Kapitola 7: Křivkový integrál vektorového pole

Vektorové pole

Definice: Vektorovým polem na množině $G \subset \mathbb{R}^3$ rozumíme zobrazení

$$\vec{F}: G \to \mathbb{R}^3,$$

které každému bodu $X \in G$ přiřazuje vektor $\vec{F}(X) \in \mathbb{R}^3$, který vychází z bodu X.

$$\vec{F}(X) = \vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

Definice: Rovinným vektorovým polem na množině $G \subset \mathbb{R}^2$ rozumíme zobrazení

$$\vec{F}: G \to \mathbb{R}^2,$$

které každému bodu $X \in G$ přiřazuje vektor $\vec{F}(X) \in \mathbb{R}^2$, který vychází z bodu X.

$$\vec{F}(X) = \vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$$

Vektorové pole

Definice: Vektorovým polem na množině $G \subset \mathbb{R}^3$ rozumíme zobrazení

$$\vec{F} : G \to \mathbb{R}^3,$$

které každému bodu $X \in G$ přiřazuje vektor $\vec{F}(X) \in \mathbb{R}^3$, který vychází z bodu X.

$$\vec{F}(X) = \vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

Definice: Rovinným vektorovým polem na množině $G \subset \mathbb{R}^2$ rozumíme zobrazení

$$\vec{F} : G \to \mathbb{R}^2,$$

které každému bodu $X \in G$ přiřazuje vektor $\vec{F}(X) \in \mathbb{R}^2$, který vychází z bodu X.

$$\vec{F}(X) = \vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$$

Vektorové pole

Definice: Vektorovým polem na množině $G \subset \mathbb{R}^3$ rozumíme zobrazení

$$\vec{F}:\ G \ \rightarrow\ \mathbb{R}^3,$$

které každému bodu $X \in G$ přiřazuje vektor $\vec{F}(X) \in \mathbb{R}^3$, který vychází z bodu X.

$$\vec{F}(X) = \vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$$

Definice: Rovinným vektorovým polem na množině $G \subset \mathbb{R}^2$ rozumíme zobrazení

$$\vec{F}:\ G \ \rightarrow\ \mathbb{R}^2,$$

které každému bodu $X \in G$ přiřazuje vektor $\vec{F}(X) \in \mathbb{R}^2$, který vychází z bodu X.

$$\vec{F}(X) = \vec{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$$

Vektorové pole

Definice: Vektorovým polem na množině $G \subset \mathbb{R}^3$ rozumíme zobrazení

$$\vec{F}: G \to \mathbb{R}^3,$$

které každému bodu $X \in G$ přiřazuje vektor $\vec{F}(X) \in \mathbb{R}^3$, který vychází z bodu X.

$$\vec{F}(X) = \vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$$

Definice: Rovinným vektorovým polem na množině $G \subset \mathbb{R}^2$ rozumíme zobrazení

$$\vec{F}: G \to \mathbb{R}^2,$$

které každému bodu $X \in G$ přiřazuje vektor $\vec{F}(X) \in \mathbb{R}^2$, který vychází z bodu X.

$$\vec{F}(X) = \vec{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$$

Vektorové pole

Definice: Vektorovým polem na množině $G \subset \mathbb{R}^3$ rozumíme zobrazení

$$\vec{F} : G \to \mathbb{R}^3,$$

které každému bodu $X \in G$ přiřazuje vektor $\vec{F}(X) \in \mathbb{R}^3$, který vychází z bodu X.

$$\vec{F}(X) = \vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

Definice: Rovinným vektorovým polem na množině $G \subset \mathbb{R}^2$ rozumíme zobrazení

$$\vec{F} : G \to \mathbb{R}^2,$$

které každému bodu $X \in G$ přiřazuje vektor $\vec{F}(X) \in \mathbb{R}^2$, který vychází z bodu X.

$$\vec{F}(X) = \vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$$

Vektorové pole na křivkách

$\vec{F} : G \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\vec{F}_{|\mathcal{K}} : \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{K} \subset G$,

symbol $\vec{F}_{|\mathcal{K}}$ nazýváme restrikce vektorového pole $\vec{F}$ na množinu $\mathcal{K}$.

Je-li křivka zadaná parametricky

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

potom

$$\vec{F}_{|\mathcal{K}}(x, y, z) = \vec{F}(\boldsymbol{r}(t)) = (F_1(\boldsymbol{r}(t)), F_2(\boldsymbol{r}(t)), F_3(\boldsymbol{r}(t))) =$$

$$= (F_1(x(t), y(t), z(t)), F_2(x(t), y(t), z(t)), F_3(x(t), y(t), z(t))).$$

Označme
$\boldsymbol{h}(t) = (F_1(x(t), y(t), z(t)), F_2(x(t), y(t), z(t)), F_3(x(t), y(t), z(t)))$,
potom $\boldsymbol{h} : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}^3$.

Poznámka: Zvolíme-li jinou parametrizaci dostaneme jinou funkci, která má jiný definiční obor než $\boldsymbol{h}$, ale stejný obor hodnot.

Vektorové pole na křivkách

$\vec{F} : G \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\vec{F}_{|\mathcal{K}} : \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{K} \subset G$,
symbol $\vec{F}_{|\mathcal{K}}$ nazýváme restrikce vektorového pole $\vec{F}$ na množinu $\mathcal{K}$.

