Numerické metody
e-sbírka

Miroslava Dubcová, Carmen Simerská
Ústav matematiky

2016

K prohlížení e-Sbírky použijte AcrobatReader!

Hodně úspěchů při řešení příkladů a cvičení

Obsah

Návod

- Poklepnutím myší v obsahu vyberte kapitolu.
- Zobrazí se Vám seznam příkladů a cvičení.
- V seznamu můžete listovat pomocí šipek .
- Poklepnutím na zeleně zvýrazněné číslo příkladu (Příklad 1.1) se Vám zobrazí výsledek.
- Zde můžete zvolit možnost zobrazit podrobné řešení (**Řešení**).
- Ve výsledku i řešení můžete opět listovat pomocí šipek.
- Poklepnutím na **Obsah** se dostanete na seznam kapitol.
- Poklepnutím na **Zpět** se dostanete na předchozí úroveň, tj. z řešení na výsledek a z výsledku na seznam příkladů.

Obsah

1. Interpolace

- Příklad 1.1 Ověřte že funkce

$$S(x) = \begin{cases} 0,2x - 0,18x^2 + 0,48x^3 & x \in \langle 0,1\rangle\,, \\ 0,5 + 1,28(x-1) + 1,26(x-1)^2 - 1,04(x-1)^3 & x \in (1,2\rangle\,, \\ 2 + 0,68(x-2) - 1,86(x-2)^2 + 0,68(x-2)^3 & x \in (2,3\rangle\,. \end{cases}$$

je úplný kubický spline, kde $S'(0) = 0,2$ a $S'(3) = -1$, který v uzlových bodech nabývá hodnot daných tabulkou

x_i	0	1	2	3
y_i	0	0,5	2	1,5

.

Načrtněte graf $S''(x)$ v $\langle 0,3\rangle$.

- Příklad 1.2 Zvolme uzly $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 3$. Pomocí přirozeného kubického spline interpolujte funkci f, pro kterou známe hodnoty v uzlových bodech $f(x_0) = 2,\ f(x_1) = 1,\ f(x_2) = 3$.

- Příklad 1.3 Zvolme uzly $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 3$. Pomocí úplného kubického spline interpolujte funkci f, pro kterou známe hodnoty v uzlových bodech $f(x_0) = 2,\ f(x_1) = 1,\ f(x_2) = 3$ a hodnoty derivace $f'(x_0) = -1,\ f'(x_2) = 2$.

- Příklad 1.4 Zvolme uzly $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 3$. Pomocí periodického kubického spline interpolujte funkci f, pro kterou známe hodnoty v uzlových bodech $f(x_0) = 2,\ f(x_1) = 1,\ f(x_2) = 3$.

- Příklad 1.5 Zvolme uzly $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 3$. Pomocí kubického spline 3. typu interpolujte funkci f, pro kterou známe hodnoty v uzlových bodech $f(x_0) = 2,\ f(x_1) = 1,\ f(x_2) = 3$ a hodnoty druhé derivace $f''(x_0) = 2,\ f''(x_2) = 1$.

- Příklad 1.6 Pomocí přirozeného kubického splinu interpolujte funkci, která je zadána v tabelární formě.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	1	0	10

- Příklad 1.7 Sestrojte úplný kubický spline S, který je dán hodnotami v uzlech x_i

x_i	-2	0	1
S_i	4	-1	0
S'_i	0		3

.

Cvičení:

- Cvičení 1.1 Ověřte že funkce

$$S(x) = \begin{cases} 0,15x - 0,15x^2 + 0,5x^3 & x \in \langle 0,1 \rangle \,, \\ 0,5 + 1,35(x-1) + 1,35(x-1)^2 - 1,2(x-1)^3 & x \in (1,2 \rangle \,, \\ 2 + 0,45(x-2) - 2,25(x-2)^2 + 1,3(x-2)^3 & x \in (2,3 \rangle \,. \end{cases}$$

je kubický spline, kde $S''(0) = -0,3$ a $S''(3) = 3,3$, který v uzlových bodech nabývá hodnot daných tabulkou

x_i	0	1	2	3
y_i	0	0,5	2	1,5

.

Načrtněte graf $S''(x)$ v intervalu $\langle 0,3 \rangle$.

- Cvičení 1.2 Zvolme uzly $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3$. Pomocí přirozeného kubického spline interpolujte funkci f, pro kterou známe hodnoty v uzlových bodech $f(x_0) = -1,\ f(x_1) = 2,\ f(x_2) = 1$.

Příklad 1.1 Ověřte že funkce

$$S(x) = \begin{cases} 0,2x - 0,18x^2 + 0,48x^3 & x \in \langle 0,1\rangle\,, \\ 0,5 + 1,28(x-1) + 1,26(x-1)^2 - 1,04(x-1)^3 & x \in (1,2\rangle\,, \\ 2 + 0,68(x-2) - 1,86(x-2)^2 + 0,68(x-2)^3 & x \in (2,3\rangle\,. \end{cases}$$

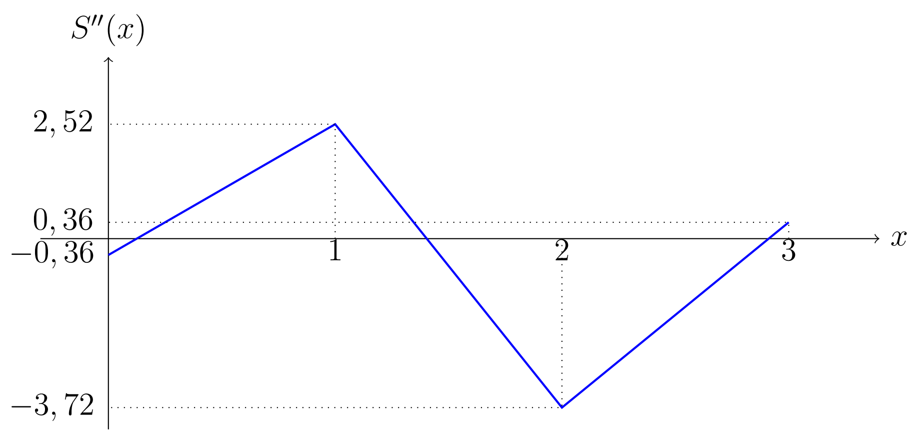
je úplný kubický spline, kde $S'(0) = 0,2$ a $S'(3) = -1$, který v uzlových bodech nabývá hodnot daných tabulkou

x_i	0	1	2	3
y_i	0	0,5	2	1,5

.

Načrtněte graf $S''(x)$ v $\langle 0,3\rangle$.

Výsledek: Funkce je úplný kubický spline. Po částech lineární funkce S'' je graficky zobrazena na obrázku:



Řešení **Zpět**

Příklad 1.2 Zvolme uzly $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 3$. Pomocí přirozeného kubického spline interpolujte funkci f, pro kterou známe hodnoty v uzlových bodech $f(x_0) = 2,\ f(x_1) = 1,\ f(x_2) = 3$.

Výsledek:

Přirozený kubický spline má tvar:

$$S(x) = \begin{cases} 2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}x^3 & x \in \langle 0, 1\rangle \\ 1 - \frac{1}{3}(x-1) + (x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 & x \in (1, 3\rangle \end{cases}.$$

Řešení Zpět

Příklad 1.3 Zvolme uzly $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 3$. Pomocí úplného kubického spline interpolujte funkci f, pro kterou známe hodnoty v uzlových bodech $f(x_0) = 2,\ f(x_1) = 1,\ f(x_2) = 3$ a hodnoty derivace $f'(x_0) = -1,\ f'(x_2) = 2$.

Výsledek:
Úplný kubický spline má tvar:

$$S(x) = \begin{cases} 2 - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 & x \in \langle 0, 1\rangle \\ 1 - \frac{1}{2}(x-1) + (x-1)^2 - \frac{1}{8}(x-1)^3 & x \in (1, 3\rangle \end{cases}.$$

Řešení Zpět

Příklad 1.4 Zvolme uzly $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 3$. Pomocí periodického kubického spline interpolujte funkci f, pro kterou známe hodnoty v uzlových bodech $f(x_0) = 2,\ f(x_1) = 1,\ f(x_2) = 3$.

Výsledek:
Periodický kubický spline má tvar:

$$S(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{3}x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 & x \in \langle 0, 1\rangle \\ 1 - \frac{1}{3}(x-1) + 2(x-1)^2 - \frac{2}{3}(x-1)^3 & x \in (1, 3\rangle \end{cases}.$$

Řešení **Zpět**

Příklad 1.5 Zvolme uzly $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 3$. Pomocí kubického spline 3. typu interpolujte funkci f, pro kterou známe hodnoty v uzlových bodech $f(x_0) = 2,\ f(x_1) = 1,\ f(x_2) = 3$ a hodnoty druhé derivace $f''(x_0) = 2,\ f''(x_2) = 1$.

Výsledek:
Kubický spline 3. typu má tvar:

$$S(x) = \begin{cases} 2 - \frac{17}{9}x + x^2 - \frac{1}{9}x^3 & x \in \langle 0, 1\rangle \\ 1 - \frac{2}{9}(x-1) + \frac{2}{3}(x-1)^2 - \frac{1}{36}(x-1)^3 & x \in (1, 3\rangle \end{cases}.$$

Řešení **Zpět**

Příklad 1.6 Pomocí přirozeného kubického splinu interpolujte funkci, která je zadána v tabelární formě.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	1	0	10

Výsledek:
Úplný kubický spline má tvar:

$$S(x) = \begin{cases} 1 + x - x^3 & x \in \langle 0, 1 \rangle \,, \\ 1 - 2(x-1) - 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 & x \in (1, 2 \rangle \,, \\ 4(x-2) + 9(x-2)^2 - 3(x-2)^3 & x \in (2, 3 \rangle \,. \end{cases}$$

Řešení **Zpět**

Příklad 1.7 Sestrojte úplný kubický spline S, který je dán hodnotami v uzlech x_i

x_i	-2	0	1
S_i	4	-1	0
S'_i	0		3

.

Výsledek:
Úplný kubický spline má tvar:

$$S(x) = \begin{cases} 1 + x - x^3 & x \in \langle 0, 1\rangle\,, \\ 1 - 2(x-1) - 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 & x \in (1, 2\rangle\,, \\ 4(x-2) + 9(x-2)^2 - 3(x-2)^3 & x \in (2, 3\rangle\,. \end{cases}$$

Řešení Zpět

Cvičení 1.1 Ověřte že funkce

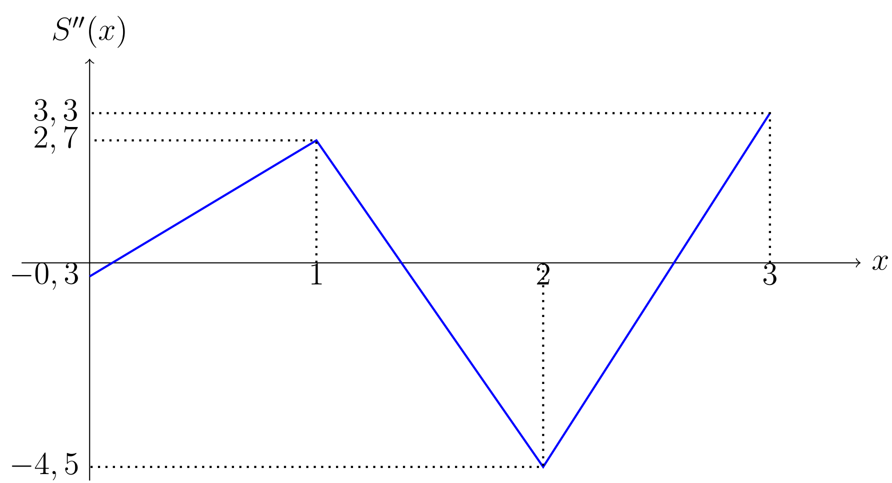
$$S(x) = \begin{cases} 0,15x - 0,15x^2 + 0,5x^3 & x \in \langle 0, 1\rangle\,, \\ 0,5 + 1,35(x-1) + 1,35(x-1)^2 - 1,2(x-1)^3 & x \in (1, 2\rangle\,, \\ 2 + 0,45(x-2) - 2,25(x-2)^2 + 1,3(x-2)^3 & x \in (2, 3\rangle\,. \end{cases}$$

je kubický spline, kde $S''(0) = -0,3$ a $S''(3) = 3,3$, který v uzlových bodech nabývá hodnot daných tabulkou

x_i	0	1	2	3
y_i	0	0,5	2	1,5

Načrtněte graf $S''(x)$ v intervalu $\langle 0, 3\rangle$.

Výsledek: Funkce $S(x)$ je kubický spline 3. typu. Po částech lineární funkce S'' je graficky zobrazena na obr.



Zpět

Cvičení 1.2 Zvolme uzly $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3$. Pomocí přirozeného kubického spline interpolujte funkci f, pro kterou známe hodnoty v uzlových bodech $f(x_0) = -1,\ f(x_1) = 2,\ f(x_2) = 1$.

Výsledek:
Přirozený kubický spline má tvar:

$$S(x) = \begin{cases} -1 + 4(x-1) - (x-1)^3 & x \in \langle 1, 2 \rangle \\ 2 + (x-2) - 3(x-2)^2 + (x-2)^3 & x \in \langle 2, 3 \rangle \end{cases}.$$

Zpět

Příklad 1.1 Ověřte že funkce

$$S(x) = \begin{cases} 0,2x - 0,18x^2 + 0,48x^3 & x \in \langle 0,1 \rangle \,, \\ 0,5 + 1,28(x-1) + 1,26(x-1)^2 - 1,04(x-1)^3 & x \in (1,2 \rangle \,, \\ 2 + 0,68(x-2) - 1,86(x-2)^2 + 0,68(x-2)^3 & x \in (2,3 \rangle \,. \end{cases}$$

je úplný kubický spline, kde $S'(0) = 0,2$ a $S'(3) = -1$, který v uzlových bodech nabývá hodnot daných tabulkou

x_i	0	1	2	3
y_i	0	0,5	2	1,5

.

Načrtněte graf $S''(x)$ v $\langle 0,3 \rangle$.

