

1. Sbírka aplikačních příkladů

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad 1.1 Izotermní vnitřní difuze v porézním katalyzátoru je popsána diferenciální rovnicí

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{dy}{dx} = \phi^2 y^n \quad (1)$$

s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} y'(0) &= 0 \\ y(1) &= 1. \end{aligned}$$

Parametr a charakterizuje tvar částice katalyzátoru, $a = 0$ pro desku, $a = 1$ pro váleček, $a = 2$ pro kuličku, n je řád reakce a ϕ Thieleho modul.

a) Vyřešte numericky tuto rovnici pro $n = 0$, $a = 1$ a $\phi = 1$ a vypočtěte efektivní faktor definovaný

$$\eta = \frac{a+1}{\phi^2} y'(1).$$

b) Vyřešte tuto rovnici numericky pro $n = 1$, $a = 2$ a $\phi = 1; 2; 4$ a vypočtěte efektivní faktor.

c) Vyřešte numericky tuto rovnici pro $n = 1$, $a = 0$ a $\phi = 1; 2; 4$ a vypočtěte efektivní faktor.

Příklad 1.2 Axiální sdílení hmoty v trubkovém homogenním reaktoru je pro reakci druhého řádu popsáno rovnicí

$$\frac{1}{Pe} \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{du}{dx} - Ru^2 = 0 \quad (2)$$

s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} u(0) - \frac{1}{Pe} \frac{du}{dx}(0) &= 1 \\ \frac{du}{dx}(1) &= 0 \end{aligned}$$

Řešte úlohu pro parametry $Pe = 6$, $R = 2$.

Příklad 1.3 Axiální sdílení hmoty a tepla v trubkovém reaktoru lze na základě difuzního modelu popsat soustavou dvou nelineárních diferenciálních rovnic, které po kombinaci a převedení do bezrozměrného tvaru poskytnou rovnici

$$\frac{1}{Pe} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - p y^m T^{-m} e^{(K - \frac{R}{T})} = 0, \quad \text{kde} \quad T = 1 - H(1 - y) \quad (3)$$

Okrajové podmínky byly pro tento problém odvozeny Danckwertsem:

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 + \frac{1}{Pe} \frac{dy}{dx}(0) \\ \frac{dy}{dx}(1) &= 0 \end{aligned}$$

Použijte parametry $Pe = 10$, $p = 0.6$, $K = 14.1$, $R = 10.85$, $m = 1.0$, $H = 0.1437$

Příklad 1.4 Mějme rovnici popisující neizotermní vnitřní difuzi v částici katalyzátoru tvaru desky

$$y'' = \phi^2 y e^{\left(\frac{\alpha \beta (1 - y)}{1 + \beta (1 - y)} \right)} \quad (4)$$

s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} y'(0) &= 0 \\ y(1) &= 1. \end{aligned}$$

Použijte parametry $\alpha = 20$, $\beta = 0.1$, $\phi = 1$.

Příklad 1.5 V inženýrských aplikacích se zřídka setkáváme s úlohami, které nemají řešení. Tento příklad uvádí jeden z takových případů. Průběh exotermní reakce u explozivních materiálů lze popsat rovnicí

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} = -\delta e^{\theta} \quad (5)$$

s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} \theta(1) &= 0 \\ \frac{d\theta}{dx}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Pro $\delta < \delta^*$ má tato rovnice pro dané okrajové podmínky řešení, pro, $\delta > \delta^*$ toto řešení neexistuje (v takovém případě dochází k výbuchu). Ukažte, že hodnota tohoto kritického parametru δ^* je $\delta = 0,8785$.

Příklad 1.6 Jednoduchý model chování sloupce plasmy stlačované zářením odvodil Troesch ve tvaru nelineární okrajové úlohy

$$y'' = \alpha \sinh \alpha y \tag{6}$$

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 1.$$

Řešte úlohu metodou střelby od $x = 0$ pro hodnoty $\alpha = 0,8; 1; 2; 5$ ($y'(0) \doteq 0,0457$); 10 ($y'(0) \doteq 0,0003$); 20 (pro poslední hodnotu parametru nelze použít metodu střelby, úloha je "stiff").

Řešte úlohu metodou sítí pro hodnoty $\alpha = 0,8; 1; 2; 5; 10; 20$.