Je-li křivka zadaná parametricky

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

potom

$$\vec{F}_{|\mathcal{K}}(x, y, z) = \vec{F}(\boldsymbol{r}(t)) = (F_1(\boldsymbol{r}(t)), F_2(\boldsymbol{r}(t)), F_3(\boldsymbol{r}(t))) =$$

$$= (F_1(x(t), y(t), z(t)), F_2(x(t), y(t), z(t)), F_3(x(t), y(t), z(t))).$$

Označme
$\boldsymbol{h}(t) = (F_1(x(t), y(t), z(t)), F_2(x(t), y(t), z(t)), F_3(x(t), y(t), z(t)))$,
potom $\boldsymbol{h} : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}^3$.

Poznámka: Zvolíme-li jinou parametrizaci dostaneme jinou funkci, která má jiný definiční obor než $\boldsymbol{h}$, ale stejný obor hodnot.

Vektorové pole na křivkách

$\vec{F}: G \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\vec{F}_{|\mathcal{K}}: \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \mathcal{K} \subset G,$
symbol $\vec{F}_{|\mathcal{K}}$ nazýváme restrikce vektorového pole $\vec{F}$ na množinu $\mathcal{K}$.

Je-li křivka zadaná parametricky

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

potom

$$\vec{F}_{|\mathcal{K}}(x, y, z) = \vec{F}(\boldsymbol{r}(t)) = (F_1(\boldsymbol{r}(t)), F_2(\boldsymbol{r}(t)), F_3(\boldsymbol{r}(t))) =$$

$$= (F_1(x(t), y(t), z(t)), F_2(x(t), y(t), z(t)), F_3(x(t), y(t), z(t))).$$

Označme
$\boldsymbol{h}(t) = (F_1(x(t), y(t), z(t)), F_2(x(t), y(t), z(t)), F_3(x(t), y(t), z(t))),$
potom $\boldsymbol{h}: \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}^3$.

Poznámka: Zvolíme-li jinou parametrizaci dostaneme jinou funkci, která má jiný definiční obor než $\boldsymbol{h}$, ale stejný obor hodnot.

Vektorové pole na křivkách

$\vec{F}: G \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\vec{F}_{|\mathcal{K}}: \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \mathcal{K} \subset G,$

symbol $\vec{F}_{|\mathcal{K}}$ nazýváme restrikce vektorového pole $\vec{F}$ na množinu $\mathcal{K}$.

Je-li křivka zadaná parametricky

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

potom

$$\vec{F}_{|\mathcal{K}}(x, y, z) = \vec{F}(\boldsymbol{r}(t)) = (F_1(\boldsymbol{r}(t)), F_2(\boldsymbol{r}(t)), F_3(\boldsymbol{r}(t))) =$$
$$= (F_1(x(t), y(t), z(t)), F_2(x(t), y(t), z(t)), F_3(x(t), y(t), z(t))).$$

Označme

$\boldsymbol{h}(t) = (F_1(x(t), y(t), z(t)), F_2(x(t), y(t), z(t)), F_3(x(t), y(t), z(t))),$

potom $\boldsymbol{h}: \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}^3$.

Poznámka: Zvolíme-li jinou parametrizaci dostaneme jinou funkci, která má jiný definiční obor než $\boldsymbol{h}$, ale stejný obor hodnot.

Vektorové pole na křivkách

$\vec{F} : \; G \subset \mathbb{R}^3 \;\to\; \mathbb{R}^3$

$\vec{F}_{|\mathcal{K}} : \; \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3 \;\to\; \mathbb{R}^3$, $\mathcal{K} \subset G$,
symbol $\vec{F}_{|\mathcal{K}}$ nazýváme restrikce vektorového pole $\vec{F}$ na množinu $\mathcal{K}$.

Je-li křivka zadaná parametricky

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

potom

$$\vec{F}_{|\mathcal{K}}(x, y, z) = \vec{F}(\boldsymbol{r}(t)) = (F_1(\boldsymbol{r}(t)), F_2(\boldsymbol{r}(t)), F_3(\boldsymbol{r}(t))) =$$

$$= (F_1(x(t), y(t), z(t)), F_2(x(t), y(t), z(t)), F_3(x(t), y(t), z(t))).$$

Označme
$\boldsymbol{h}(t) = (F_1(x(t), y(t), z(t)), F_2(x(t), y(t), z(t)), F_3(x(t), y(t), z(t)))$,
potom $\boldsymbol{h} : \; \langle a, b \rangle \;\to\; \mathbb{R}^3$.

Poznámka: Zvolíme-li jinou parametrizaci dostaneme jinou funkci, která má jiný definiční obor než $\boldsymbol{h}$, ale stejný obor hodnot.

Vektorové pole na křivkách

$\vec{F} : G \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\vec{F}_{|\mathcal{K}} : \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \mathcal{K} \subset G,$

symbol $\vec{F}_{|\mathcal{K}}$ nazýváme restrikce vektorového pole $\vec{F}$ na množinu $\mathcal{K}$.