Řešení:
Nejprve ověříme, že funkce

$$S(x) = \begin{cases} 0,2x - 0,18x^2 + 0,48x^3 & x \in \langle 0,1 \rangle \,, \\ 0,5 + 1,28(x-1) + 1,26(x-1)^2 - 1,04(x-1)^3 & x \in (1,2 \rangle \,, \\ 2 + 0,68(x-2) - 1,86(x-2)^2 + 0,68(x-2)^3 & x \in (2,3 \rangle \,. \end{cases}$$

splňuje interpolační podmínky dané tabulkou a zároveň je spojitá i ve vnitřních uzlech x_i:

$S(0) = 0$

$S(1_-) = S(1_+) = 0,5$

$S(2_-) = S(2_+) = 2$

$S(3) = 1,5$.

Zpět

Vyjádříme první derivaci,

$$S'(x) = \begin{cases} 0,2 - 0,36x + 1,44x^2 & x \in \langle 0,1 \rangle\,, \\ 1,28 + 2,52(x-1) - 3,12(x-1)^2 & x \in (1,2\rangle\,, \\ 0,68 - 3,72(x-2) + 2,04(x-2)^2 & x \in (2,3\rangle\,, \end{cases}$$

ověříme spojitost prvních derivací ve vnitřních uzlech:

$$S'(1_-) = S'(1_+) = 1,28$$

$$S'(2_-) = S'(2_+) = 0,68$$

a podmínky pro typ úplného splinu: $S'(0) = 0,2$ a $S'(3) = -1$.

Také hodnoty druhých derivací

$$S''(x) = \begin{cases} -0,36 + 2,88x & x \in \langle 0,1 \rangle\,, \\ 2,52 - 6,24(x-1) & x \in (1,2\rangle\,, \\ -3,72 + 4,08(x-2) & x \in (2,3\rangle\,, \end{cases}$$

jsou spojité i ve vnitřních uzlech:

$$S''(1_-) = S''(1_+) = 2,52$$

$$S''(2_-) = S''(2_+) = -3,72$$

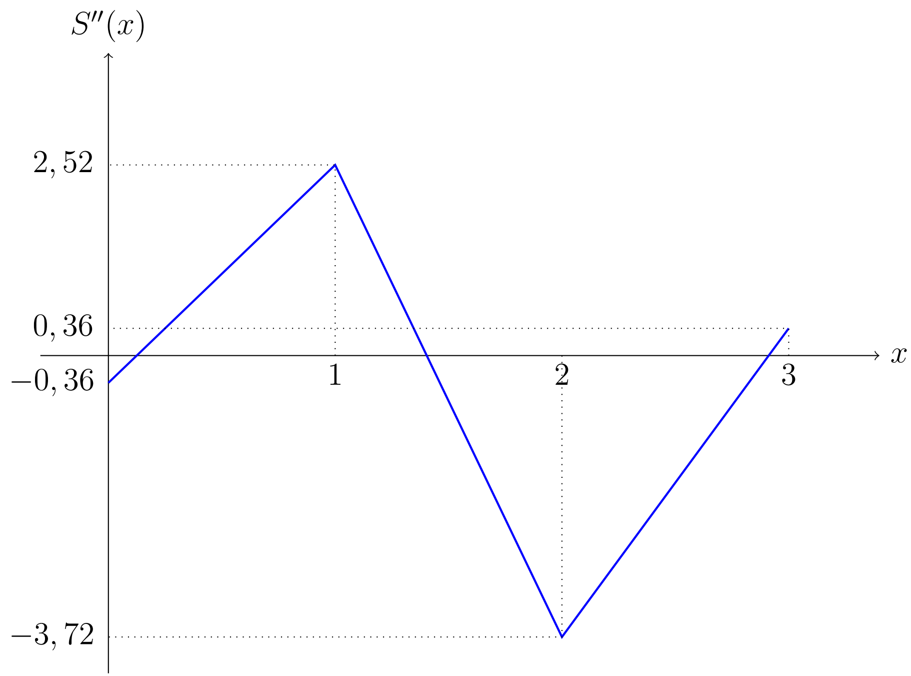
Jedná se tedy o kubický spline se zadanými úplnými podmínkami.

Pro obrázek funkce S'' zjistíme hodnoty v krajních bodech dělení :

$S''(0) = -0,36$

$S''(3) = 0,36$

Po částech lineární funkce S'' je graficky zobrazena na obr.



Zpět

Příklad 1.2 Zvolme uzly $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 3$. Pomocí přirozeného kubického spline interpolujte funkci f, pro kterou známe hodnoty v uzlových bodech $f(x_0) = 2,\ f(x_1) = 1,\ f(x_2) = 3$.

Řešení:
Definujme kubický spline, t.j. po částech polynomiální funkci tvaru

$$S(x) = \begin{cases} \alpha_0 + \beta_0(x-0) + \gamma_0(x-0)^2 + \delta_0(x-0)^3 & x \in \langle 0, 1\rangle\,, \\ \alpha_1 + \beta_1(x-1) + \gamma_1(x-1)^2 + \delta_1(x-1)^3 & x \in (1, 3\rangle\,. \end{cases} \tag{1}$$

Je tedy třeba určit 8 koeficientů $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ tak, aby funkce S byla kubickým splinem spňujícím v dělicích bodech intervalu $\langle 0, 3\rangle$ (v uzlech) interpolační podmínky. Vypočteme si první derivaci hledaného splinu

$$S'(x) = \begin{cases} \beta_0 + 2\gamma_0 x + 3\delta_0 x^2 & x \in \langle 0, 1\rangle\,, \\ \beta_1 + 2\gamma_1(x-1) + 3\delta_1(x-1)^2 & x \in (1, 3\rangle\,, \end{cases} \tag{2}$$

a druhou derivaci

$$S''(x) = \begin{cases} 2\gamma_0 + 6\delta_0 x & x \in \langle 0, 1\rangle\,, \\ 2\gamma_1 + 6\delta_1(x-1) & x \in (1, 3\rangle\,, \end{cases} \tag{3}$$

Pro spline platí následujících 6 podmínek:

$$\begin{aligned} S(x_{i+}) &= \lim_{x \to x_i^+} S(x) = f(x_i), \quad \text{pro} \quad i = 0, 1 \\ S(x_{i+1_-}) &= \lim_{x \to x_{i+1}^-} S(x) = f(x_{i+1}), \quad \text{pro} \quad i = 0, 1 \\ S'(x_{i-}) &= S'(x_{i+}), \quad \text{pro} \quad i = 1 \\ S''(x_{i-}) &= S''(x_{i+}) \quad \text{pro} \quad i = 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Zpět

V případě přirozeného spline přidáme ještě dvě podmínky:

$$S''(x_0) = S''(x_2) = 0;$$

Z těchto podmínek dostaneme následujících 8 rovnic pro 8 neznámých $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \quad i = 0, 1$:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 2, \\
\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 + \delta_0 &= 1, \\
\alpha_1 &= 1, \\
\alpha_1 + 2\beta_1 + 4\gamma_1 + 8\delta_1 &= 3, \\
\beta_1 &= \beta_0 + 2\gamma_0 + 3\delta_0, \\
2\gamma_1 &= 2\gamma_0 + 6\delta_0, \\
2\gamma_0 &= 0, \\
2\gamma_1 + 12\delta_1 &= 0
\end{aligned}$$

Z toho přímo dostáváme: $\boxed{\alpha_0 = 2}$, $\boxed{\alpha_1 = 1}$, $\boxed{\gamma_0 = 0}$. Ostatní konstanty vypočteme Gaussovou eliminací z rovnic:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\beta_0 & + & \delta_0 & & & & & & & = & -1 \\
\beta_0 & + & 3\delta_0 & - & \beta_1 & & & & & = & 0 \\
 & & & & \beta_1 & + & 2\gamma_1 & + & 4\delta_1 & = & 1 \\
 & & 3\delta_0 & & & - & \gamma_1 & & & = & 0 \\
 & & & & & & \gamma_1 & + & 6\delta_1 & = & 0
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \\
0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0
\end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 6
\end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\delta_1 = -\tfrac{1}{6}}, \boxed{\gamma_1 = 1}, \boxed{\beta_1 = -\tfrac{1}{3}}, \boxed{\delta_0 = \tfrac{1}{3}}, \boxed{\beta_0 = -\tfrac{4}{3}}$$

Přirozený kubický spline má tedy tvar:

$$S(x) = \begin{cases} 2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}x^3 & x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1 - \frac{1}{3}(x-1) + (x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 & x \in (1, 3\rangle \end{cases}.$$

Zpět

Příklad 1.3 Zvolme uzly $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 3$. Pomocí úplného kubického spline interpolujte funkci f, pro kterou známe hodnoty v uzlových bodech $f(x_0) = 2,\ f(x_1) = 1,\ f(x_2) = 3$ a hodnoty derivace $f'(x_0) = -1,\ f'(x_2) = 2$.

Řešení:
Definujme kubický spline, t.j. po částech polynomiální funkci tvaru

$$S(x) = \begin{cases} \alpha_0 + \beta_0(x-0) + \gamma_0(x-0)^2 + \delta_0(x-0)^3 & x \in \langle 0, 1 \rangle\,, \\ \alpha_1 + \beta_1(x-1) + \gamma_1(x-1)^2 + \delta_1(x-1)^3 & x \in (1, 3 \rangle\,. \end{cases} \tag{5}$$

Je tedy třeba určit 8 koeficientů $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ tak, aby funkce S byla kubickým splinem spňujícím v dělicích bodech intervalu $\langle 0, 3 \rangle$ (v uzlech) interpolační podmínky. Vypočteme si první derivaci hledaného splinu

$$S'(x) = \begin{cases} \beta_0 + 2\gamma_0 x + 3\delta_0 x^2 & x \in \langle 0, 1 \rangle\,, \\ \beta_1 + 2\gamma_1(x-1) + 3\delta_1(x-1)^2 & x \in (1, 3 \rangle\,, \end{cases} \tag{6}$$

a druhou derivaci

$$S''(x) = \begin{cases} 2\gamma_0 + 6\delta_0 x & x \in \langle 0, 1 \rangle\,, \\ 2\gamma_1 + 6\delta_1(x-1) & x \in (1, 3 \rangle\,, \end{cases} \tag{7}$$

Pro spline platí následujících 6 podmínek:

$$\begin{aligned} & S(x_{i+}) = \lim_{x \to x_i^+} S(x) = f(x_i), \quad \text{pro} \quad i = 0, 1 \\ & S(x_{i+1_-}) = \lim_{x \to x_{i+1}^-} S(x) = f(x_{i+1}), \quad \text{pro} \quad i = 0, 1 \\ & S'(x_{i-}) = S'(x_{i+}), \quad \text{pro} \quad i = 1 \\ & S''(x_{i-}) = S''(x_{i+}) \quad \text{pro} \quad i = 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Zpět

V případě úplného spline přidáme ještě dvě podmínky:

$$S'(x_0) = -1,\ S'(x_2) = 2;$$

Z těchto podmínek dostaneme následujících 8 rovnic pro 8 neznámých $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \quad i = 0, 1:$

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 2, \\
\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 + \delta_0 &= 1, \\
\alpha_1 &= 1, \\
\alpha_1 + 2\beta_1 + 4\gamma_1 + 8\delta_1 &= 3, \\
\beta_1 &= \beta_0 + 2\gamma_0 + 3\delta_0, \\
2\gamma_1 &= 2\gamma_0 + 6\delta_0, \\
\beta_0 &= -1, \\
\beta_1 + 4\gamma_1 + 12\delta_1 &= 2.
\end{aligned}$$

Z toho přímo dostáváme: $\boxed{\alpha_0 = 2}$, $\boxed{\alpha_1 = 1}$, $\boxed{\beta_0 = -1}$. Ostatní konstanty vypočteme Gaussovou eliminací z rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
\gamma_0 & + & \delta_0 & & & & & & & = & 0 \\
 & & & & \beta_1 & + & 2\gamma_1 & + & 4\delta_1 & = & 1 \\
2\gamma_0 & + & 3\delta_0 & - & \beta_1 & & & & & = & 1 \\
\gamma_0 & + & 3\delta_0 & & & - & \gamma_1 & & & = & 0 \\
 & & & & \beta_1 & + & 4\gamma_1 & + & 12\delta_1 & = & 2
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \\
2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 2
\end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 24 & -3
\end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\delta_1 = -\frac{1}{8}}, \boxed{\gamma_1 = 1}, \boxed{\beta_1 = -\frac{1}{2}}, \boxed{\delta_0 = \frac{1}{2}}, \boxed{\gamma_0 = -\frac{1}{2}}$$

Úplný kubický spline má tedy tvar:

$$S(x) = \begin{cases} 2 - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 & x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1 - \frac{1}{2}(x-1) + (x-1)^2 - \frac{1}{8}(x-1)^3 & x \in (1, 3 \rangle \end{cases}.$$

Zpět

Příklad 1.4 Zvolme uzly $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 3$. Pomocí periodického kubického spline interpolujte funkci f, pro kterou známe hodnoty v uzlových bodech $f(x_0) = 2,\ f(x_1) = 1,\ f(x_2) = 3$.

