

Kapitola 9: Lineární prostor

Zavedení operací sčítání a násobení

Definice:

Říkáme, že na množině X je zadaná *operace sčítání*, kterou označíme symbolem \oplus , je-li pro $\forall x, y \in X$ přiřazen prvek z množiny X nazývaný jejich součtem a označovaný $x \oplus y$.

$$\oplus : (x, y) \mapsto x \oplus y.$$

Říkáme, že na množině X je zadaná *operace násobení reálným číslem*, kterou označíme symbolem \odot , je-li pro $\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{R}$ přiřazen prvek z množiny X nazývaný jejich součinem a označovaný $\alpha \odot x$.

$$\odot : (\alpha, x) \mapsto \alpha \odot x.$$

Obecný lineární prostor

Definice: Necht' V je neprázdná množina, na které jsou definovány operace \oplus, \odot . Říkáme, že množina V spolu s operacemi \oplus, \odot tvoří *lineární prostor* jestliže operace \oplus, \odot splňují následující vlastnosti (axiomy)

1. $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = \mathbf{b} \oplus \mathbf{a}$ pro $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ *komutativní zákon*
2. $(\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \oplus \mathbf{c} = \mathbf{a} \oplus (\mathbf{b} \oplus \mathbf{c})$ pro $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$ *asociativní zákon*
3. $\exists \mathbf{o} \in V$ takový, že $\mathbf{a} \oplus \mathbf{o} = \mathbf{a}$ pro $\forall \mathbf{a} \in V$ *existence nulového prvku*
4. $\forall \mathbf{a}$ existuje $(-\mathbf{a}) \in V$, takový, že $\mathbf{a} \oplus (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}$ *existence opačného prvku*
5. $1 \odot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ pro $\forall \mathbf{a} \in V$.
6. $(\alpha + \beta) \odot \mathbf{a} = (\alpha \odot \mathbf{a}) \oplus (\beta \odot \mathbf{a}) \forall \mathbf{a} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *distributivní zákon*
7. $\alpha \odot (\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) = (\alpha \odot \mathbf{a}) \oplus (\alpha \odot \mathbf{b}) \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ *distributivní zákon*
8. $(\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{a} = \alpha \odot (\beta \odot \mathbf{a})$ pro $\forall \mathbf{a} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Poznámky

- Nadále nebudeme rozlišovat mezi operacemi $+, \oplus, \cdot, \odot$, budeme psát pouze $+, \cdot$. Ze zápisu bude vždy jasné o kterou operaci se jedná.[3mm]
- Prvky lineárního prostoru budeme nazývat vektory.
- Reálná čísla α, β, \dots budeme nazývat skaláry.
- Místo lineární prostor se někdy říká vektorový prostor (jeho prvky jsou vektory).
- Necht' V spolu s operacemi $+, \cdot$ je lineární prostor a necht' $\mathbf{a} \in V$ je libovolný prvek. Potom

1. $0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{o}$
2. $(-1) \cdot \mathbf{a} = (-\mathbf{a})$.

Lineární prostor \mathbb{R}^n

$\mathbb{R}^n = \{\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n); a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$ Pro $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ je součtem prvků \vec{a}, \vec{b} vektor

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Pro $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ je α -násobkem prvků \vec{a} prvek

$$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Věta: Množina \mathbb{R}^n spolu s operacemi $+$ a \cdot tvoří lineární prostor.

Prostor $C(I)$

$C(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ spojitá na } I\}$ Necht' $f, g \in C(I)$, potom

$$f + g = h, h \in C(I) \Leftrightarrow h(x) = f(x) + g(x), \forall x \in I.$$

Necht' $f \in C(I)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom

$$\alpha \cdot f = h, h \in C(I) \Leftrightarrow h(x) = \alpha \cdot f(x), \forall x \in I.$$

Věta: Množina $C(I)$ spolu s operacemi $+$ a \cdot tvoří lineární prostor.

Lineární nezávislost

Definice: Necht' V je lineární prostor, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, pak prvek

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{a}_i$$

nazýváme *lineární kombinací* prvků $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ a čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ koeficienty této lineární kombinace.

Jsou-li všechna čísla $\alpha_i = 0, i = 1, \dots, k$ nazýváme lineární kombinaci *triviální*

Je-li alespoň jedno $\alpha_i \neq 0$ nazýváme lineární kombinaci *netriviální*

Definice: Necht' V je lineární prostor. Systém prvků $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ nazýváme *lineárně nezávislý* (LN), jestliže pouze triviální kombinace těchto prvků je rovna nulovému prvku \mathbf{o} . Systém prvků $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ nazýváme *lineárně závislý* (LZ), jestliže existuje alespoň jedna netriviální kombinace těchto prvků, která je rovna nulovému prvku \mathbf{o} .