Je-li křivka zadaná parametricky

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

potom

$$\vec{F}_{|\mathcal{K}}(x, y, z) = \vec{F}(\boldsymbol{r}(t)) = (F_1(\boldsymbol{r}(t)), F_2(\boldsymbol{r}(t)), F_3(\boldsymbol{r}(t))) =$$

$$= (F_1(x(t), y(t), z(t)), F_2(x(t), y(t), z(t)), F_3(x(t), y(t), z(t))).$$

Označme

$\boldsymbol{h}(t) = (F_1(x(t), y(t), z(t)), F_2(x(t), y(t), z(t)), F_3(x(t), y(t), z(t))),$

potom $\boldsymbol{h} : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}^3$.

Poznámka: Zvolíme-li jinou parametrizaci dostaneme jinou funkci, která má jiný definiční obor než $\boldsymbol{h}$, ale stejný obor hodnot.

Práce síly. Křivkový integrál vektorového pole.

Definice: Křivkovým integrálem vektorového pole $\vec{F}$ po křivce $\mathcal{K}$, s parametrizací $\boldsymbol{r}(t) : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^3$, rozumíme

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (P_i - P_{i-1}) \cdot \vec{F}(P_i),$$

kde $P_i = \boldsymbol{r}(t_i)$ je bod ležící na křivce $\mathcal{K}$,
$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Křivku $\mathcal{K}$ nazýváme integrační cestou.

Věta: Platí

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \; = \; \int_a^b \vec{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Práce síly. Křivkový integrál vektorového pole.

Definice: Křivkovým integrálem vektorového pole $\vec{F}$ po křivce $\mathcal{K}$, s parametrizací $\boldsymbol{r}(t) : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^3$, rozumíme

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (P_i - P_{i-1}) \cdot \vec{F}(P_i),$$

kde $P_i = \boldsymbol{r}(t_i)$ je bod ležící na křivce $\mathcal{K}$,
$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Křivku $\mathcal{K}$ nazýváme integrační cestou.

Věta: Platí

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_a^b \vec{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Práce síly. Křivkový integrál vektorového pole.

Definice: Křivkovým integrálem vektorového pole $\vec{F}$ po křivce $\mathcal{K}$, s parametrizací $\boldsymbol{r}(t) : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^3$, rozumíme

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (P_i - P_{i-1}) \cdot \vec{F}(P_i),$$

kde $P_i = \boldsymbol{r}(t_i)$ je bod ležící na křivce $\mathcal{K}$,
$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Křivku $\mathcal{K}$ nazýváme integrační cestou.

Věta: Platí

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \; = \; \int_a^b \vec{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Vlastnosti křivkového integrálu vektorového pole.

Věta:

1. $$\int_{\mathcal{K}} (\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \alpha \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \beta \int_{\mathcal{K}} \vec{G} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
   pro $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\vec{F}, \vec{G}$ spojité na $\mathcal{K}$

2. $$\int_{\mathcal{K}_1 \dot{+} \mathcal{K}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{K}_k} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathcal{K}_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{\mathcal{K}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \cdots + \int_{\mathcal{K}_k} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

3. $$\int_{\dot{-}\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = - \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

4. Křivkový integrál nezávisí na parametrizaci křivky $\mathcal{K}$.

Vlastnosti křivkového integrálu vektorového pole.

Věta:

1. $$\int_{\mathcal{K}} (\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \alpha \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \beta \int_{\mathcal{K}} \vec{G} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
   pro $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\vec{F}, \vec{G}$ spojité na $\mathcal{K}$
2. $$\int_{\mathcal{K}_1 \dot{+} \mathcal{K}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{K}_k} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathcal{K}_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{\mathcal{K}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \cdots + \int_{\mathcal{K}_k} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
3. $$\int_{\dot{-}\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = - \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
4. Křivkový integrál nezávisí na parametrizaci křivky $\mathcal{K}$.

Vlastnosti křivkového integrálu vektorového pole.

Věta:

1. $$\int_{\mathcal{K}} (\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \alpha \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \beta \int_{\mathcal{K}} \vec{G} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
   pro $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\vec{F}, \vec{G}$ spojité na $\mathcal{K}$
2. $$\int_{\mathcal{K}_1 \dot{+} \mathcal{K}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{K}_k} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathcal{K}_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{\mathcal{K}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \cdots + \int_{\mathcal{K}_k} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
3. $$\int_{\dot{-}\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = - \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
4. Křivkový integrál nezávisí na parametrizaci křivky $\mathcal{K}$.

Vlastnosti křivkového integrálu vektorového pole.

Věta:

1. $$\int_{\mathcal{K}} (\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \alpha \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \beta \int_{\mathcal{K}} \vec{G} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
   pro $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\vec{F}, \vec{G}$ spojité na $\mathcal{K}$
2. $$\int_{\mathcal{K}_1 \dot{+} \mathcal{K}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{K}_k} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathcal{K}_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{\mathcal{K}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \cdots + \int_{\mathcal{K}_k} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
3. $$\int_{\dot{-}\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = - \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
4. Křivkový integrál nezávisí na parametrizaci křivky $\mathcal{K}$.

Vlastnosti křivkového integrálu vektorového pole.

Věta:

1. $$\int_{\mathcal{K}} (\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \alpha \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \beta \int_{\mathcal{K}} \vec{G} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
   pro $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\vec{F}, \vec{G}$ spojité na $\mathcal{K}$
2. $$\int_{\mathcal{K}_1 \dot{+} \mathcal{K}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{K}_k} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathcal{K}_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{\mathcal{K}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \cdots + \int_{\mathcal{K}_k} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
3. $$\int_{\dot{-}\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
4. Křivkový integrál nezávisí na parametrizaci křivky $\mathcal{K}$.