Řešení:
Definujme kubický spline, t.j. po částech polynomiální funkci tvaru

$$S(x) = \begin{cases} \alpha_0 + \beta_0(x-0) + \gamma_0(x-0)^2 + \delta_0(x-0)^3 & x \in \langle 0, 1\rangle\,, \\ \alpha_1 + \beta_1(x-1) + \gamma_1(x-1)^2 + \delta_1(x-1)^3 & x \in (1, 3\rangle\,. \end{cases} \tag{9}$$

Je tedy třeba určit 8 koeficientů $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ tak, aby funkce S byla kubickým splinem spňujícím v dělicích bodech intervalu $\langle 0, 3\rangle$ (v uzlech) interpolační podmínky. Vypočteme si první derivaci hledaného splinu

$$S'(x) = \begin{cases} \beta_0 + 2\gamma_0 x + 3\delta_0 x^2 & x \in \langle 0, 1\rangle\,, \\ \beta_1 + 2\gamma_1(x-1) + 3\delta_1(x-1)^2 & x \in (1, 3\rangle\,, \end{cases} \tag{10}$$

a druhou derivaci

$$S''(x) = \begin{cases} 2\gamma_0 + 6\delta_0 x & x \in \langle 0, 1\rangle\,, \\ 2\gamma_1 + 6\delta_1(x-1) & x \in (1, 3\rangle\,, \end{cases} \tag{11}$$

Pro spline platí následujících 6 podmínek:

$$\begin{aligned} S(x_{i+}) &= \lim_{x \to x_i^+} S(x) = f(x_i), \quad \text{pro} \quad i = 0, 1 \\ S(x_{i+1_-}) &= \lim_{x \to x_{i+1}^-} S(x) = f(x_{i+1}), \quad \text{pro} \quad i = 0, 1 \\ S'(x_{i-}) &= S'(x_{i+}), \quad \text{pro} \quad i = 1 \\ S''(x_{i-}) &= S''(x_{i+}) \quad \text{pro} \quad i = 1. \end{aligned} \tag{12}$$

Zpět

V případě periodického spline přidáme ještě dvě podmínky:

$$S'(x_0) = S'(x_2)\,,\ S''(x_0) = S''(x_2).$$

Z těchto podmínek dostaneme následujících 8 rovnic pro 8 neznámých $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \quad i = 0, 1$:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 2,\\
\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 + \delta_0 &= 1,\\
\alpha_1 &= 1,\\
\alpha_1 + 2\beta_1 + 4\gamma_1 + 8\delta_1 &= 3,\\
\beta_1 &= \beta_0 + 2\gamma_0 + 3\delta_0,\\
2\gamma_1 &= 2\gamma_0 + 6\delta_0,\\
\beta_0 &= \beta_1 + 4\gamma_1 + 12\delta_1,\\
\gamma_0 &= 2\gamma_1 + 12\delta_1\,.
\end{aligned}$$

Z toho přímo dostáváme: $\boxed{\alpha_0 = 2}$, $\boxed{\alpha_1 = 1}$. Ostatní konstanty vypočteme Gaussovou eliminací z rovnic:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\beta_0 & + & \gamma_0 & + & \delta_0 & & & & & & & = & -1\\
 & & & & & & \beta_1 & + & 2\gamma_1 & + & 4\delta_1 & = & 1\\
\beta_0 & + & 2\gamma_0 & + & 3\delta_0 & - & \beta_1 & & & & & = & 0\\
 & & \gamma_0 & + & 3\delta_0 & & & - & \gamma_1 & & & = & 0\\
\beta_0 & & & & & - & \beta_1 & - & 4\gamma_1 & - & 12\delta_1 & = & 0\\
 & & \gamma_0 & & & & & - & \gamma_1 & - & 6\delta_1 & = & 0
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -4 & -12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_1 = -\tfrac{2}{3}}, \boxed{\gamma_1 = 2}, \boxed{\beta_1 = -\tfrac{1}{3}}, \boxed{\delta_0 = \tfrac{4}{3}}, \boxed{\gamma_0 = -2}, \boxed{\beta_0 = -\tfrac{1}{3}}$$

Periodický kubický spline má tedy tvar:

$$S(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{3}x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 & x \in \langle 0, 1\rangle \\ 1 - \frac{1}{3}(x-1) + 2(x-1)^2 - \frac{2}{3}(x-1)^3 & x \in (1, 3\rangle \end{cases}.$$

Zpět

Příklad 1.5 Zvolme uzly $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Pomocí kubického spline 3. typu interpolujte funkci f, pro kterou známe hodnoty v uzlových bodech $f(x_0) = 2$, $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = 3$ a hodnoty druhé derivace $f''(x_0) = 2$, $f''(x_2) = 1$.

Řešení:
Definujme kubický spline, t.j. po částech polynomiální funkci tvaru

$$S(x) = \begin{cases} \alpha_0 + \beta_0(x-0) + \gamma_0(x-0)^2 + \delta_0(x-0)^3 & x \in \langle 0, 1\rangle\,, \\ \alpha_1 + \beta_1(x-1) + \gamma_1(x-1)^2 + \delta_1(x-1)^3 & x \in (1, 3\rangle\,. \end{cases} \tag{13}$$

Je tedy třeba určit 8 koeficientů $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ tak, aby funkce S byla kubickým splinem spňujícím v dělicích bodech intervalu $\langle 0, 3\rangle$ (v uzlech) interpolační podmínky. Vypočteme si první derivaci hledaného splinu

$$S'(x) = \begin{cases} \beta_0 + 2\gamma_0 x + 3\delta_0 x^2 & x \in \langle 0, 1\rangle\,, \\ \beta_1 + 2\gamma_1(x-1) + 3\delta_1(x-1)^2 & x \in (1, 3\rangle\,, \end{cases} \tag{14}$$

a druhou derivaci

$$S''(x) = \begin{cases} 2\gamma_0 + 6\delta_0 x & x \in \langle 0, 1\rangle\,, \\ 2\gamma_1 + 6\delta_1(x-1) & x \in (1, 3\rangle\,, \end{cases} \tag{15}$$

Pro spline platí následujících 6 podmínek:

$$\begin{aligned} S(x_{i+}) &= \lim_{x \to x_i^+} S(x) = f(x_i), \quad \text{pro} \quad i = 0, 1 \\ S(x_{i+1_-}) &= \lim_{x \to x_{i+1}^-} S(x) = f(x_{i+1}), \quad \text{pro} \quad i = 0, 1 \\ S'(x_{i-}) &= S'(x_{i+}), \quad \text{pro} \quad i = 1 \\ S''(x_{i-}) &= S''(x_{i+}) \quad \text{pro} \quad i = 1. \end{aligned} \tag{16}$$

Zpět

V případě spline 3. typu přidáme ještě dvě podmínky:

$$S''(x_0) = 2,\ S''(x_2) = 1;$$

Z těchto podmínek dostaneme následujících 8 rovnic pro 8 neznámých $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \quad i = 0, 1:$

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 2, \\
\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 + \delta_0 &= 1, \\
\alpha_1 &= 1, \\
\alpha_1 + 2\beta_1 + 4\gamma_1 + 8\delta_1 &= 3, \\
\beta_1 &= \beta_0 + 2\gamma_0 + 3\delta_0, \\
2\gamma_1 &= 2\gamma_0 + 6\delta_0, \\
2\gamma_0 &= 2, \\
2\gamma_1 + 12\delta_1 &= 1.
\end{aligned}$$

Z toho přímo dostáváme: $\boxed{\alpha_0 = 2}$, $\boxed{\alpha_1 = 1}$, $\boxed{\gamma_0 = 1}$. Ostatní konstanty vypočteme Gaussovou eliminací z rovnic:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\beta_0 & + & \delta_0 & & & & & & & = & -2 \\
 & & & & \beta_1 & + & 2\gamma_1 & + & 4\delta_1 & = & 1 \\
\beta_0 & + & 3\delta_0 & - & \beta_1 & & & & & = & -2 \\
 & + & 3\delta_0 & & & - & \gamma_1 & & & = & -1 \\
 & & & & & + & 2\gamma_1 & + & 12\delta_1 & = & 1
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \\
1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -2 \\
0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 12 & 1
\end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\
0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 12 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 36 & -1
\end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\delta_1 = -\frac{1}{36}}, \boxed{\gamma_1 = \frac{2}{3}}, \boxed{\beta_1 = -\frac{2}{9}}, \boxed{\delta_0 = -\frac{1}{9}}, \boxed{\beta_0 = -\frac{17}{9}}$$

Kubický spline 3. typu má tedy tvar:

$$S(x) \;=\; \begin{cases} 2-\frac{17}{9}x+x^2-\frac{1}{9}x^3 & x\in\langle 0,1\rangle \\ 1-\frac{2}{9}(x-1)+\frac{2}{3}(x-1)^2-\frac{1}{36}(x-1)^3 & x\in(1,3\rangle \end{cases}.$$

Zpět

Příklad 1.6 Pomocí přirozeného kubického splinu interpolujte funkci, která je zadána v tabelární formě.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	1	0	10

Řešení: Hledáme po částech polynomiální funkci tvaru

$$S(x) = \begin{cases} \alpha_0 + \beta_0(x-0) + \gamma_0(x-0)^2 + \delta_0(x-0)^3 & x \in \langle 0,1\rangle\,, \\ \alpha_1 + \beta_1(x-1) + \gamma_1(x-1)^2 + \delta_1(x-1)^3 & x \in (1,2\rangle\,, \\ \alpha_2 + \beta_2(x-2) + \gamma_2(x-2)^2 + \delta_2(x-2)^3 & x \in (2,3\rangle\,. \end{cases} \tag{17}$$

Je tedy třeba určit 12 koeficientů $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ tak, aby funkce S byla přirozeným splinem interpolujícím v dělicích bodech intervalu $\langle 0,3\rangle$ (v uzlech) interpolační podmínky. Dále musí být první derivace hledaného splinu

$$S'(x) = \begin{cases} \beta_0 + 2\gamma_0 x + 3\delta_0 x^2 & x \in \langle 0,1\rangle\,, \\ \beta_1 + 2\gamma_1(x-1) + 3\delta_1(x-1)^2 & x \in (1,2\rangle\,, \\ \beta_2 + 2\gamma_2(x-2) + 3\delta_2(x-2)^2 & x \in (2,3\rangle\,, \end{cases} \tag{18}$$

a druhá derivace

$$S''(x) = \begin{cases} 2\gamma_0 + 6\delta_0 x & x \in \langle 0,1\rangle\,, \\ 2\gamma_1 + 6\delta_1(x-1) & x \in (1,2\rangle\,, \\ 2\gamma_2 + 6\delta_2(x-2) & x \in (2,3\rangle\,, \end{cases} \tag{19}$$

spojité funkce i ve vnitřních dělicích bodech intervalu $\langle 0,3\rangle$.

Zpět

Navíc přirozený kubický spline splňuje další dvě podmínky:

$$S''(0) = S''(3) = 0 \tag{20}$$

Interpolační podmínky a spojitost ve vnitřních uzlech dávají celkem 6 rovnic:

1) $S(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_0 = 1}$

2) $S(1_-) = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 + \delta_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta_0 + \gamma_0 + \delta_0 = 0$

3) $S(1_+) = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_1 = 1}$

4) $S(2_-) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = -1$

5) $S(2_+) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_2 = 0}$

6) $S(3) = 10 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \delta_2 = 10 \quad \Rightarrow \quad \beta_2 + \gamma_2 + \delta_2 = 10$

Z požadavku spojitosti prvních (18) a druhých derivací (19) splinu S ve vnitřních uzlových bodech vyplývají další podmínky:

7) $S'(1_-) = S'(1_+) \quad \Rightarrow \quad \beta_0 + 2\gamma_0 + 3\delta_0 - \beta_1 = 0$

8) $S'(2_-) = S'(2_+) \quad \Rightarrow \quad \beta_1 + 2\gamma_1 + 3\delta_1 - \beta_2 = 0$

9) $S''(1_-) = S''(1_+) \quad \Rightarrow \quad 2\gamma_0 + 6\delta_0 - 2\gamma_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_0 + 3\delta_0 - \gamma_1 = 0$

10) $S''(2_-) = S''(2_+) \quad \Rightarrow \quad 2\gamma_1 + 6\delta_1 - 2\gamma_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 + 3\delta_1 - \gamma_2 = 0$

Protože S má být přirozeným splinem, budou pro něj platit další 2 podmínky v krajních uzlech

11) $S''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\gamma_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma_0 = 0}$

12) $S''(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\gamma_2 + 6\delta_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\gamma_2 = -3\delta_2}$

Pomocí 11) upravíme 2), 7) a 9) na rovnice:

2') $\underline{\beta_0 = -\delta_0} \quad \Rightarrow \quad 7')\underline{\beta_1 = 2\delta_0}$

9') $\underline{\gamma_1 = 3\delta_0}$

Na základě 12), 2'), 7') a 9') lze nyní zredukovat původních 12 neznámých na 4 neznámé: $\delta_0, \delta_1, \beta_2, \delta_2$, které budou splňovat soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
\delta_0 & + & \delta_1 & & & + & \delta_2 & = & 0 \\
5\delta_0 & + & \delta_1 & & & & & = & -1 \\
 & & & & \beta_2 & - & 2\delta_2 & = & 10 \\
8\delta_0 & + & 3\delta_1 & - & \beta_2 & & & = & 0
\end{array}$$

Tuto soustavu přepíšeme do maticového tvaru a řešíme například Gaussovou eliminací.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \delta_0 & \delta_1 & \beta_2 & \delta_2 \end{array} \\
\left[\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
5 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 10 \\
8 & 3 & -1 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
\sim \cdots \sim
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \delta_0 & \delta_1 & \beta_2 & \delta_2 \end{array} \\
\left[\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 4 & 0 & 5 & 1 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 10 \\
0 & 0 & 0 & 15 & -45
\end{array}\right]
\end{array} .$$

Tedy $\boxed{\delta_2 = -3}$, $\boxed{\beta_2 = 4}$, $\boxed{\delta_1 = 4}$, $\boxed{\delta_0 = -1}$.

Zpět

Po dosazení do vztahů 12), 2'), 7') a 9') bude $\boxed{\beta_0 = 1}$, $\boxed{\beta_1 = -2}$, $\boxed{\gamma_1 = -3}$ a $\boxed{\gamma_2 = 9}$. Spolu s již známými hodnotami koeficientů $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \gamma_0$ dostáváme všech 12 hledaných koeficientů splinu.

Předpis právě zkonstruovaného splinu je tedy

$$S(x) = \begin{cases} 1 + x - x^3 & x \in \langle 0, 1 \rangle\,, \\ 1 - 2(x-1) - 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 & x \in (1, 2\rangle\,, \\ 4(x-2) + 9(x-2)^2 - 3(x-2)^3 & x \in (2, 3\rangle\,. \end{cases}$$

Zpět

Příklad 1.7 Sestrojte úplný kubický spline S, který je dán hodnotami v uzlech x_i

x_i	-2	0	1
S_i	4	-1	0
S'_i	0		3

.

