Kapitola 8: Dvojný integrál

Riemanova definice dvojného integrálu přes obdelník

Předpokládejme $f:\ D \subset \mathbb{R}^2 \ \to\ \mathbb{R}$ je spojitá nezáporná funkce. $D = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$. Chceme vypočítat objem tělesa T:

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x \in \langle a,b\rangle,\ y \in \langle c,d\rangle,\ 0 \le z \le f(x,y)\}.$$

Definice: Nechť $f(x,y)$ je omezená funkce na D, potom *dvojným (Riemannovým) integrálem funkce f přes množinu D* rozumíme číslo

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j)\triangle x_i \triangle y_j,$$

pokud limita vpravo je konečná a nezávisí na výběru dělení $a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n = b$, $c = y_0 \le y_1 \le \cdots \le y_n = b$ a výběru bodů $\tilde{x}_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ a $\tilde{y}_j \in \langle y_{j-1}, y_j\rangle$, $i{=}1,\ldots,n,\ j{=}1,\ldots,m.$

Věta: Je-li funkce f spojitá na $D = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$, pak existuje dvojný integrál $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Výpočet dvojného integrálu přes obdelníkové obory

Fubiniova věta pro obdélníkový integrační obor: Nechť $f(x,y)$ je spojitá na množině $D = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$, potom

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Věta: Nechť $g(x)$ je spojitá na množině $\langle a,b\rangle$ a $h(y)$ je spojitá na množině $\langle c,d\rangle$, potom platí

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_c^d h(y)\mathrm{d}y\right).$$

Dvojný integrál přes standardní množinu

Věta: Nechť funkce $f(x,y)$ je omezená na $O = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$ a spojitá na obdélníku O s výjimkou konečného počtu bodů nebo bodů konečného počtu oblouků, potom

$$\iint_O f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ \text{ existuje.}$$

Zavedeme pojem *Standardní množina D*

1. D je omezená, $D \subset \mathbb{R}^2$
2. hranice $\mathcal{H}(\mathcal{D})$ je tvořena konečným počtem jednoduchých uzavřených křivek a bodů.

Definujme funkci

$$g(x,y) \;=\; \begin{cases} f(x,y) & \text{pro } (x,y) \in D\\ 0 & \text{pro } (x,y) \in \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \setminus D\end{cases}$$

$T = \{(x,y,z);\ (x,y) \in D,\ 0 \le z \le f(x,y)\}$ je těleso T. Objem tělesa T:

$$V \;=\; \iint_{\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Dvojný integrál přes standardní množinu - 2
Definice: Nechť funkce $f(x, y)$ je omezená na standardní množině $D \subset \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Položme

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{pro } (x,y) \in D \\ 0 & \text{pro } (x,y) \in \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \setminus D \end{cases},$$

pak *dvojným integrálem funkce f přes množinu D* rozumíme číslo

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

pokud integrál vpravo existuje. Množinu D nazýváme integračním oborem.

Dvojný integrál přes standardní množinu - 3
Věta: Nechť D je standadní množina. Nechť $K \subset D$ a K je tvořena konečně mnoha oblouky a body. Nechť f a g jsou omezené funkce na D a spojité a sobě rovné na množině $D \setminus K$. Potom existují dvojné integrály funkce f a g přes množinu D a rovnají se, t.j.

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

.

Vlastnosti dvojného integrálu
Věta: Nechť existují všechny integrály vystupující ve větě.

1. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak
$$\iint\limits_D \alpha\, f(x,y) + \beta\, g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \alpha \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \beta \iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
2. Nechť $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$, pak
$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
3. Nechť $f(x, y)$ je nezáporná funkce, pak
$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq 0.$$

Standadní množina 1. a 2. typu
Definice: Říkáme, že *D je standardní množina 1. typu* jestliže

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \langle a,b\rangle,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

kde $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)$ jsou spojité funkce na $\langle a, b\rangle$ a $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)\ \forall\, x \in \langle a, b\rangle$. Říkáme, že *$D$ je standardní množina 2. typu* jestliže

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \langle c,d\rangle,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

kde $\psi_1(y),\ \psi_2(y)$ jsou spojité funkce na $\langle c, d\rangle$ a $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)\ \forall\, y \in \langle c, d\rangle$.

Výpočet dvojného integrálu
Fubiniova věta: Nechť existuje $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

1. Nechť D je množina 1. typu
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \langle a,b\rangle,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}.$$
Pak
$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

2. Nechť D je množina 2. typu
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \langle c,d\rangle,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}.$$
Pak
$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Plošný obsah pomocí dvojného integrálu
Poznámka: Dvojného integrálu můžeme využít i pro výpočet plošného obsahu množiny $D \subset \mathbb{R}^2$. Plošný obsah se rovná číselně objemu tělesa o výšce 1, tedy
$$P_D = \iint\limits_D 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Substituční metoda pro dvojný integrál
Mějme zobrazení $\overrightarrow{\Phi} : H \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{\Phi}(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v)) = (x,y)$, rovnice $\begin{array}{rcl} x &=& \varphi(u,v) \\ y &=& \psi(u,v) \end{array}$ nazýváme transformačními rovnicemi.