Diferenciální formy příslušné k vektorovému poli $\vec{F}$

Mějme vektorové pole $\vec{F}: \ G \subset \mathbb{R}^3 \ \to \ \mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$$

$$\vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = F_1(x,y,z)\mathrm{d}x + F_2(x,y,z)\mathrm{d}y + F_3(x,y,z)\mathrm{d}z$$

Definice: Výraz $F_1(x,y,z)\mathrm{d}x + F_2(x,y,z)\mathrm{d}y + F_3(x,y,z)\mathrm{d}z$ nazýváme diferenciální forma příslušná vektorovému poli $\vec{F}$.

Počítáme-li integrál

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = \int_{\mathcal{K}} F_1(x,y,z)\mathrm{d}x + F_2(x,y,z)\mathrm{d}y + F_3(x,y,z)\mathrm{d}z$$

říkáme, že integrujeme diferenciální formu po křivce.

Diferenciální formy příslušné k vektorovému poli $\vec{F}$

Mějme vektorové pole $\vec{F}: \; G \subset \mathbb{R}^3 \; \to \; \mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$$

$$\vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = F_1(x,y,z)\mathrm{d}x + F_2(x,y,z)\mathrm{d}y + F_3(x,y,z)\mathrm{d}z$$

Definice: Výraz $F_1(x,y,z)\mathrm{d}x + F_2(x,y,z)\mathrm{d}y + F_3(x,y,z)\mathrm{d}z$ nazýváme diferenciální forma příslušná vektorovému poli $\vec{F}$.

Počítáme-li integrál

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = \int_{\mathcal{K}} F_1(x,y,z)\mathrm{d}x + F_2(x,y,z)\mathrm{d}y + F_3(x,y,z)\mathrm{d}z$$

říkáme, že integrujeme diferenciální formu po křivce.

Diferenciální formy příslušné k vektorovému poli $\vec{F}$

Mějme vektorové pole $\vec{F}: \ G \subset \mathbb{R}^3 \ \to \ \mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$$

$$\vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = F_1(x,y,z)\mathrm{d}x + F_2(x,y,z)\mathrm{d}y + F_3(x,y,z)\mathrm{d}z$$

Definice: Výraz $F_1(x,y,z)\mathrm{d}x + F_2(x,y,z)\mathrm{d}y + F_3(x,y,z)\mathrm{d}z$ nazýváme diferenciální forma příslušná vektorovému poli $\vec{F}$.

Počítáme-li integrál

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = \int_{\mathcal{K}} F_1(x,y,z)\mathrm{d}x + F_2(x,y,z)\mathrm{d}y + F_3(x,y,z)\mathrm{d}z$$

říkáme, že integrujeme diferenciální formu po křivce.

Diferenciální formy příslušné k vektorovému poli $\vec{F}$

Mějme vektorové pole $\vec{F}: G \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$$

$$\vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = F_1(x,y,z)\mathrm{d}x + F_2(x,y,z)\mathrm{d}y + F_3(x,y,z)\mathrm{d}z$$

Definice: Výraz $F_1(x,y,z)\mathrm{d}x + F_2(x,y,z)\mathrm{d}y + F_3(x,y,z)\mathrm{d}z$ nazýváme diferenciální forma příslušná vektorovému poli $\vec{F}$.

Počítáme-li integrál

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = \int_{\mathcal{K}} F_1(x,y,z)\mathrm{d}x + F_2(x,y,z)\mathrm{d}y + F_3(x,y,z)\mathrm{d}z$$

říkáme, že integrujeme diferenciální formu po křivce.

Diferenciální formy příslušné k vektorovému poli $\vec{F}$

Mějme vektorové pole $\vec{F}: \ G \subset \mathbb{R}^3 \ \rightarrow \ \mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$$

$$\vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = F_1(x,y,z)\mathrm{d}x + F_2(x,y,z)\mathrm{d}y + F_3(x,y,z)\mathrm{d}z$$

Definice: Výraz $F_1(x,y,z)\mathrm{d}x + F_2(x,y,z)\mathrm{d}y + F_3(x,y,z)\mathrm{d}z$ nazýváme diferenciální forma příslušná vektorovému poli $\vec{F}$.

Počítáme-li integrál

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = \int_{\mathcal{K}} F_1(x,y,z)\mathrm{d}x + F_2(x,y,z)\mathrm{d}y + F_3(x,y,z)\mathrm{d}z$$

říkáme, že integrujeme diferenciální formu po křivce.

Diferenciální formy příslušné k vektorovému poli $\vec{F}$

Mějme vektorové pole $\vec{F}: \ G \subset \mathbb{R}^3 \ \to \ \mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$$

$$\vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = F_1(x, y, z)\mathrm{d}x + F_2(x, y, z)\mathrm{d}y + F_3(x, y, z)\mathrm{d}z$$

Definice: Výraz $F_1(x, y, z)\mathrm{d}x + F_2(x, y, z)\mathrm{d}y + F_3(x, y, z)\mathrm{d}z$ nazýváme diferenciální forma příslušná vektorovému poli $\vec{F}$.

Počítáme-li integrál

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = \int_{\mathcal{K}} F_1(x, y, z)\mathrm{d}x + F_2(x, y, z)\mathrm{d}y + F_3(x, y, z)\mathrm{d}z$$

říkáme, že integrujeme diferenciální formu po křivce.