Řešení: Hledáme po částech polynomiální funkci tvaru

$$S(x) = \begin{cases} \alpha_0 + \beta_0(x+2) + \gamma_0(x+2)^2 + \delta_0(x+2)^3 & x \in \langle -2, 0\rangle\,, \\ \alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2 + \delta_1 x^3 & x \in (0, 1\rangle\,. \end{cases} \tag{21}$$

Je tedy třeba určit 8 koeficientů $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ tak, aby funkce S byla úplným splinem interpolujícím v dělicích bodech intervalu $\langle -2, 1\rangle$ interpolační podmínky. Dále musí být první derivace hledaného splinu

$$S'(x) = \begin{cases} \beta_0 + 2\gamma_0(x+2) + 3\delta_0(x+2)^2 & x \in \langle -2, 0\rangle\,, \\ \beta_1 + 2\gamma_1 x + 3\delta_1 x^2 & x \in (0, 1\rangle\,, \end{cases} \tag{22}$$

a druhá derivace

$$S''(x) = \begin{cases} 2\gamma_0 + 6\delta_0(x+2) & x \in \langle -2, 0\rangle\,, \\ 2\gamma_1 + 6\delta_1 x & x \in (0, 1\rangle\,, \end{cases} \tag{23}$$

spojité funkce i ve vnitřním dělicím bodě intervalu $\langle -2, 1\rangle$.
Navíc úplný kubický spline by měl splňovat další zadané dvě podmínky:

$$S'(-2) = 0 \quad \text{a} \quad S'(1) = 3\,. \tag{24}$$

Zpět

Napíšeme nejdříve 2 rovnice pro splnění podmínek (24):

1) $S'(-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta_0 = 0}$

2) $S'(1) = 3 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 + 2\gamma_1 + 3\delta_1 = 3$

Interpolační podmínky a spojitost ve vnitřním uzlu dávají celkem 4 dalších rovnic:

3) $S(-2) = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_0 = 4}$

4) $S(0_-) = -1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 + 2\beta_0 + 4\gamma_0 + 8\delta_0 = -1 \quad \Rightarrow \quad \gamma_0 + 2\delta_0 = -\frac{5}{4}$

5) $S(0_+) = -1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_1 = -1}$

6) $S(1_-) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 1$

Z požadavku spojitosti prvních (22) a druhých derivací (23) splinu S ve vnitřním uzlu vyplývají další 2 podmínky:

7) $S'(0_-) = S'(0_+) \quad \Rightarrow \quad 4\gamma_0 + 12\delta_0 - \beta_1 = 0$

8) $S''(0_-) = S''(0_+) \quad \Rightarrow \quad 2\gamma_0 + 12\delta_0 = 2\gamma_1 \quad \Rightarrow \quad \gamma_0 + 6\delta_0 - \gamma_1 = 0$

Dostali jsme tedy 5 rovnic o 5 neznámých:

$$\gamma_0, \delta_0, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \ .$$

Tuto soustavu zapíšeme v maticového tvaru a následně řešíme Gaussovou eliminaci.

Tedy $\boxed{\delta_1 = -\frac{1}{4}}$, $\boxed{\gamma_1 = \frac{5}{2}}$, $\boxed{\beta_1 = -\frac{5}{4}}$, $\boxed{\delta_0 = \frac{15}{16}}$, $\boxed{\gamma_0 = -\frac{25}{8}}$.

Spolu s již známými hodnotami koeficientů $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0$ dostáváme všech 8 hledaných koeficientů splinu, jehož předpis je tedy:

$$S(x) = \begin{cases} 4 - \frac{25}{8}(x+2)^2 + \frac{15}{16}(x+2)^3 & x \in \langle -2, 0 \rangle \,, \\ -1 - \frac{5}{4}\,x + \frac{5}{2}\,x^2 - \frac{1}{4}\,x^3 & x \in (0, 1\rangle \,. \end{cases}$$

Zpět

$$
\begin{array}{ccccc}
\gamma_0 & \delta_0 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1
\end{array}
\qquad\qquad\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
\gamma_0 & \delta_0 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
4 & 12 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3
\end{array}\right]
\sim \cdots \sim
\left[\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 12 & 1 & -4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{15}{4} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -3 & \frac{3}{4}
\end{array}\right].
$$

2. Numerická derivace

- Příklad 2.1 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů diferenční formuli pro výpočet první derivace $f'(\bar{x})$, kde $\bar{x} = 1$. Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = \frac{3}{2}$.

- Příklad 2.2 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů diferenční formuli pro výpočet druhé derivace $f''(\bar{x})$, kde $\bar{x} = 1$. Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = \frac{3}{2}$.

- Příklad 2.3 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů diferenční formuli pro výpočet druhé derivace $f''(\bar{x})$, kde $\bar{x} = 0$. Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = -1,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$.

- Příklad 2.4 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů diferenční formuli pro výpočet třetí derivace $f'''(\bar{x})$, kde $\bar{x} = 0$. Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = -\frac{1}{2},\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$.

Cvičení:

- Cvičení 2.1 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů diferenční formuli pro výpočet druhé derivace $f''(\bar{x})$, kde $\bar{x} = 2$. Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = 0,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4$.

- Cvičení 2.2 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů diferenční formuli pro výpočet druhé derivace $f''(\bar{x})$, kde $\bar{x} = 0$. Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = 0,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4$.

Obsah

Příklad 2.1 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů diferenční formuli pro výpočet první derivace $f'(\bar{x})$, kde $\bar{x} = 1$. Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = \frac{3}{2}$.

Výsledek: Formule pro výpočet první derivace má tvar:

$$f'(1) \doteq \frac{1}{5} f(-1) - f(0) + \frac{4}{5} f\left(\frac{3}{2}\right).$$

Řešení **Zpět**

Příklad 2.2 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů diferenční formuli pro výpočet druhé derivace $f''(\bar{x})$, kde $\bar{x} = 1$. Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = \frac{3}{2}$.

Výsledek: Formule pro výpočet druhé derivace má tvar:

$$f''(1) \doteq \frac{4}{5} f(-1) - \frac{4}{3} f(0) + \frac{8}{15} f\left(\frac{3}{2}\right).$$

Řešení **Zpět**

Příklad 2.3 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů diferenční formuli pro výpočet druhé derivace $f''(\bar{x})$, kde $\bar{x} = 0$. Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = -1,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$.

Výsledek: Formule pro výpočet druhé derivace má tvar:

$$f''(0) \doteq \frac{7}{9} f(-1) - \frac{32}{9} f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(1) - \frac{2}{9} f(2).$$

Řešení **Zpět**

Příklad 2.4 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů diferenční formuli pro výpočet třetí derivace $f'''(\bar{x})$, kde $\bar{x} = 0$. Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = -\frac{1}{2},\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$.

Výsledek: Formule pro výpočet třetí derivace má tvar:

$$f'''(0) \doteq -\frac{8}{5} f\left(-\frac{1}{2}\right) + 8 f\left(\frac{1}{2}\right) - 8 f(1) + \frac{8}{5} f(2).$$

Řešení **Zpět**

Cvičení 2.1 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů diferenční formuli pro výpočet druhé derivace $f''(\bar{x})$, kde $\bar{x} = 2$. Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = 0,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4$.

Výsledek: Formule pro výpočet druhé derivace má tvar:

$$f''(0) \doteq \frac{1}{4} f(0) - \frac{1}{2} f(2) + \frac{1}{4} f(4).$$

Zpět

Cvičení 2.2 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů diferenční formuli pro výpočet druhé derivace $f''(\bar{x})$, kde $\bar{x} = 0$. Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = 0,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4$.

Výsledek: Formule pro výpočet druhé derivace má tvar:

$$f''(0) \doteq \frac{3}{4}f(0) - \frac{7}{2}f(2) + 4f(3) - \frac{5}{4}f(4).$$

Zpět

Příklad 2.1 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů diferenční formuli pro výpočet první derivace $f'(\bar{x})$, kde $\bar{x} = 1$. Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = \frac{3}{2}$.

Řešení:
Platí formule

$$f'(\bar{x}) \doteq C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2).$$

Formule musí platit přesně pro polynomy stupně menšího nebo rovného 2. Za funkci $f(x)$ postupně dosadíme polynomy

$$1,\ x,\ x^2.$$

Dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcccccl} C_0 & + & C_1 & + & C_2 & = & 0 \\ -C_0 & + & & & \frac{3}{2}C_2 & = & 1 \\ C_0 & + & & & \frac{9}{4}C_2 & = & 2 \end{array}.$$

Soustavu vyřešíme Gaussovou eliminací:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 & \frac{9}{4} & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 9 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & 12 \end{array}\right).$$

Zpětnou eliminací dostáváme: $C_2 = \frac{4}{5}$, $C_1 = -1$, $C_0 = \frac{1}{5}$. Hledaná formule má tedy tvar:

$$f'(1) \doteq \frac{1}{5} f(-1) - f(0) + \frac{4}{5} f\left(\frac{3}{2}\right).$$

Zpět

Příklad 2.2 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů diferenční formuli pro výpočet druhé derivace $f''(\bar{x})$, kde $\bar{x} = 1$. Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = \frac{3}{2}$.

Řešení:
Platí formule

$$f''(\bar{x}) \doteq C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2).$$

Formule musí platit přesně pro polynomy stupně menšího nebo rovného 2. Za funkci $f(x)$ postupně dosadíme polynomy

$$1,\ x,\ x^2.$$

Dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} C_0 & + & C_1 & + & C_2 & = & 0 \\ -C_0 & + & & & \frac{3}{2}C_2 & = & 0 \\ C_0 & + & & & \frac{9}{4}C_2 & = & 2 \end{array}.$$

Soustavu vyřešíme Gaussovou eliminací:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{9}{4} & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 9 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 8 \end{array}\right).$$

Zpětnou eliminací dostáváme: $C_2 = \frac{8}{15}$, $C_1 = -\frac{4}{3}$, $C_0 = \frac{4}{5}$. Hledaná formule má tedy tvar:

$$f''(1) \doteq \frac{4}{5}f(-1) - \frac{4}{3}f(0) + \frac{8}{15}f\left(\frac{3}{2}\right).$$

Zpět

Příklad 2.3 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů diferenční formuli pro výpočet druhé derivace $f''(\bar{x})$, kde $\bar{x} = 0$. Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = -1,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$.

Řešení: Platí formule

$$f''(\bar{x}) \doteq C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + C_3 f(x_3).$$

Formule musí platit přesně pro polynomy stupně menšího nebo rovného 3. Za funkci $f(x)$ postupně dosadíme polynomy

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3.$$

Dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} C_0 & + & C_1 & + & C_2 & + & C_3 & = & 0 \\ -C_0 & + & \frac{1}{2}C_1 & + & C_2 & + & 2C_3 & = & 0 \\ C_0 & + & \frac{1}{4}C_1 & + & C_2 & + & 4C_3 & = & 2 \\ -C_0 & + & \frac{1}{8}C_1 & + & C_2 & + & 8C_3 & = & 0 \end{array}.$$

Soustavu vyřešíme Gaussovou eliminací:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & 1 & 4 & 2 \\ -1 & \frac{1}{8} & 1 & 8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 16 & 8 \\ -8 & 1 & 8 & 64 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 12 & 8 \\ 0 & 9 & 16 & 72 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 18 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 54 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 18 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 36 & -8 \end{array}\right).$$

Zpětnou eliminací dostáváme: $C_3 = -\frac{2}{9}$, $C_2 = 3$, $C_1 = -\frac{32}{9}$, $C_0 = \frac{7}{9}$. Hledaná formule má tedy tvar:

$$f''(0) \doteq \frac{7}{9} f(-1) - \frac{32}{9} f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(1) - \frac{2}{9} f(2).$$

Zpět

Příklad 2.4 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů diferenční formuli pro výpočet třetí derivace $f'''(\bar{x})$, kde $\bar{x} = 0$. Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = -\frac{1}{2},\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$.

Řešení:
Platí formule

$$f'''(\bar{x}) \doteq C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + C_3 f(x_3).$$

Formule musí platit přesně pro polynomy stupně menšího nebo rovného 3. Za funkci $f(x)$ postupně dosadíme polynomy

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3.$$

Dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} C_0 & + & C_1 & + & C_2 & + & C_3 & = & 0 \\ -\frac{1}{2}C_0 & + & \frac{1}{2}C_1 & + & C_2 & + & 2C_3 & = & 0 \\ \frac{1}{4}C_0 & + & \frac{1}{4}C_1 & + & C_2 & + & 4C_3 & = & 0 \\ -\frac{1}{8}C_0 & + & \frac{1}{8}C_1 & + & C_2 & + & 8C_3 & = & 6 \end{array}.$$

Soustavu vyřešíme Gaussovou eliminací:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 4 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 1 & 8 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 16 & 0 \\ -1 & 1 & 8 & 64 & 48 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 65 & 48 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 60 & 48 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 48 \end{array}\right).$$

Zpětnou eliminací dostáváme: $C_3 = \frac{8}{5}$, $C_2 = -8$, $C_1 = 8$, $C_0 = -\frac{8}{5}$. Hledaná formule má tedy tvar:

$$f'''(0) \doteq -\frac{8}{5} f\left(-\frac{1}{2}\right) + 8 f\left(\frac{1}{2}\right) - 8 f(1) + \frac{8}{5} f(2).$$

Zpět

3. Numerická integrace

- Příklad 3.1 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů formuli pro výpočet integrálu

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 2.$

- Příklad 3.2 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů formuli pro výpočet integrálu

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$

- Příklad 3.3 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů formuli pro výpočet integrálu

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 1.$

- Příklad 3.4 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů formuli pro výpočet integrálu

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = 1.$

Cvičení:

- Cvičení 3.1 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů formuli pro výpočet integrálu

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

  Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = 1$.

- Cvičení 3.2 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů formuli pro výpočet integrálu

$$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

  Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = 0,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3$.

Obsah

Příklad 3.1 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů formuli pro výpočet integrálu

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 2$.