Definice: Zobrazení $\overrightarrow{\Phi}$ nazývame *ragulární zobrazení* jestliže

1. $\overrightarrow{\Phi}$ je prosté na H, tj. $\forall\,(u_1,v_1),\ (u_2,v_2) \in \mathbb{R}^2$ platí
$$(u_1,v_1) \ne (u_2,v_2) \ \Rightarrow\ \overrightarrow{\Phi}(u_1,v_1) \ne \overrightarrow{\Phi}(u_2,v_2).$$

2. $\overrightarrow{\Phi}$ je na H spojitě diferencovatelné.

3. $$J(u,v) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial\psi}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\psi}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \ne 0$$
pro $\forall\,(u,v) \in H$.

Věta o substituci

Věta: Nechť existuje dvojný integrál $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde D je standardní množina. Nechť $\overrightarrow{\Phi} = (\varphi, \phi)$ je regulární zobrazení takové, že zobrazuje standardní množinu H na standardní množinu D, tj. $\overrightarrow{\Phi}(H) = D$. Pak

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \iint\limits_H f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\,|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Nejčastější substitucí je substituce do polárních souřadnic.

Polární souřadnice

Transformační rovnice pro polární souřadnice jsou

$$\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t, \quad r \in (0,\infty),\ t \in \langle 0, 2\pi) \end{aligned}$$

$$(r,t) \mapsto \overrightarrow{\Phi}(r,t) = (\varphi(r,t),\psi(r,t)) = (x,y)$$

$$J(r,t) = \det\begin{pmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{pmatrix} = r\cos^2 t + r\sin^2 t = r \neq 0.$$

Nevlastní integrály

Definice: Nechť $D \subset \mathbb{R}^2$ je množina

1. neomezená
2. hranice D je tvořena konečným počtem úseček a polopřímek

Nechť $D_n = D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \le n^2\}$. Nechť $f(x,y)$ je omezená funkce na množině D. Nechť pro $\forall\, n \in \mathbb{N}$ existuje

$$\iint\limits_{D_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Potom *nevlastním dvojným integrálem* rozumíme

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

pokud limita vpravo existuje.

Nevlastní integrály - 2

Věta: Je-li $f(x,y)$ spojitá omezená na $D = \langle a,\infty) \times \langle c,\infty)$ potom

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^\infty \left(\int_c^\infty f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_c^\infty \left(\int_a^\infty f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

pokud existují integrály na pravé straně.

Poznámka: podobný vztah platí pro $\quad D = \langle a,b\rangle \times \langle c,\infty) \qquad D = (-\infty,\infty) \times \langle c,\infty)$

$D = \langle a,\infty) \times \langle c,d\rangle \qquad D = (-\infty,\infty) \times \langle c,d\rangle \qquad \vdots$

Laplaceův integrál

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x \qquad a>0$$

Vypočteme nejdříve integrál $I = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ pomocí dvojného integrálu. Protože platí:

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right) = I^2,$$

kde $D = \langle 0,\infty) \times \langle 0,\infty)$. Dostaneme $I = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, po substituci $t = \sqrt{a}x$ potom platí

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Dodatek: Trojný integrál

Trojný integrál

Podobně jako dvojný integrál můžeme zavést trojný integrál

$$\iiint\limits_D f(x,z,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde $D \subset \mathbb{R}^3$ je integrační obor. Jestliže $f(x,y,z)$ je hustota tělesa D v bodě (x,y,z), potom trojný integrál přes množinu D představuje hmotnost tělesa D. Jestliže $D = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \times \langle e,f\rangle$ platí

$$\iiint\limits_D f(x,z,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \;=\; \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Trojný integrál - 2

$D \subset \mathbb{R}^3$:

$$\iiint\limits_D f(x,z,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \;=\; \int_a^b \Big(\iint\limits_{D(x)} f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}x \;=$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Věta o substituci

Nechť $H \subset \mathbb{R}^3$ a zobrazení $\overrightarrow{\Phi} : H \to \mathbb{R}^3$ je regulární, tj.

1. $\overrightarrow{\Phi}$ je prosté a $\overrightarrow{\Phi}(H) = D$
2. $\overrightarrow{\Phi}$ je spojitě diferencovatelné na H
3. $\det J(u,v,w) \neq 0$ pro $\forall\,(u,v,w) \in H$,

potom platí

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \;=\; \iiint\limits_H f(\overrightarrow{\Phi}(u,v,w))|\det J(u,v,w)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

Poznámka: Nejčastější substituce je substituce do sférických souřadnic nebo do válcových (cylindrických) souřadnic.

Sférické a válcové souřadnice

Transformační rovnice pro sférické souřadnice jsou

$$
\begin{aligned}
x &= r\,\cos t\,\sin u\\
y &= r\,\sin t\,\sin u\\
z &= r\,\cos u,\quad r \in (0,\infty),\ t \in \langle 0,2\pi),\ u \in \langle 0,\pi)
\end{aligned}
$$

$$(r,t,u) \mapsto \overrightarrow{\Phi}(r,t,u) = (\varphi_1(r,t,u),\varphi_2(r,t,u),,\varphi_3(r,t,u)) = (x,y,z)$$

det$J(r,t,u) = -r^2\,\sin u$. Transformační rovnice pro válcové souřadnice jsou

$$
\begin{aligned}
x &= r\,\cos t\\
y &= r\,\sin t\\
z &= z,\quad r \in (0,\infty),\ t \in \langle 0,2\pi),\ z \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$$(r,t,z) \mapsto \overrightarrow{\Phi}(r,t,z) = (\varphi_1(r,t,z),\varphi_2(r,t,z),,\varphi_3(r,t,z)) = (x,y,z)$$

det$J(r,t,z) = r$.