Vlastnosti lineárně nezávislých prvků

Věta: Necht' V je lineární prostor.

- Prvky $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ jsou LN \Leftrightarrow žádný z prvků \mathbf{a}_i nelze vyjádřit jako lineární kombinace ostatních prvků.
- Prvky $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ jsou LZ \Leftrightarrow některý z prvků \mathbf{a}_i lze vyjádřit jako lineární kombinace ostatních prvků.

Věta: Necht' V je lineární prostor a $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ je systém prvků. Potom platí: Přičteme-li k nějakému prvku \mathbf{a}_i lineární kombinaci ostatních prvků, pak se LZ nebo LN tohoto systému nezmění.

Báze a dimenze lineárního prostoru

Definice: Necht' V je lineární prostor. Říkáme, že prvky $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ tvoří bázi prostoru V jestliže platí

- $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ jsou LN
- $\forall \mathbf{b} \in V \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\mathbf{b} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k.$$

Poznámka: Jestliže prvky $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ tvoří bázi prostoru V , říkáme, že prvky $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ generují (vytvářejí) prostor V . **Definice:** Jestliže báze obsahuje právě k prvků, potom říkáme, že *dimenze lineárního prostoru V je k* a píšeme

$$\dim V = k$$

Podprostor lineárního prostoru

Definice: Necht' V je lineární prostor. Podmnožinu $V_1 \subset V$ nazveme *podprostorem lineárního prostoru V* , jestliže platí

- (i). $\mathbf{o} \in V_1$
- (ii). $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_1 \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in V_1$
- (iii). $\forall \mathbf{a} \in V_1$ a $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot \mathbf{a} \in V_1$.

Poznámka: Necht' V je lineární prostor. Existují dva triviální podprostory lineárního prostoru V :

$$V_1 = \{\mathbf{o}\}, V_2 = V.$$

Věta: Necht' V je lineární prostor a $V_1 \subset V$ a zároveň $V_1 \neq V$. Potom platí

$$\dim V_1 < \dim V.$$

Řešení algebraických lineárních rovnic jako podprostor prostoru \mathbb{R}^n

Věta: Je dána soustava homogenních lineárních rovnic $A\vec{x} = \vec{0}$, kde A je matice typu (m, n) . Pak všechna řešení této soustavy tvoří podprostor lineárního prostoru \mathbb{R}^n dimenze $n - h(A)$. Naopak každý podprostor prostoru \mathbb{R}^n je množina všech řešení nějaké homogenní soustavy lineárních algebraických rovnic o n neznámých.

Lineární prostor funkcí $C(I)$ a $C^n(I)$

Definice:

$$C(I) = \{f \text{ je funkce spojitá na } I\}$$

$$C^n(I) = \{f \text{ je funkce, která má na } I \text{ spojitě derivace až do řádu } n\}.$$

Platí:

$$C^n(I) \subset C(I) \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Věta:

- (i). $C(I)$ tvoří vzhledem k operacím sčítání funkcí a násobení funkcí reálným číslem lineární prostor.
- (ii). $C^n(I)$ je lineární podprostor prostoru $C(I)$.

Lineární závislost a nezávislost funkcí

1. Funkce $f_1, f_2, \dots, f_k \in C^n(I)$ jsou lineárně nezávislé, jestliže platí

$$\alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_k f_k(x) = 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

2. Funkce $f_1, f_2, \dots, f_k \in C^n(I)$ jsou lineárně závislé, jestliže $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, taková, že

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_k f_k(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Definice: Wronského determinant (Wronskián) funkcí $f_1, f_2, \dots, f_k \in C^{k-1}(I)$ je determinant

$$W_{f_1, f_2, \dots, f_k}(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_k(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_k'(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_1^{(k-1)}(x) & f_2^{(k-1)}(x) & \dots & f_k^{(k-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Lineární závislost a nezávislost funkcí - 2

Věta: Necht' funkce $f_1, f_2, \dots, f_k \in C^{k-1}(I)$.

1. Jsou-li funkce f_1, f_2, \dots, f_k lineárně závislé v $C(I)$, pak

$$W_{f_1, f_2, \dots, f_k}(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

2. Je-li $W_{f_1, f_2, \dots, f_k}(x) \neq 0$ alespoň pro jedno $x \in I$, pak jsou funkce f_1, f_2, \dots, f_k lineárně nezávislé v $C(I)$.

Poznámka: Věta neplatí obráceně, tj. vyjde-li nám Wronskián roven nule pro všechna x , neplyne z toho, že systém je LZ!!!