Výsledek: Formule pro výpočet integrálu má tvar:

$$\int_0^2 f(x)\,dx \doteq -\frac{4}{9}f(-1) + \frac{5}{3}f(0) + \frac{7}{9}f(2).$$

Řešení **Zpět**

Příklad 3.2 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů formuli pro výpočet integrálu

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$

Výsledek: Formule pro výpočet integrálu má tvar:

$$\int_0^2 f(x)\,dx \doteq -\frac{2}{9}f(-1) + \frac{11}{9}f(0) + \frac{11}{9}f(2) - \frac{2}{9}f(3).$$

Řešení **Zpět**

Příklad 3.3 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů formuli pro výpočet integrálu

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 1.$

Výsledek: Formule pro výpočet integrálu má tvar:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \doteq \frac{1}{6}f(0) + \frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}f(1).$$

Řešení **Zpět**

Příklad 3.4 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů formuli pro výpočet integrálu

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = 1.$

Výsledek: Formule pro výpočet integrálu má tvar:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \doteq \frac{1}{8}f(0) + \frac{3}{8}f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{8}f\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{8}f(1).$$

Řešení **Zpět**

Cvičení 3.1 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů formuli pro výpočet integrálu

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = 1$.

Výsledek: Formule pro výpočet integrálu má tvar:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \doteq \frac{3}{4}f(\frac{1}{3}) + \frac{1}{4}f(1).$$

Zpět

Cvičení 3.2 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů formuli pro výpočet integrálu

$$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = 0,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3.$

Výsledek: Formule pro výpočet integrálu má tvar:

$$\int_0^3 f(x)\,dx \doteq \frac{3}{4}f(0) + \frac{9}{4}f(2).$$

Zpět

Příklad 3.1 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů formuli pro výpočet integrálu

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0=-1,\ x_1=0,\ x_2=2.$

Řešení:
Platí formule

$$\int_0^2 f(x)\,dx \ \doteq\ C_0 f(x_0)+C_1 f(x_1)+C_2 f(x_2).$$

Formule musí platit přesně pro polynomy stupně menšího nebo rovného 2. Za funkci $f(x)$ dosadíme polynomy

$$1,\ x,\ x^2.$$

Dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcccc} C_0 & + & C_1 & + & C_2 & = & \int_0^2 \mathrm{d}x & = & 2 \\ -C_0 & + & & & 2C_2 & = & \int_0^2 x\mathrm{d}x & = & 2 \\ C_0 & + & & & 4C_2 & = & \int_0^2 x^2\mathrm{d}x & = & \frac{8}{3} \end{array}.$$

Soustavu vyřešíme Gaussovou eliminací:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & \frac{8}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & \frac{2}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & \frac{14}{3} \end{array}\right).$$

Zpětnou eliminací dostáváme: $C_2=\frac{7}{9}$, $C_1=\frac{5}{3}$, $C_0=-\frac{4}{9}$. Hledaná formule má tedy tvar:

$$\int_0^2 f(x)\,dx \doteq -\frac{4}{9}f(-1)+\frac{5}{3}f(0)+\frac{7}{9}f(2).$$

Zpět

Příklad 3.2 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů formuli pro výpočet integrálu

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$.

Řešení:

Platí formule

$$\int_0^2 f(x)\,dx \doteq C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + C_3 f(x_3).$$

Formule musí platit přesně pro polynomy stupně menšího nebo rovného 3. Za funkci $f(x)$ dosadíme polynomy $1,\ x,\ x^2,\ x^3$. Dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} C_0 & + & C_1 & + & C_2 & + & C_3 & = & \int_0^2 \mathrm{d}x & = & 2 \\ -C_0 & + & & & 2C_2 & + & 3C_3 & = & \int_0^2 x\mathrm{d}x & = & 2 \\ C_0 & + & & & 4C_2 & + & 9C_3 & = & \int_0^2 x^2\mathrm{d}x & = & \frac{8}{3} \\ -C_0 & + & & & 8C_2 & + & 27C_3 & = & \int_0^2 x^3\mathrm{d}x & = & 4 \end{array}.$$

Soustavu vyřešíme Gaussovou eliminací:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 9 & \frac{8}{3} \\ -1 & 0 & 8 & 27 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 8 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 9 & 28 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 12 & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 6 & 24 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 12 & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -\frac{8}{3} \end{array}\right).$$

Zpětnou eliminací dostáváme: $C_3 = -\frac{2}{9}$, $C_2 = \frac{11}{9}$, $C_1 = \frac{11}{9}$, $C_0 = -\frac{2}{9}$. Hledaná formule má tedy tvar:

$$\int_0^2 f(x)\,dx \doteq -\frac{2}{9}f(-1) + \frac{11}{9}f(0) + \frac{11}{9}f(2) - \frac{2}{9}f(3).$$

Zpět

Příklad 3.3 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů formuli pro výpočet integrálu

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 1.$

Řešení:
Platí formule

$$\int_0^1 f(x)\,dx \ \doteq\ C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + C_3 f(x_3).$$

Formule musí platit přesně pro polynomy stupně menšího nebo rovného 3. Za funkci $f(x)$ dosadíme polynomy $1,\ x,\ x^2,\ x^3$.
Dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} C_0 & + & C_1 & + & C_2 & + & C_3 & = & \int_0^1 \mathrm{d}x & = & 1 \\ -C_0 & + & & & \frac{1}{2}C_2 & + & C_3 & = & \int_0^1 x\mathrm{d}x & = & \frac{1}{2} \\ C_0 & + & & & \frac{1}{4}C_2 & + & C_3 & = & \int_0^1 x^2\mathrm{d}x & = & \frac{1}{3} \\ -C_0 & + & & & \frac{1}{8}C_2 & + & C_3 & = & \int_0^1 x^3\mathrm{d}x & = & \frac{1}{4} \end{array}.$$

Soustavu vyřešíme Gaussovou eliminací:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & \frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{9}{8} & 2 & \frac{5}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 2 & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 2 & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Zpětnou eliminací dostáváme: $C_3 = \frac{1}{6}$, $C_2 = \frac{2}{3}$, $C_1 = \frac{1}{6}$, $C_0 = 0$. Hledaná formule má tedy tvar:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \doteq \frac{1}{6}f(0) + \frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}f(1).$$

Zpět

Příklad 3.4 Odvoďte metodou neurčitých koeficientů formuli pro výpočet integrálu

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Funkci $f(x)$ máte zadánu v bodech $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = 1.$

Řešení:

Platí formule

$$\int_0^1 f(x)\,dx \ \doteq\ C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + C_3 f(x_3).$$

Formule musí platit přesně pro polynomy stupně menšího nebo rovného 3. Za funkci $f(x)$ dosadíme polynomy $1,\ x,\ x^2,\ x^3$. Dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{ccccccccccc} C_0 & + & C_1 & + & C_2 & + & C_3 & = & \int_0^1 \mathrm{d}x & = & 1 \\ & & \frac{1}{3}C_1 & + & \frac{2}{3}C_2 & + & C_3 & = & \int_0^1 x\mathrm{d}x & = & \frac{1}{2} \\ & & \frac{1}{9}C_1 & + & \frac{4}{9}C_2 & + & C_3 & = & \int_0^1 x^2\mathrm{d}x & = & \frac{1}{3} \\ & & \frac{1}{27}C_1 & + & \frac{8}{27}C_2 & + & C_3 & = & \int_0^1 x^3\mathrm{d}x & = & \frac{1}{4} \end{array}.$$

Soustavu vyřešíme Gaussovou eliminací:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{8}{27} & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 27 & \frac{27}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 6 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 6 & 24 & \frac{21}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 6 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{3}{4} \end{array}\right).$$

Zpětnou eliminací dostáváme: $C_3 = \frac{1}{8}$, $C_2 = \frac{3}{8}$, $C_1 = \frac{3}{8}$, $C_0 = \frac{1}{8}$. Hledaná formule má tedy tvar:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \doteq \frac{1}{8}f(0) + \frac{3}{8}f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{8}f\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{8}f(1).$$

Zpět

4. Numerické metody lineární algebry

- Příklad 4.1 Nechť je dána matice

$$A = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,3 & 0,0 & 0,0 \\ 0,1 & 0,6 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,3 & -0,5 & 0,0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,0 & 0,0 & 0,2 \\ 0,0 & 0,1 & 0,5 & 0,0 & -0,1 \end{bmatrix}.$$

  Zjistěte, zda je spektrální poloměr r_A menší než 1.

- Příklad 4.2 Nechť je dána matice

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

  Zjistěte, zda jsou všechna vlastní čísla matice A nezáporná.

- Příklad 4.3 Zjistěte, zda lze soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 6x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 1 \\ & & 6x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ & & & & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 8x_4 & = & 2 \end{array}$$

  řešit Jacobiho nebo Gauss-Seidelovou iterační metodou a proveďte jednu iteraci těmito metodami. Za nultou aproximaci zvolte vektor $(1,1,1,1)^\top$.

Obsah

- Příklad 4.4 Zjistěte, zda soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & 2x_2 & & & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & & & = & 2 \\ & & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ & & & & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 3 \end{array}$$

lze řešit SOR iterační metodou a proveďte jednu iteraci touto metodou. Za nultou aproximaci zvolte vektor $(1,1,1,1)^\top$. Použijte $\omega = 1,2$.

- Příklad 4.5 Zjistěte, zda je soustava špatně podmíněná

$$\begin{array}{rcrcr} 45\,x_1 & + & 31\,x_2 & = & 192,5 \\ 16\,x_1 & + & 11\,x_2 & = & 68,4. \end{array}$$

Vypočtěte řešení soustavy a řešení soustavy s trochu pozměněnou pravou stranou $\tilde{\boldsymbol{b}} = (192,49; 68,43)^\top$. Vypočtěte relativní chybu řešení?

- Příklad 4.6 Zjistěte, zda je soustava špatně podmíněná

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4\,x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & 3\,x_3 & = & 2 \\ 20\,x_1 & - & 20\,x_2 & + & 41\,x_3 & = & 41. \end{array}$$

Vypočtěte řešení soustavy a řešení soustavy s trochu pozměněnou pravou stranou $\tilde{\boldsymbol{b}} = (4,2,40)^\top$. Jak se od sebe obě řešení liší?

- Příklad 4.7 Zjistěte, zda je soustava špatně podmíněná

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4\,x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & 3\,x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 2\,x_1 & - & 2\,x_2 & + & 4\,x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 20\,x_1 & - & 20\,x_2 & + & 41\,x_3 & + & x_4 & = & 42. \end{array}$$

  Použijte odhad čísla podmíněnosti.

Cvičení:

- Cvičení 4.1 Zjistěte, zda je soustava špatně podmíněná

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 50 \\ -\,x_1 & + & 50\,x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 & = & 51. \end{array}$$

  Vypočtěte řešení soustavy a řešení soustavy s trochu pozměněnou pravou stranou $\tilde{\boldsymbol{b}} = (51, -1, 50)^\top$. Jak se od sebe obě řešení liší? .

- Cvičení 4.2 Zjistěte, číslo podmíněnosti matice

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -199 & 0 & 200 \end{bmatrix}$$

  K výpočtu využijte normu $\|.\|_1$ a spektrální normu $\|.\|_*$.

Příklad 4.1 Nechť je dána matice

$$A = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,3 & 0,0 & 0,0 \\ 0,1 & 0,6 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,3 & -0,5 & 0,0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,0 & 0,0 & 0,2 \\ 0,0 & 0,1 & 0,5 & 0,0 & -0,1 \end{bmatrix}.$$

Zjistěte, zda je spektrální poloměr r_A menší než 1.

Výsledek: Spektální poloměr $r_A = 0,9 < 1$.

Řešení **Zpět**

Příklad 4.2 Nechť je dána matice

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zjistěte, zda jsou všechna vlastní čísla matice A nezáporná.

Výsledek: Všechna vlastní čísla jsou > 0.

Řešení **Zpět**

Příklad 4.3 Zjistěte, zda lze soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 6x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 1 \\ & & 6x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ & & & & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 8x_4 & = & 2 \end{array}$$

řešit Jacobiho nebo Gauss-Seidelovou iterační metodou a proveďte jednu iteraci těmito metodami. Za nultou aproximaci zvolte vektor $(1, 1, 1, 1)^\top$.

Výsledek: Matice je diagonálně dominantní a irreducibilní, lze použít Jacobiho i Gauss-Seidlovu metodu.

První iterace Jacobiho metodou $(\boldsymbol{x})^1 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{4})^\top$.

První iterace Gauss-Seidlovou metodou $(\boldsymbol{x})^1 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{19}{48})^\top$

Řešení **Zpět**

Příklad 4.4 Zjistěte, zda soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
5x_1 & + & 2x_2 & & & & & = & 1 \\
2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & & & = & 2 \\
 & & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\
 & & & & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 3
\end{array}$$

lze řešit SOR iterační metodou a proveďte jednu iteraci touto metodou. Za nultou aproximaci zvolte vektor $(1, 1, 1, 1)^\top$. Použijte $\omega = 1,2$.

Výsledek: Vlastní čísla matice jsou

$$\lambda = 8,23607; 6,23607; 3,76393; 1,76393.$$

Matice je pozitivně definitní a symetrická. Můžeme použít SOR metodu.
První iterace je: $(\boldsymbol{x})^1 = (-0,44; 0,0112; -0,925376; 0,96418)^\top$

Řešení Zpět

Příklad 4.5 Zjistěte, zda je soustava špatně podmíněná

$$\begin{array}{rcrcr} 45\,x_1 & + & 31\,x_2 & = & 192,5 \\ 16\,x_1 & + & 11\,x_2 & = & 68,4. \end{array}$$

Vypočtěte řešení soustavy a řešení soustavy s trochu pozměněnou pravou stranou $\tilde{\boldsymbol{b}} = (192,49; 68,43)^\top$. Vypočtěte relativní chybu řešení?

Výsledek:

Soustava je špatně podmíněná. Číslo podmíněnosti: $\kappa = 4636$.

Řešení soustavy s pravou stranou $\boldsymbol{b} = (192,5; 68,4)^\top$ je $\boldsymbol{x} = (2,9; 2)^\top$.

Řešení soustavy s pravou stranou $\tilde{\boldsymbol{b}} = (192,49; 68,43)^\top$ je $\tilde{\boldsymbol{x}} = (3,94; 0,49)^\top$.

Relativní chyba řešení $\dfrac{\|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1} \doteq 0,52$ je výrazně větší než relativní chyba pravé strany $\dfrac{\|\tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\|_1}{\|\boldsymbol{b}\|_1} \doteq 0,000153$.

