, t_k \in I$  mluvíme o křivce po částech hladké.

Definujeme zobrazení  $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), t \in I.$$

Zobrazení  $\mathbf{r}$  nazýváme parametrizací křivky  $\mathcal{K}$ .

### Hladká křivka v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$

**Definice:** Hladkou křivkou v  $\mathbb{R}^2$  nazýváme takovou množinu bodů  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2$ , pro kterou platí

$$\mathcal{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = x(t), y = y(t) \text{ pro } t \in I\}.$$

O funkcích  $x(t), y(t)$  předpokládáme, že

1. jsou spojité na intervalu  $I$
2. mají spojité derivace na  $I$
3.  $((x'(t), y'(t)) \neq (0, 0) \text{ pro } \forall t \in I$ .

**Definice:** Hladkou křivkou v  $\mathbb{R}^3$  nazýváme takovou množinu bodů  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$ , pro kterou platí

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = x(t), y = y(t), z = z(t) \text{ pro } t \in I\}.$$

O funkcích  $x(t), y(t), z(t)$  předpokládáme, že

1. jsou spojité na intervalu  $I$
2. mají spojité derivace na  $I$
3.  $((x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0, 0, 0) \text{ pro } \forall t \in I$ .

### Jednoduchá po částech hladká křivka

Předpokládejme, že  $I = \langle a, b \rangle$

**Definice:** Křivka  $\mathcal{K}$  se nazývá hladkým obloukem jestliže zobrazení  $\mathbf{r}$  je prosté, t.j.

$$\forall t_1, t_2 \in I \text{ platí } t_1 \neq t_2 \Rightarrow \mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2).$$

Bod  $\mathbf{r}(a)$  nazýváme počáteční bod křivky. Bod  $\mathbf{r}(b)$  nazýváme koncový bod křivky.

Křivka  $\mathcal{K}$  se nazývá jednoduchá uzavřená jestliže její parametrizace  $\mathbf{r}(t)$  je prostá na  $(a, b)$  a  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ . Každou jednoduchou po částech hladkou křivku  $\mathcal{K}$  lze vyjádřit

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \dots \cup \mathcal{K}_k.$$

$\mathcal{K}_i$  jsou oblouky a  $\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j$  mají společný nejvýše jeden krajní bod.

**Orientace křivky. Tečný vektor.**

Tím, že jsme určili počáteční bod křivky a koncový bod křivky jsme určili *orientaci* křivky.

Jestliže  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \dots \cup \mathcal{K}_k$  a p.b. $\mathcal{K}_{i+1} =$  k.b. $\mathcal{K}_i$ , potom píšeme

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \dot{+} \mathcal{K}_2 \dot{+} \dots \dot{+} \mathcal{K}_k$$

a říkáme, že  $\mathcal{K}$  je *orientovaným součtem oblouků*  $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_k$ .

Jestliže  $\mathbf{r}(a) =$  p.b. $\mathcal{K}$  a  $\mathbf{r}(b) =$  k.b. $\mathcal{K}$  říkáme, že *křivka je orientovaná souhlasně s parametrizací*  $\mathbf{r}$ .

**Definice:** Necht'  $\mathbf{r} : \langle a, b \rangle \Rightarrow \mathbb{R}^3$  je parametrizace hladké křivky  $\mathcal{K}$ . Necht'  $P_0 \in \mathcal{K}$  a  $P_0 = \mathbf{r}(t_0)$  pro  $t_0 \in \langle a, b \rangle$ . Pak vektor

$$\vec{\mathbf{r}}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

je směrovým vektorem tečny ke křivce  $\mathcal{K}$  v bodě  $P_0$  a nazýváme ho *tečný vektor ke křivce*  $\mathcal{K}$  v bodě  $P_0$