Potenciální vektorové pole

Definice: Nechť funkce $U(x, y, z)$ je spojitě diferencovatelná funkce na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^3$. Jestliže pro vektorové pole $\vec{F}(x, y, z)$ na množině G platí

$$\vec{F}(x, y, z) = \operatorname{grad} U(x, y, z),$$

pak vektorové pole $\vec{F}$ nazýváme potenciální vektorové pole na G. Funkci $U(x, y, z)$ nazýváme potenciálem vektorového pole $\vec{F}$ na G.

Poznámka: Diferenciální forma, která je určena potenciálním vektorovým polem $\vec{F}$ je totálním diferenciálem potenciálu U, tj.

$$\vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = \frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z\,.$$

Věta: Nechť $\vec{F}$ je spojité potenciální pole na oblasti $G \subseteq \mathbb{R}^3$, které má potenciál $U(x, y, z)$. Nechť křivka $\mathcal{K} \subset G$, pak

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = U(\text{k. b.}\mathcal{K}) - U(\text{p. b.}\mathcal{K}).$$

Potenciální vektorové pole

Definice: Nechť funkce $U(x,y,z)$ je spojitě diferencovatelná funkce na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^3$. Jestliže pro vektorové pole $\vec{F}(x,y,z)$ na množině G platí

$$\vec{F}(x,y,z) = \operatorname{grad} U(x,y,z),$$

pak vektorové pole $\vec{F}$ nazýváme potenciální vektorové pole na G. Funkci $U(x,y,z)$ nazýváme potenciálem vektorového pole $\vec{F}$ na G.

Poznámka: Diferenciální forma, která je určena potenciálním vektorovým polem $\vec{F}$ je totálním diferenciálem potenciálu U, tj.

$$\vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = \frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z\,.$$

Věta: Nechť $\vec{F}$ je spojité potenciální pole na oblasti $G \subseteq \mathbb{R}^3$, které má potenciál $U(x,y,z)$. Nechť křivka $\mathcal{K} \subset G$, pak

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = U(\text{k. b.}\mathcal{K}) - U(\text{p. b.}\mathcal{K}).$$

Potenciální vektorové pole

Definice: Nechť funkce $U(x, y, z)$ je spojitě diferencovatelná funkce na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^3$. Jestliže pro vektorové pole $\vec{F}(x, y, z)$ na množině G platí

$$\vec{F}(x, y, z) = \operatorname{grad} U(x, y, z),$$

pak vektorové pole $\vec{F}$ nazýváme potenciální vektorové pole na G. Funkci $U(x, y, z)$ nazýváme potenciálem vektorového pole $\vec{F}$ na G.

Poznámka: Diferenciální forma, která je určena potenciálním vektorovým polem $\vec{F}$ je totálním diferenciálem potenciálu U, tj.

$$\vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = \frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z\,.$$

Věta: Nechť $\vec{F}$ je spojité potenciální pole na oblasti $G \subseteq \mathbb{R}^3$, které má potenciál $U(x, y, z)$. Nechť křivka $\mathcal{K} \subset G$, pak

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = U(\text{k. b.}\mathcal{K}) - U(\text{p. b.}\mathcal{K}).$$

Potenciální vektorové pole

Definice: Nechť funkce $U(x, y, z)$ je spojitě diferencovatelná funkce na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^3$. Jestliže pro vektorové pole $\vec{F}(x, y, z)$ na množině G platí

$$\vec{F}(x, y, z) = \operatorname{grad} U(x, y, z),$$

pak vektorové pole $\vec{F}$ nazýváme potenciální vektorové pole na G. Funkci $U(x, y, z)$ nazýváme potenciálem vektorového pole $\vec{F}$ na G.

Poznámka: Diferenciální forma, která je určena potenciálním vektorovým polem $\vec{F}$ je totálním diferenciálem potenciálu U, tj.

$$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z\,.$$

Věta: Nechť $\vec{F}$ je spojité potenciální pole na oblasti $G \subseteq \mathbb{R}^3$, které má potenciál $U(x, y, z)$. Nechť křivka $\mathcal{K} \subset G$, pak

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = U(\text{k. b.}\mathcal{K}) - U(\text{p. b.}\mathcal{K}).$$

Nezávislost křivkového integrálu vektorového pole na cestě

Definice: Nechť $\vec{F}$ je spojité vektorové pole na oblasti $G \subseteq \mathbb{R}^3$. Říkáme, že křivkový integrál $\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}$ nezávisí v množině G na integrační cestě, jestliže pro $\forall \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \subset G$ takové, že p. b. $\mathcal{K}_1 =$ p. b. $\mathcal{K}_2$ a k. b. $\mathcal{K}_1 =$ k. b. $\mathcal{K}_2$ platí

$$\int_{\mathcal{K}_1} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = \int_{\mathcal{K}_2} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}.$$

Věta: Nechť $\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}$ nezávisí v oblasti G na integrační cestě, pak

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = 0$$

pro každou uzavřenou křivku $\mathcal{K} \subset G$.