Řešení Zpět

Příklad 4.6 Zjistěte, zda je soustava špatně podmíněná

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4\,x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & 3\,x_3 & = & 2 \\ 20\,x_1 & - & 20\,x_2 & + & 41\,x_3 & = & 41. \end{array}$$

Vypočtěte řešení soustavy a řešení soustavy s trochu pozměněnou pravou stranou $\tilde{\boldsymbol{b}} = (4, 2, 40)^\top$. Jak se od sebe obě řešení liší?

Výsledek: Soustava je špatně podmíněná. Číslo podmíněnosti: $\kappa = 2745$.

Řešení soustavy s pravou stranou $\boldsymbol{b} = (4, 2, 41)^\top$ je $\boldsymbol{x} = (1, 1, 1)^\top$.

Řešení soustavy s pravou stranou $\tilde{\boldsymbol{b}} = (4, 2, 40)^\top$ je $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\frac{6}{5}, -\frac{4}{5}, 0)^\top$.

Relativní chyba řešení $\dfrac{\|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1} \doteq 1$ je výrazně větší než relativní chyba pravé strany $\dfrac{\|\tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\|_1}{\|\boldsymbol{b}\|_1} \doteq 0{,}021$.

Řešení Zpět

Příklad 4.7 Zjistěte, zda je soustava špatně podmíněná

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
4\,x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5\\
3\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & 3\,x_3 & + & x_4 & = & 3\\
2\,x_1 & - & 2\,x_2 & + & 4\,x_3 & + & x_4 & = & 3\\
20\,x_1 & - & 20\,x_2 & + & 41\,x_3 & + & x_4 & = & 42.
\end{array}$$

Použijte odhad čísla podmíněnosti.

Výsledek: Soustavu lze považovat za špatně podmíněnou. Číslo podmíněnosti: $\kappa \geq 196$.

Řešení **Zpět**

Cvičení 4.1 Zjistěte, zda je soustava špatně podmíněná

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 50 \\ -x_1 & + & 50\,x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 & = & 51. \end{array}$$

Vypočtěte řešení soustavy a řešení soustavy s trochu pozměněnou pravou stranou $\tilde{\boldsymbol{b}} = (51, -1, 50)^\top$. Jak se od sebe obě řešení liší? .

Výsledek: Soustava je špatně podmíněná. Číslo podmíněnosti: $\kappa \;=\; 2703$.

Řešení soustavy s pravou stranou $\boldsymbol{b} = (50, -1, 51)^\top$ je $\boldsymbol{x} = (50, 1, 1)^\top$.

Řešení soustavy s pravou stranou $\tilde{\boldsymbol{b}} = (51, -1, 50)^\top$ je $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\frac{3}{2}, -1, -\frac{101}{2})^\top$.

Relativní chyba řešení $\dfrac{\|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1} \;\doteq\; 1,96$ je výrazně větší než relativní chyba pravé strany $\dfrac{\|\tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\|_1}{\|\boldsymbol{b}\|_1} \;\doteq\; 0,0196.$

Zpět

Cvičení 4.2 Zjistěte, číslo podmíněnosti matice

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -199 & 0 & 200 \end{bmatrix}$$

K výpočtu využijte normu $\|.\|_1$ a spektrální normu $\|.\|_*$.

Výsledek: Pro normu $\|.\|_1$ je $\kappa_1(A) = 399$, pro spektrální normu $\|.\|_*$ je $\kappa_*(A) = 398,0087$. Matici můžeme považovat za špatně podmíněnou.

Zpět

Příklad 4.1 Nechť je dána matice

$$A = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,3 & 0,0 & 0,0 \\ 0,1 & 0,6 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,3 & -0,5 & 0,0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,0 & 0,0 & 0,2 \\ 0,0 & 0,1 & 0,5 & 0,0 & -0,1 \end{bmatrix}.$$

Zjistěte, zda je spektrální poloměr r_A menší než 1.

Řešení:
Pomocí Geršgorinových kroužků najdeme množinu $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$, ve které leží všechna vlastní čísla.
Pro kroužky platí

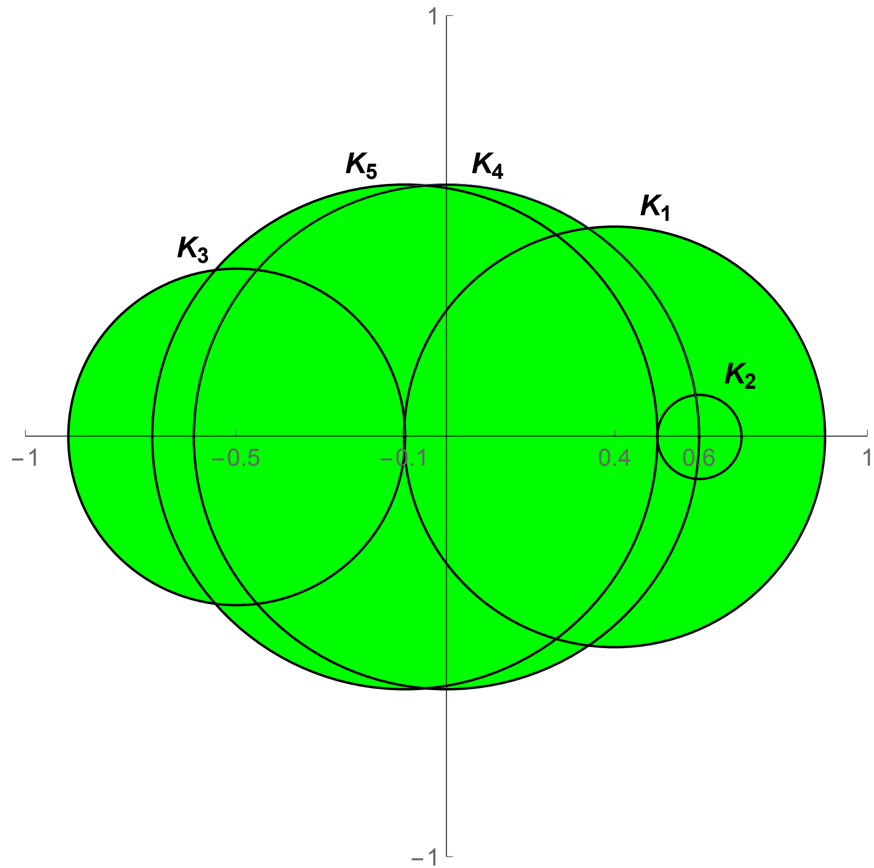
$$\mathcal{K}_i \;=\; \{\lambda \in \mathbb{C};\; |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\mathcal{K} \;=\; \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1 &= \{\lambda \in \mathbb{C};\; |\lambda - 0,4| \leq 0,5\} \\ \mathcal{K}_2 &= \{\lambda \in \mathbb{C};\; |\lambda - 0,6| \leq 0,1\} \\ \mathcal{K}_3 &= \{\lambda \in \mathbb{C};\; |\lambda + 0,5| \leq 0,4\} \\ \mathcal{K}_4 &= \{\lambda \in \mathbb{C};\; |\lambda| \leq 0,6\} \\ \mathcal{K}_5 &= \{\lambda \in \mathbb{C};\; |\lambda + 0,1| \leq 0,6\}. \end{aligned}$$

Zpět

Geršgorinovy kroužky jsou znázorněny na následujícím obrázku:



Všechna vlastní čísla λ leží v množině $\mathcal{K}$ (na obrázku zeleně znázorněná). Platí tedy $|\lambda| \leq 0,9$. Spektální poloměr $r_A = 0,9 < 1$.

Zpět

Příklad 4.2 Nechť je dána matice

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zjistěte, zda jsou všechna vlastní čísla matice A nezáporná.

Řešení:
Pomocí Geršgorinových kroužků najdeme množinu $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$, ve které leží všechna vlastní čísla.
Pro kroužky platí

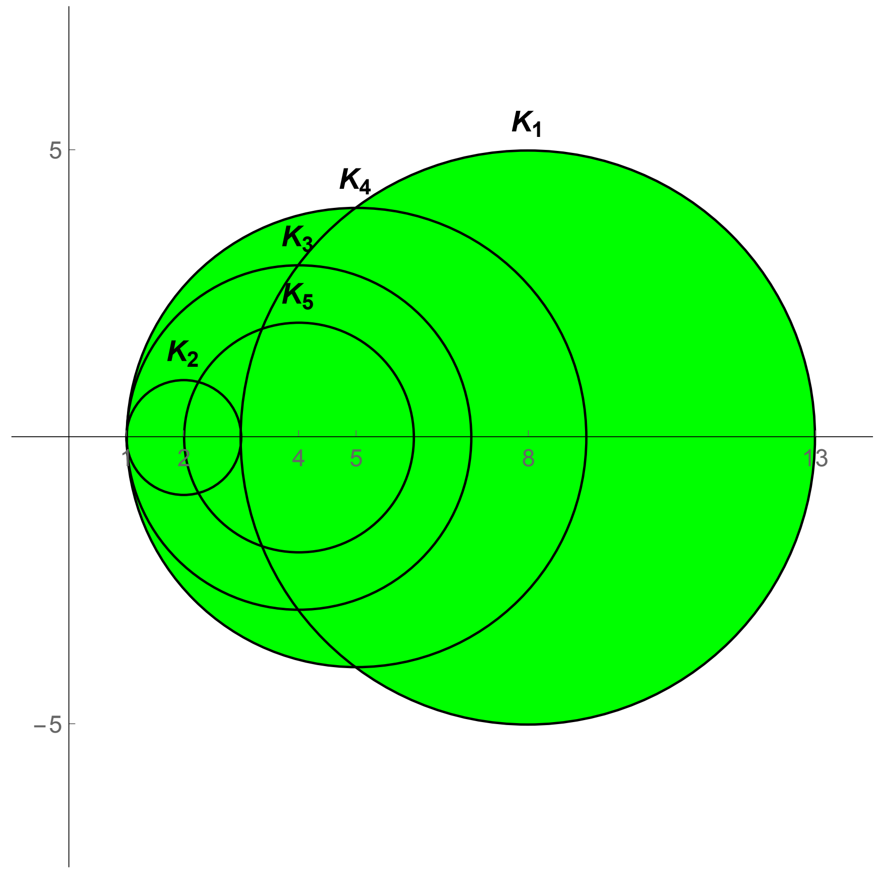
$$\mathcal{K}_i \;=\; \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\mathcal{K} \;=\; \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1 &= \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda - 8| \leq 5\} \\ \mathcal{K}_2 &= \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda - 2| \leq 1\} \\ \mathcal{K}_3 &= \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda - 4| \leq 3\} \\ \mathcal{K}_4 &= \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda - 5| \leq 4\} \\ \mathcal{K}_5 &= \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda - 4| \leq 3\}. \end{aligned}$$

Zpět

Geršgorinovy kroužky jsou znázorněny na následujícím obrázku:



Všechna vlastní čísla λ leží v množině $\mathcal{K}$ (na obrázku zeleně znázorněná). Platí tedy $\lambda > 0$.

Zpět

Příklad 4.3 Zjistěte, zda lze soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 6x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 1 \\ & & 6x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ & & & & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 8x_4 & = & 2 \end{array}$$

řešit Jacobiho nebo Gauss-Seidelovou iterační metodou a proveďte jednu iteraci těmito metodami. Za nultou aproximaci zvolte vektor $(1, 1, 1, 1)^\top$.

Řešení: Matice soustavy

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Nejdříve ověříme, že je matice diagonálně dominantní, tj. že platí:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, i \neq j}^{n} |a_{ij}|.$$

Matice je zřejmě diagonálně dominantní.
Dále ověříme, že je matice irreducibilní. Protože je matice nezáporná, stačí ověřit, že matice $A^{n-1} > 0$, v našem případě $n = 4$. Vypočteme tedy matici A^3.

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 36 & 12 & 25 & 6 \\ 3 & 42 & 11 & 43 \\ 1 & 2 & 5 & 10 \\ 14 & 29 & 15 & 71 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} 222 & 120 & 176 & 109 \\ 61 & 341 & 116 & 481 \\ 16 & 33 & 25 & 91 \\ 155 & 330 & 172 & 670 \end{bmatrix}.$$

Protože matice A^3 má všechny prvky kladné, je matice A irreducibilní.

Nyní vypočteme první iteraci pomocí Jacobiho metody:

$$(x_i)^1 = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, i\neq j}^{n} a_{ij} (x_i)^0 \right).$$

Pro $(\boldsymbol{x})^0 = (1,1,1,1)^\top$ dostáváme

$$\begin{aligned}
(x_1)^1 &= \frac{1}{6}(1 - 1\cdot 1 - 3\cdot 1 - 0\cdot 1) = -\frac{1}{2}\\
(x_2)^1 &= \frac{1}{6}(2 - 0\cdot 1 - 1\cdot 1 - 3\cdot 1) = -\frac{1}{3}\\
(x_3)^1 &= \frac{1}{2}(1 - 0\cdot 1 - 0\cdot 1 - 1\cdot 1) = 0\\
(x_4)^1 &= \frac{1}{8}(2 - 1\cdot 1 - 2\cdot 1 - 1\cdot 1) = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Nyní vypočteme první iteraci pomocí Gauss-Seidlovy metody:

$$(x_i)^1 = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} (x_i)^1 - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} (x_i)^0 \right).$$

Pro $(\boldsymbol{x})^0 = (1,1,1,1)^\top$ dostáváme

$$\begin{aligned}
(x_1)^1 &= \frac{1}{6}(1 - 1\cdot 1 - 3\cdot 1 - 0\cdot 1) = -\frac{1}{2}\\
(x_2)^1 &= \frac{1}{6}\left(2 - 0\cdot(-\frac{1}{2}) - 1\cdot 1 - 3\cdot 1\right) = -\frac{1}{3}\\
(x_3)^1 &= \frac{1}{2}\left(1 - 0\cdot(-\frac{1}{2}) - 0\cdot(-\frac{1}{3}) - 1\cdot 1\right) = 0\\
(x_4)^1 &= \frac{1}{8}\left(2 - 1\cdot(-\frac{1}{2}) - 2\cdot(-\frac{1}{3}) + 1\cdot 0\right) = \frac{19}{48}.
\end{aligned}$$

U metody SOR nemáme zaručenu konvergenci, protože matice soustavy není symetrická.

Zpět

Příklad 4.4 Zjistěte, zda soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & 2x_2 & & & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & & & = & 2 \\ & & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ & & & & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 3 \end{array}$$

lze řešit SOR iterační metodou a proveďte jednu iteraci touto metodou. Za nultou aproximaci zvolte vektor $(1,1,1,1)^\top$. Použijte $\omega = 1,2$.

Řešení:
Matice soustavy:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Nejdříve ověříme, že matice A je symetrická, tj. že platí:

$$a_{ij} \; = \; a_{ji}, \quad i,j = 1 \ldots n.$$

Dále ověříme, že matice je pozitivně definitní. K tomu nám stačí ověřit, že vlastní čísla matice A jsou kladná. Vlastní čísla si vypočteme z rovnice

$$\det(A - \lambda E) \; = \; (5-\lambda)^4 - 12(5-\lambda)^2 + 16 \; = \; 0.$$

Při výpočtu determinantu jsme použili rozvoj podle prvního řádku.
Po substituci $z = (5-\lambda)^2$ dostaneme kvadratickou rovnici

$$z^2 - 12z + 16 \; = \; 0.$$

Řešením této rovnice je $z_{12} = 6 \pm 2\sqrt{5}$.

Zpět

Odtud dostaneme

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 5-\sqrt{6+2\sqrt{5}} = 1,76393\\
\lambda_2 &= 5+\sqrt{6+2\sqrt{5}} = 8,23607\\
\lambda_3 &= 5-\sqrt{6-2\sqrt{5}} = 3,76393\\
\lambda_4 &= 5+\sqrt{6-2\sqrt{5}} = 6,23607
\end{aligned}
$$

Vlastní čísla jsou kladná, matice je tedy pozitivně definitní. Můžeme použít SOR metodu:

$$
x_i^{(1)} = (1-\omega)x_i^{(0)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_i^{(1)} - \sum_{j=i+1}^{4} a_{ij}x_i^{(0)}\right), \; i = 1,\dots,4.
$$

Pro $\boldsymbol{x}^{(0)} = (1,1,1,1)^\top$ dostáváme

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= (-0.2)\cdot 1 + \frac{1,2}{5}(1-2\cdot 1) = -0,44\\
x_2^{(1)} &= (-0.2)\cdot 1 + \frac{1,2}{5}(2-2\cdot(-0,44)-2\cdot 1) = 0,0112\\
x_3^{(1)} &= (-0.2)\cdot 1 + \frac{1,2}{5}(-1-2\cdot 0,0112-2\cdot 1) = -0,925376\\
x_4^{(1)} &= (-0.2)\cdot 1 + \frac{1,2}{5}(3-2\cdot(-0,925376)) = 0,96418.
\end{aligned}
$$

Zpět

Příklad 4.5 Zjistěte, zda je soustava špatně podmíněná

$$\begin{array}{rcrcr} 45\,x_1 & + & 31\,x_2 & = & 192,5 \\ 16\,x_1 & + & 11\,x_2 & = & 68,4. \end{array}$$

Vypočtěte řešení soustavy a řešení soustavy s trochu pozměněnou pravou stranou $\tilde{\boldsymbol{b}} = (192,49; 68,43)^\top$. Vypočtěte relativní chybu řešení?

Řešení: Matice soustavy:

$$A = \begin{bmatrix} 45 & 31 \\ 16 & 11 \end{bmatrix}.$$

Vypočteme číslo podmíněnosti matice:

$$\kappa = \|A\|\,\|A^{-1}\|.$$

Nejdříve určíme inverzní matici A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 11 & -16 \\ -31 & 45 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} -11 & 31 \\ 16 & -45 \end{bmatrix}.$$

Číslo podmíněnosti $\kappa = \|A\|_1\,\|A^{-1}\|_1 = 61 \cdot 76 = 4636.$

Řešení soustavy s pravou stranou $\boldsymbol{b} = (192,5; 68,4)^\top$ je $\boldsymbol{x} = (2,9; 2)^\top$.

Řešení soustavy s pravou stranou $\tilde{\boldsymbol{b}} = (192,49; 68,43)^\top$ je $\tilde{\boldsymbol{x}} = (3,94; 0,49)^\top$.

Relativní chyba řešení $\dfrac{\|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1} \doteq 0,52$ je výrazně větší než relativní chyba pravé strany $\dfrac{\|\tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\|_1}{\|\boldsymbol{b}\|_1} \doteq 0,000153.$

Zpět

Příklad 4.6 Zjistěte, zda je soustava špatně podmíněná

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4\,x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & 3\,x_3 & = & 2 \\ 20\,x_1 & - & 20\,x_2 & + & 41\,x_3 & = & 41. \end{array}$$

Vypočtěte řešení soustavy a řešení soustavy s trochu pozměněnou pravou stranou $\tilde{\boldsymbol{b}} = (4, 2, 40)^\top$. Jak se od sebe obě řešení liší?

Řešení: Matice soustavy:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 20 & -20 & 41 \end{bmatrix}.$$

Vypočteme číslo podmíněnosti matice:

$$\kappa = \|A\|\,\|A^{-1}\|.$$

Nejdříve určíme inverzní matici A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 22 & -183 & -100 \\ -21 & 184 & 100 \\ -1 & 9 & 5 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \frac{22}{5} & -\frac{21}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{183}{5} & \frac{184}{5} & \frac{9}{5} \\ -20 & 20 & 1 \end{bmatrix}.$$

M_{ij} je minor matice A, tj. determinant z matice, která vznikne z matice A vynecháním $i-$tého řádku a $j-$tého sloupce.
Číslo podmíněnosti $\kappa = \|A\|_1\,\|A^{-1}\|_1 = 45 \cdot 61 = 2745$. Použili jsme zde sloupcovou normu $\|.\|_1$.
Řešení soustavy s pravou stranou $\boldsymbol{b} = (4, 2, 41)^\top$ je $\boldsymbol{x} = (1, 1, 1)^\top$.

Řešení soustavy s pravou stranou $\tilde{\boldsymbol{b}} = (4, 2, 40)^\top$ je $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\frac{6}{5}, -\frac{4}{5}, 0)^\top$.

Relativní chyba řešení $\dfrac{\|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1} \doteq 1$ je výrazně větší než relativní chyba pravé strany $\dfrac{\|\tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\|_1}{\|\boldsymbol{b}\|_1} \doteq 0,021$.

Zpět

Příklad 4.7 Zjistěte, zda je soustava špatně podmíněná

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4\,x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & 3\,x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 2\,x_1 & - & 2\,x_2 & + & 4\,x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 20\,x_1 & - & 20\,x_2 & + & 41\,x_3 & + & x_4 & = & 42. \end{array}$$

Použijte odhad čísla podmíněnosti.

Řešení: Matice soustavy:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \\ 20 & -20 & 41 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odhadneme shora číslo podmíněnosti matice:

$$\kappa \geq \|A\| \frac{\|\boldsymbol{y}\|}{\|A\boldsymbol{y}\|}, \text{ kde } \boldsymbol{y} \text{ je vhodný vektor.}$$

Zvolme např. vektor $y = (0, 2, 1, -1)^\top$:

$$A\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \\ 20 & -20 & 41 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\kappa \geq \|A\|_1 \frac{\|\boldsymbol{y}\|_1}{\|A\boldsymbol{y}\|_1} = 49 \cdot \frac{4}{1} = 196.$$

Zpět

5. Numerické řešení nelineárních rovnic

- Příklad 5.1 Pomocí metody půlení intervalu najděte kořeny rovnice

  $$\mathrm{e}^x - x^2 = 0$$

  s přesností $\varepsilon = 0,01$.

- Příklad 5.2 Pomocí jedné z metod sečen najděte kořeny rovnice

  $$\mathrm{e}^x - x^2 = 0$$

  s přesností $\varepsilon = 0,01$.

- Příklad 5.3 Newtonovou metodou řešte soustavu nelineárních rovnic

  $$\begin{aligned} x^2 + 4x &= y^2 + 2y + 1 \\ x^2 &= 4 - 5y\ . \end{aligned}$$

  Pro výpočet kořene v I. kvadrantu volte počáteční aproximaci $X_0 = [0,0]$. Vypočítejte první dvě aproximace řešení. Výpočet ukončete, jestliže pro dvě následující iterace metody je $\|X_k - X_{k+1}\|_1 < \epsilon$, pro zadanou přesnost $\epsilon = 0,1$.

Obsah

Příklad 5.1 Pomocí metody půlení intervalu najděte kořeny rovnice

$$\mathrm{e}^x - x^2 \;=\; 0$$

s přesností $\varepsilon = 0,01$.

Výsledek: Rovnice má jeden kořen. Separační interval je $\langle -1, 0\rangle$. Metoda půlení intervalu konverguje vždy. Postupné iterace jsou

$$\begin{aligned} x_0 &= -1 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= -0,5 \\ x_3 &= -0,75 \\ x_4 &= -0,625 \\ x_5 &= -0,6875 \\ x_6 &= -0,71875 \\ x_7 &= -0,703125 \end{aligned}$$

Protože $f(x_7 - \varepsilon)f(x_7 + \varepsilon) = -0.00036 < 0$, leží hledaný kořen α v intervalu $(x_7 - \varepsilon, x_7 + \varepsilon)$, platí tedy $|\alpha - x_7| < \varepsilon$. $\alpha \doteq -0,703125$ s přesností 0,01.

Řešení **Zpět**

Příklad 5.2 Pomocí jedné z metod sečen najděte kořeny rovnice

$$e^x - x^2 \ = \ 0$$

s přesností $\varepsilon = 0,01$.

Výsledek: Zvolme $x_0 = -1$ a $x_1 = 0$. Postupně počítáme aproximace metodou sečen:
$x_2 = -0,6127, \ |x_2 - x_1| = 0,6127 > 0,01$
$x_3 = -0,69344, \ |x_3 - x_2| = 0,08074 > 0,01$
$x_4 = -0,702383, \ |x_4 - x_3| = 0,008943 < 0,01$
Označme x^* přesné řešení. Protože $|x_4 - x^*| < 0,01$, našli jsme přibližné řešení x_4 s přesností $\varepsilon = 0,01$.

Řešení Zpět

Příklad 5.3 Newtonovou metodou řešte soustavu nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 4x &= y^2 + 2y + 1 \\ x^2 &= 4 - 5y \ . \end{aligned}$$

Pro výpočet kořene v I. kvadrantu volte počáteční aproximaci $X_0 = [0, 0]$. Vypočítejte první dvě aproximace řešení. Výpočet ukončete, jestliže pro dvě následující iterace metody je $\|X_k - X_{k+1}\|_1 < \epsilon$, pro zadanou přesnost $\epsilon = 0,1$.

Výsledek:

První iterace $X_1 = [0,65\,;\ 0,8]$, $\|X_0 - X_1\|_1 = 1,45 > 0,1$,
druhá iterace $X_2 \doteq [0,63610\,;\ 0,71911]$, $\|X_1 - X_2\|_1 = 0,09479 < 0,1$.

Řešení **Zpět**

Příklad 5.4

Výsledek:

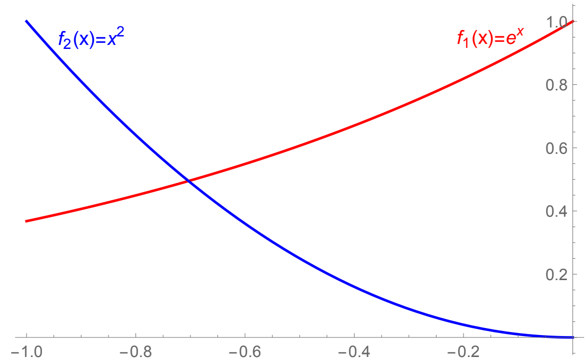
Řešení Zpět

Příklad 5.1 Pomocí metody půlení intervalu najděte kořeny rovnice

$$e^x - x^2 = 0$$

s přesností $\varepsilon = 0,01$.

Řešení:
Nakreslíme grafy funkcí $f_1(x) = e^x$ a $f_2(x) = x^2$.



Z obrázku plyne, že rovnice má právě jeden kořen a za separační interval můžeme vzít $\langle -1, 0\rangle$. Označme $f(x) = e^x - x^2$.
Zvolme $x_0 = -1$ a $x_1 = 0$ Metodou půlení intervalu dostaneme postupné iterace:
$x_2 = -0,5$. Protože $f(-1)f(-0,5) = -0,22537 < 0$, budeme půlit interval $\langle -1; -0,5\rangle$.
$x_3 = -0,75$ a zároveň $f(-0,75)f(-0.5) = -0,032135 < 0$, budeme půlit interval $\langle -0,75; -0,5\rangle$.
$x_4 = -0,625$ a zároveň $f(-0,625)f(-0.75) = -0,013036 < 0$, budeme půlit interval $\langle -0,75; -0,625\rangle$.
$x_5 = -0,6875$ a zároveň $f(-0,6875)f(-0.75) = -0,0027198 < 0$, budeme půlit interval $\langle -0,75; -0,6875\rangle$.
$x_6 = -0,71875$ a zároveň $f(-0,71875)f(-0,6875) = -0,00088234 < 0$, budeme půlit interval $\langle -0,71875; -0,6875\rangle$.
$x_7 = -0,703125$
Ověříme, zda x_7 vyhovuje již přesnosti $\varepsilon = 0.01$.
Protože $f(x_7 - \varepsilon)f(x_7 + \varepsilon) = -0.00036116 < 0$, leží hledaný kořen α v intervalu $(x_7 - \varepsilon, x_7 + \varepsilon)$, platí tedy $|\alpha - x_7| < \varepsilon$.
$\alpha \doteq -0,703125$ s přesností 0,01.

Zpět

Příklad 5.2 Pomocí jedné z metod sečen najděte kořeny rovnice

$$e^x - x^2 = 0$$

s přesností $\varepsilon = 0,01$.