Nezávislost křivkového integrálu vektorového pole na cestě

Definice: Nechť $\vec{F}$ je spojité vektorové pole na oblasti $G \subseteq \mathbb{R}^3$. Říkáme, že křivkový integrál $\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}$ nezávisí v množině G na integrační cestě, jestliže pro $\forall \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \subset G$ takové, že p. b. $\mathcal{K}_1 =$ p. b. $\mathcal{K}_2$ a k. b. $\mathcal{K}_1 =$ k. b. $\mathcal{K}_2$ platí

$$\int_{\mathcal{K}_1} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = \int_{\mathcal{K}_2} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}.$$

Věta: Nechť $\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}$ nezávisí v oblasti G na integrační cestě, pak

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = 0$$

pro každou uzavřenou křivku $\mathcal{K} \subset G$.

Nezávislost křivkového integrálu vektorového pole na cestě

Definice: Nechť $\vec{F}$ je spojité vektorové pole na oblasti $G \subseteq \mathbb{R}^3$. Říkáme, že křivkový integrál $\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}$ nezávisí v množině G na integrační cestě, jestliže pro $\forall \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \subset G$ takové, že p. b. $\mathcal{K}_1 =$ p. b. $\mathcal{K}_2$ a k. b. $\mathcal{K}_1 =$ k. b. $\mathcal{K}_2$ platí

$$\int_{\mathcal{K}_1} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = \int_{\mathcal{K}_2} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}.$$

Věta: Nechť $\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}$ nezávisí v oblasti G na integrační cestě, pak

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = 0$$

pro každou uzavřenou křivku $\mathcal{K} \subset G$.

Nezávislost křivkového integrálu vektorového pole na cestě-2

Věta: Nechť $\vec{F}$ je spojité vektorové pole na oblasti $G \subseteq \mathbb{R}^3$ takové, že $\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}$ nezávisí v oblasti G na integrační cestě.
Pak je $\vec{F}$ potenciální na oblasti G.

Nezávislost křivkového integrálu vektorového pole na cestě-2

Věta: Nechť $\vec{F}$ je spojité vektorové pole na oblasti $G \subseteq \mathbb{R}^3$ takové, že $\displaystyle\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}$ nezávisí v oblasti G na integrační cestě. Pak je $\vec{F}$ potenciální na oblasti G.

Integrace totálního diferenciálu

Chceme-li vypočítat křivkový integrál z potenciálního vektorového pole:

1. Určit, že pole je potenciální.
2. Najít potenciál, tj. funkci $U(x, y, z)$ takovou, že

$$\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z = F_1\mathrm{d}x + F_2\mathrm{d}y + F_3\mathrm{d}z.$$

3. Vypočítat integrál

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = U(\text{k. b.}\mathcal{K}) - U(\text{p. b.}\mathcal{K}).$$

Integrace totálního diferenciálu

Chceme-li vypočítat křivkový integrál z potenciálního vektorového pole:

1. Určit, že pole je potenciální.
2. Najít potenciál, tj. funkci $U(x, y, z)$ takovou, že

$$\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z = F_1\mathrm{d}x + F_2\mathrm{d}y + F_3\mathrm{d}z.$$

3. Vypočítat integrál

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = U(\text{k. b.}\mathcal{K}) - U(\text{p. b.}\mathcal{K}).$$

Integrace totálního diferenciálu

Chceme-li vypočítat křivkový integrál z potenciálního vektorového pole:

1. Určit, že pole je potenciální.
2. Najít potenciál, tj. funkci $U(x, y, z)$ takovou, že

$$\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z = F_1\mathrm{d}x + F_2\mathrm{d}y + F_3\mathrm{d}z.$$

3. Vypočítat integrál

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = U(\text{k. b.}\mathcal{K}) - U(\text{p. b.}\mathcal{K}).$$

Integrace totálního diferenciálu

Chceme-li vypočítat křivkový integrál z potenciálního vektorového pole:

1. Určit, že pole je potenciální.
2. Najít potenciál, tj. funkci $U(x, y, z)$ takovou, že

$$\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z = F_1\mathrm{d}x + F_2\mathrm{d}y + F_3\mathrm{d}z.$$

3. Vypočítat integrál

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = U(\text{k. b.}\mathcal{K}) - U(\text{p. b.}\mathcal{K}).$$

Integrace totálního diferenciálu

Chceme-li vypočítat křivkový integrál z potenciálního vektorového pole:

1. Určit, že pole je potenciální.
2. Najít potenciál, tj. funkci $U(x, y, z)$ takovou, že

$$\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z = F_1\mathrm{d}x + F_2\mathrm{d}y + F_3\mathrm{d}z.$$

3. Vypočítat integrál

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = U(\text{k. b.}\mathcal{K}) - U(\text{p. b.}\mathcal{K}).$$

1. Rovinný případ - $\mathbb{R}^2$

Definice: Oblast $G \subseteq \mathbb{R}^2$ nazýváme jednoduše souvislou oblastí, jestliže pro ni platí:
Pro všechny jednoduché uzavřené křivky $\mathcal{K} \subset G$ platí, že vnitřek křivky leží v množině G.

Věta: Nechť $\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ je rovinné vektorové pole spojitě diferencovatelné na jednoduše souvislé množině $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak $\vec{F}$ je potenciální právě tehdy, když na množině G platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Důsledek: Nechť $\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ je rovinné vektorové pole spojitě diferencovatelné na jednoduše souvislé množině $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak dif. forma $F_1(x, y)\mathrm{d}x + F_2(x, y)\mathrm{d}y$ je totálním diferenciálem nějaké funkce právě tehdy, když na množině G platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

1. Rovinný případ - $\mathbb{R}^2$

Definice: Oblast $G \subseteq \mathbb{R}^2$ nazýváme jednoduše souvislou oblastí, jestliže pro ni platí:
Pro všechny jednoduché uzavřené křivky $\mathcal{K} \subset G$ platí, že vnitřek křivky leží v množině G.

Věta: Nechť $\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ je rovinné vektorové pole spojitě diferencovatelné na jednoduše souvislé množině $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak $\vec{F}$ je potenciální právě tehdy, když na množině G platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Důsledek: Nechť $\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ je rovinné vektorové pole spojitě diferencovatelné na jednoduše souvislé množině $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak dif. forma $F_1(x, y)\mathrm{d}x + F_2(x, y)\mathrm{d}y$ je totálním diferenciálem nějaké funkce právě tehdy, když na množině G platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

1. Rovinný případ - $\mathbb{R}^2$

Definice: Oblast $G \subseteq \mathbb{R}^2$ nazýváme jednoduše souvislou oblastí, jestliže pro ni platí:
Pro všechny jednoduché uzavřené křivky $\mathcal{K} \subset G$ platí, že vnitřek křivky leží v množině G.

Věta: Nechť $\vec{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ je rovinné vektorové pole spojitě diferencovatelné na jednoduše souvislé množině $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak $\vec{F}$ je potenciální právě tehdy, když na množině G platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Důsledek: Nechť $\vec{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ je rovinné vektorové pole spojitě diferencovatelné na jednoduše souvislé množině $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak dif. forma $F_1(x,y)\mathrm{d}x + F_2(x,y)\mathrm{d}y$ je totálním diferenciálem nějaké funkce právě tehdy, když na množině G platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

1. Rovinný případ - $\mathbb{R}^2$

Definice: Oblast $G \subseteq \mathbb{R}^2$ nazýváme jednoduše souvislou oblastí, jestliže pro ni platí:
Pro všechny jednoduché uzavřené křivky $\mathcal{K} \subset G$ platí, že vnitřek křivky leží v množině G.

Věta: Nechť $\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ je rovinné vektorové pole spojitě diferencovatelné na jednoduše souvislé množině $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak $\vec{F}$ je potenciální právě tehdy, když na množině G platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Důsledek: Nechť $\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ je rovinné vektorové pole spojitě diferencovatelné na jednoduše souvislé množině $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak dif. forma $F_1(x, y)\mathrm{d}x + F_2(x, y)\mathrm{d}y$ je totálním diferenciálem nějaké funkce právě tehdy, když na množině G platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

2. Prostorový případ - $\mathbb{R}^3$

Definice: Oblast $G \subseteq \mathbb{R}^3$ nazýváme jednoduše souvislou oblastí, jestliže pro ni platí:
Pro všechny jednoduché uzavřené křivky $\mathcal{K} \subset G$ existuje plocha S, taková, že celá leží v G a křivka $\mathcal{K}$ je hranicí plochy S.

Věta: Nechť $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ je vektorové pole spojitě diferencovatelné na jednoduše souvislé množině $G \subseteq \mathbb{R}^3$. Pak $\vec{F}$ je potenciální právě tehdy, když na množině G platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Důsledek: Nechť $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ je vektorové pole spojitě diferencovatelné na jednoduše souvislé množině $G \subseteq \mathbb{R}^3$. Pak $F_1(x,y,z)\mathrm{d}x + F_2(x,y,z)\mathrm{d}y + F_3(x,y,z)\mathrm{d}z$ je totálním diferenciálem nějaké funkce právě tehdy, když na množině G platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

2. Prostorový případ - $\mathbb{R}^3$

Definice: Oblast $G \subseteq \mathbb{R}^3$ nazýváme jednoduše souvislou oblastí, jestliže pro ni platí:
Pro všechny jednoduché uzavřené křivky $\mathcal{K} \subset G$ existuje plocha S, taková, že celá leží v G a křivka $\mathcal{K}$ je hranicí plochy S.

Věta: Nechť $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ je vektorové pole spojitě diferencovatelné na jednoduše souvislé množině $G \subseteq \mathbb{R}^3$. Pak $\vec{F}$ je potenciální právě tehdy, když na množině G platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Důsledek: Nechť $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ je vektorové pole spojitě diferencovatelné na jednoduše souvislé množině $G \subseteq \mathbb{R}^3$. Pak $F_1(x,y,z)\mathrm{d}x + F_2(x,y,z)\mathrm{d}y + F_3(x,y,z)\mathrm{d}z$ je totálním diferenciálem nějaké funkce právě tehdy, když na množině G platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

2. Prostorový případ - $\mathbb{R}^3$

Definice: Oblast $G \subseteq \mathbb{R}^3$ nazýváme jednoduše souvislou oblastí, jestliže pro ni platí:
Pro všechny jednoduché uzavřené křivky $\mathcal{K} \subset G$ existuje plocha S, taková, že celá leží v G a křivka $\mathcal{K}$ je hranicí plochy S.

Věta: Nechť $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ je vektorové pole spojitě diferencovatelné na jednoduše souvislé množině $G \subseteq \mathbb{R}^3$. Pak $\vec{F}$ je potenciální právě tehdy, když na množině G platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Důsledek: Nechť $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ je vektorové pole spojitě diferencovatelné na jednoduše souvislé množině $G \subseteq \mathbb{R}^3$. Pak $F_1(x,y,z)\mathrm{d}x + F_2(x,y,z)\mathrm{d}y + F_3(x,y,z)\mathrm{d}z$ je totálním diferenciálem nějaké funkce právě tehdy, když na množině G platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

2. Prostorový případ - $\mathbb{R}^3$

Definice: Oblast $G \subseteq \mathbb{R}^3$ nazýváme jednoduše souvislou oblastí, jestliže pro ni platí:
Pro všechny jednoduché uzavřené křivky $\mathcal{K} \subset G$ existuje plocha S, taková, že celá leží v G a křivka $\mathcal{K}$ je hranicí plochy S.

Věta: Nechť $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ je vektorové pole spojitě diferencovatelné na jednoduše souvislé množině $G \subseteq \mathbb{R}^3$. Pak $\vec{F}$ je potenciální právě tehdy, když na množině G platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Důsledek: Nechť $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ je vektorové pole spojitě diferencovatelné na jednoduše souvislé množině $G \subseteq \mathbb{R}^3$. Pak $F_1(x,y,z)\mathrm{d}x + F_2(x,y,z)\mathrm{d}y + F_3(x,y,z)\mathrm{d}z$ je totálním diferenciálem nějaké funkce právě tehdy, když na množině G platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Výpočet potenciálu v $\mathbb{R}^2$

1. způsob Hledáme $U(x,y)$ takovou, že

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = F_1(x,y) \text{ a } \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = F_2(x,y).$$

2. způsob Pole je potenciální na $G \Rightarrow \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{r}}$ nezávisí na cestě.
Zvolíme pevný bod $A = (a_0, b_0) \in G$ a libovolný bod $X = (x_0, y_0)$, zvolíme co "nejjednodušší" křivku s počátečním bodem A a koncovým bodem X. Potom platí $U(x_0, y_0) = \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{r}} + K$, kde K je konstanta.

Výpočet potenciálu v $\mathbb{R}^2$

1. způsob Hledáme $U(x, y)$ takovou, že

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = F_1(x, y) \text{ a } \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = F_2(x, y).$$

2. způsob Pole je potenciální na $G \Rightarrow \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{r}$ nezávisí na cestě.
Zvolíme pevný bod $A = (a_0, b_0) \in G$ a libovolný bod $X = (x_0, y_0)$, zvolíme co "nejjednodušší" křivku s počátečním bodem A a koncovým bodem X. Potom platí $U(x_0, y_0) = \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{r} + K$, kde K je konstanta.

Výpočet potenciálu v $\mathbb{R}^2$

1. způsob Hledáme $U(x, y)$ takovou, že

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = F_1(x, y) \text{ a } \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = F_2(x, y).$$

2. způsob Pole je potenciální na $G \Rightarrow \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{r}}$ nezávisí na cestě.
Zvolíme pevný bod $A = (a_0, b_0) \in G$ a libovolný bod $X = (x_0, y_0)$, zvolíme co "nejjednodušší" křivku s počátečním bodem A a koncovým bodem X. Potom platí $U(x_0, y_0) = \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{r}} + K$, kde K je konstanta.

Výpočet potenciálu v $\mathbb{R}^3$

1. způsob Hledáme $U(x, y, z)$ takovou, že

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z) = F_1(x, y, z), \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z) = F_2(x, y, z) \text{ a}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) = F_3(x, y, z).$$

2. způsob Pole je potenciální na $G \Rightarrow \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{r}}$ nezávisí na cestě.
Zvolíme pevný bod $A = (a_0, b_0, c_0) \in G$ a libovolný bod $X = (x_0, y_0, z_0)$, zvolíme co "nejjednodušší" křivku s počátečním bodem A a koncovým bodem X. Potom platí $U(x_0, y_0, z_0) = \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{r}} + K$, kde K je konstanta.

Výpočet potenciálu v $\mathbb{R}^3$

1. způsob Hledáme $U(x, y, z)$ takovou, že

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z) = F_1(x, y, z), \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z) = F_2(x, y, z) \ \text{a}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) = F_3(x, y, z).$$

2. způsob Pole je potenciální na $G \Rightarrow \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{r}$ nezávisí na cestě.
Zvolíme pevný bod $A = (a_0, b_0, c_0) \in G$ a libovolný bod $X = (x_0, y_0, z_0)$, zvolíme co "nejjednodušší" křivku s počátečním bodem A a koncovým bodem X. Potom platí $U(x_0, y_0, z_0) = \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{r} + K$, kde K je konstanta.

Výpočet potenciálu v $\mathbb{R}^3$

1. způsob Hledáme $U(x, y, z)$ takovou, že

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z) = F_1(x, y, z), \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z) = F_2(x, y, z) \text{ a}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) = F_3(x, y, z).$$

2. způsob Pole je potenciální na $G \Rightarrow \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{r}}$ nezávisí na cestě.
Zvolíme pevný bod $A = (a_0, b_0, c_0) \in G$ a libovolný bod $X = (x_0, y_0, z_0)$, zvolíme co "nejjednodušší" křivku s počátečním bodem A a koncovým bodem X. Potom platí $U(x_0, y_0, z_0) = \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{r}} + K$, kde K je konstanta.