Řešení: Zvolíme následující metodu sečen

$$\boxed{x_{k+1} = \frac{x_0 f(x_k) - x_k f(x_0)}{f(x_k) - f(x_0)} \quad k = 1, 2, \dots}$$

Separační interval může být $\langle -1, 0\rangle$ (viz předchozí příklad). Musíme ověřit předpoklady této metody.
Protože $f'(x) = e^x - 2\,x$ je klesající na intervalu $(-1, 0)$ a $f'(0) = 1$, platí $f'(x) > 0$ na intervalu $(-1, 0)$.
Dále $f''(x) = e^x - 2 < 0$ na intervalu $(-1, 0)$.
Zvolme bod x_0 tak, aby splňoval podmínku $f(x_0)f''(x_0) > 0$, tj. $x_0 = -1$. První iterace x_1 musí ležet v separačním intervalu. Zvolíme tedy $x_1 = 0$.
Danou metodou počítáme postupné iterace $x_2 = -0,6127,\ |x_2 - x_1| = 0,6127 > 0,01$
$x_3 = -0,69344,\ |x_3 - x_2| = 0,08074 > 0,01$
$x_4 = -0,702383,\ |x_4 - x_3| = 0,008943 < 0,01$
Je třeba se přesvědčit, zda $|x_4 - x^*| < 0,01$, kde x^* značí přesný kořen.
Vypočteme hodnoty $f(x_4 - 0,01) = -0,0170157$ a $f(x_4 + 0,01) = 0,0209878$. Protože $f(x_4 - 0,01)\,f(x_4 + 0,01) < 0$ leží přesný kořen v intervalu $(x_4 - 0,01; x_4 + 0,01)$, tj. $|x_4 - x^*| < 0,01$. Našli jsme tedy přibližné řešení x_4 s přesností $\varepsilon = 0,01$.

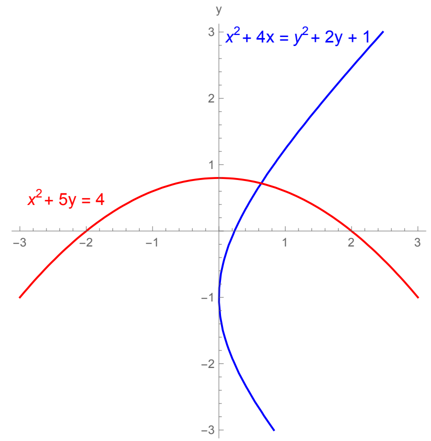
Zpět

Příklad 5.3 Newtonovou metodou řešte soustavu nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 4x &= y^2 + 2y + 1 \\ x^2 &= 4 - 5y\ . \end{aligned}$$

Pro výpočet kořene v I. kvadrantu volte počáteční aproximaci $X_0 = [0, 0]$. Vypočítejte první dvě aproximace řešení. Výpočet ukončete, jestliže pro dvě následující iterace metody je $\|X_k - X_{k+1}\|_1 < \epsilon$, pro zadanou přesnost $\epsilon = 0,1$.

Řešení:
Úlohu můžeme interpretovat geometricky. První rovnice je rovnicí hyperboly a druhá je rovnice paraboly. Z grafického znázornění (viz obrázek) je zřejmé, že daná soustava má v I. kvadrantu jedno řešení. Tomu odpovídá průsečík příslušných křivek.



Soustavu upravíme do výchozího tvaru pro Newtonovu metodu:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - y^2 - 2y - 1 &= 0 \\ x^2 + 5y - 4 &= 0\ . \end{aligned}$$

Zpět

Určíme Jacobiho matici $\boldsymbol{J}$ a vektor zobrazení $\boldsymbol{f}$ v zatím nespecifikovaném bodě $X = [x, y]$

$$\boldsymbol{J}(X) = \begin{bmatrix} 2x+4 & -2y-2 \\ 2x & 5 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(X) = \begin{bmatrix} x^2+4x-y^2-2y-1 \\ x^2+5y-4 \end{bmatrix}.$$

Značí-li $X_k = [x_k, y_k]$ k-tou iteraci Newtonovy metody, dostáváme další aproximaci X_{k+1} ze vztahu

$$X_{k+1} = X_k + \Delta_k\,, \tag{1}$$

kde vektor $\Delta_k = ({\Delta_k}^x, {\Delta_k}^y)^\top$ je řešením soustavy lineárních algebraických rovnic:

$$\begin{bmatrix} 2x_k+4 & -2y_k-2 \\ 2x_k & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_k^x \\ \Delta_k^y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_k^2+4x_k-y_k^2-2y_k-1 \\ x_k^2+5y_k-4 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Pro každou aproximaci vypočteme zároveň chybu

$$\|X_k - X_{k+1}\|_1 = \|\Delta_k\|_1 = |\Delta_k^x| + |\Delta_k^y|\,.$$

Jelikož $X_0 = [0, 0]$, řešíme konkrétně soustavu

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_0^x \\ \Delta_0^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Řešením této soustavy je vektor

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} \Delta_0^x \\ \Delta_0^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{20} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

Tedy první aproximace kořene soustavy rovnic v I. kvadrantu, je bod

$$X_1 = X_0 + \Delta_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{13}{20} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}, \quad \text{tj. } X_1 = [0,65\,;\,0,8]\,.$$

Zjistíme, že platí $|\Delta_0^x| + |\Delta_0^y| = 0,65 + 0,8 = 1,45 > \epsilon$, tedy pokračujeme výpočtem další aproximace řešení.

Pro výpočet další iterace X_2 je nutno provést nejdříve výpočet Δ_1 dosazením již známé hodnoty X_1 do z (2). Jelikož $X_1 = [0,65;\ 0,8]$, řešíme konkrétně soustavu

$$\begin{bmatrix} 5,3 & -3,6 \\ 1,3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1^x \\ \Delta_1^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2175 \\ -0,4225 \end{bmatrix} .$$

Řešením této soustavy je vektor

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} \Delta_1^x \\ \Delta_1^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,01390314 \\ -0,08088518 \end{bmatrix}$$

Ze získaného vektoru Δ_1, pro který $\|\Delta_1\|_1 = 0,09479 < \epsilon = 0,1$, použitím vztahu (1) dostáváme

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0,65 \\ 0,8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,01390314 \\ -0.08088518 \end{bmatrix}, \quad \text{tj.}\ X_2 \doteq [0,63610\,;\ 0,71911] .$$

Obdržené výsledky v desetinném tvaru zapíšeme do následující tabulky, kde E_k značí chybu, tj. $E_k = \|\Delta_k\|_1 = |\Delta_k^x| + |\Delta_k^y|$ pro k-tou aproximaci.

k	x_k	y_k	E_k
0	0	0	1,450
1	0,65	0,8	0,09479
2	0,63610	0,71911	

Zpět

6. ODR - počáteční úlohy

- Příklad 6.1 Určete přibližnou hodnotu řešení počáteční úlohy

$$y'(x) = y(x) + \mathrm{e}^{x^2}, \qquad y(0) = 1$$

na intervalu $\langle 0\,; 0,4\rangle$ s krokem $h = 0,2$

a) Eulerovou metodou,

b) zlepšenou Eulerovou metodou,

c) modifikovanou Eulerovou metodou.

U modifikované Eulerovy metody (případ c)) odhadněte aposteriorní chybu přibližného výsledku hodnoty $y(0,4)$ pomocí Richardsonovy extrapolace.

- Příklad 6.2 Mějme dánu počáteční úlohu pro soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= \sqrt{y_1 + 3} + \frac{y_2}{x-1} \\ y_2' &= 2xy_1 - y_2^2 + 1 \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami: $y_1(0) = -2\,, \quad y_2(0) = 1\,.$

a) Napište postup řešení počáteční úlohy zlepšenou Eulerovou metodou druhého řádu na intervalu $I = \langle 0\,; 0,8\rangle$.

b) Touto metodou s krokem $h = 0,2$ určete konkrétně přibližnou hodnotu řešení v bodě $x = 0,2$.

- Příklad 6.3 Je dána počáteční úloha pro diferenciální rovnici třetího řádu

$$y''' = \sqrt{1-y'} + 2x\,y'' + 5$$

s podmínkami: $y(0) = 1\,,\quad y'(0) = 0\,,\quad y''(0) = -1\,.$

a) Napište postup řešení počáteční úlohy modifikovanou Eulerovou metodou druhého řádu na intervalu $I = \langle 0\,; 0,6\rangle$.

b) Touto metodou s krokem $h = 0,2$ určete konkrétně přibližnou hodnotu řešení v bodě $x = 0,4$.

- Příklad 6.4 Odvoďte 2-krokovou metodu pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic co největšího řádu, která má tvar:

$$\alpha_2 y_{n+2} + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_0 y_n = h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n).$$

- Příklad 6.5 Odvoďte 3-krokovou Adams-Moultonovu metodu pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic co největšího řádu:

$$\alpha_3 y_{n+3} + \alpha_2 y_{n+2} = h(\beta_3 f_{n+3} + \beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n).$$

Cvičení:

- Cvičení 6.1 Určete přibližnou hodnotu řešení počáteční úlohy

$$y'(x) = 4x\sqrt{y(x)}, \qquad y(1) = 1$$

  na intervalu $\langle 1\,; 1,2\rangle$ s krokem $h = 0,2$

  a) Eulerovou metodou,

  b) modifikovanou Eulerovou metodou.

  Výsledky porovnejte s analytickým řešením.

- Cvičení 6.2 Je dána počáteční úloha

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 y_3 + 1 \\ y_2' &= y_1 y_2 \\ y_3' &= x + \ln(1 - y_3) + 2\,, \end{aligned}$$

  s podmínkami: $y_1(1) = 1\,, \quad y_2(1) = 0\,, \quad y_3(1) = -1\,.$
  Určete přibližnou hodnotu $y(1,2)$ řešení této úlohy s krokem $h = 0,2$

  a) Eulerovou metodou,

  b) zlepšenou Eulerovou metodou,

  c) modifikovanou Eulerovou metodou.

Obsah

Příklad 6.1 Určete přibližnou hodnotu řešení počáteční úlohy

$$y'(x) \;=\; y(x) + \mathrm{e}^{x^2}, \qquad\qquad y(0) \;=\; 1$$

na intervalu $\langle 0\,; 0,4\rangle$ s krokem $h = 0,2$

a) Eulerovou metodou,

b) zlepšenou Eulerovou metodou,

c) modifikovanou Eulerovou metodou.

U modifikované Eulerovy metody (případ c)) odhadněte aposteriorní chybu přibližného výsledku hodnoty $y(0,4)$ pomocí Richardsonovy extrapolace.

Výsledek:

a) Eulerova metoda: $y(0,4) \cong y_2 \;=\; 1,8881622.$

b) zlepšená Eulerova metoda: $y(0,4) \cong y_2 \;=\; 2,0040273\,.$

c) modifikovaná Eulerova metoda:
$y(0,4) \cong y_2 \;=\; 1,9989033\,.$
Aposteriorní chyba tohoto výsledku pomocí Richardsonovy extrapolace je $err \;=\; 0,0076264.$

Řešení Zpět

Příklad 6.2 Mějme dánu počáteční úlohu pro soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= \sqrt{y_1+3} + \frac{y_2}{x-1} \\ y_2' &= 2xy_1 - y_2^2 + 1 \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami: $y_1(0) = -2\,, \quad y_2(0) = 1\,.$

a) Napište postup řešení počáteční úlohy zlepšenou Eulerovou metodou druhého řádu na intervalu $I = \langle 0\,; 0,8\rangle$.

b) Touto metodou s krokem $h = 0,2$ určete konkrétně přibližnou hodnotu řešení v bodě $x = 0,2$.

Výsledek:

a) Označme $\mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} y_1^n \\ y_2^n \end{bmatrix} \cong \mathbf{Y}(x_n) = \begin{bmatrix} y_1(x_n) \\ y_2(x_n) \end{bmatrix}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ $\qquad \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} \sqrt{y_1+3} + \dfrac{y_2}{x-1} \\ 2xy_1 - y_2^2 + 1 \end{bmatrix}$,

Zlepšená Eulerova metoda pro úlohu $\mathbf{Y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y})$, počítá přibližné řešení úlohy v bodě x_{n+1} pomocí vzorce:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{K1} = h\,\mathbf{F}(x_n, \mathbf{Y}_n), \\ &\mathbf{K2} = h\,\mathbf{F}(x_n + h, \mathbf{Y}_n + \mathbf{K1}) \\ &\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \tfrac{1}{2}(\mathbf{K1} + \mathbf{K2}), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \end{aligned}}$$

kde $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}(0)\,.$

b) Hledaný přibližný vektor řešení v bodě $x = 0,2$:

$$\mathbf{Y}(0,2) \cong \mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} -2,025 \\ 0,92 \end{bmatrix}.$$

Řešení **Zpět**

Příklad 6.3 Je dána počáteční úloha pro diferenciální rovnici třetího řádu

$$y''' = \sqrt{1-y'} + 2x\, y'' + 5$$

s podmínkami: $y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,, \quad y''(0) = -1\,.$

a) Napište postup řešení počáteční úlohy modifikovanou Eulerovou metodou druhého řádu na intervalu $I = \langle 0\,; 0,6\rangle$.

b) Touto metodou s krokem $h = 0,2$ určete konkrétně přibližnou hodnotu řešení v bodě $x = 0,4$.

Výsledek:

a) Převedeme rovnici na soustavu diferenciálních rovnic, položíme

$$y_1 = y\,,\; y_2 = y',\; y_3 = y''\,.$$

Dostaneme soustavu tří rovnic:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= \sqrt{1-y_2} + 2x\, y_3 + 5 \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami: $y_1(0) = 1,\; y_2(0) = 0,\; y_3(0) = -1\,.$
Maticový zápis soustavy:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y})\,,$$

kde $\mathbf{Y}(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^\top$ a

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{Y}(x)) = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \sqrt{1-y_2} + 2x\, y_3 + 5 \end{bmatrix}.$$

Řešení Zpět

Pokračování výsledku:

Počáteční úlohu pro soustavu tří diferenciálních rovnic prvního řádu budeme řešit modifikovanou Eulerovou metodou:

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbf{K1} = h\,\mathbf{F}(x_n, \mathbf{Y}_n),\\ &\mathbf{K2} = h\,\mathbf{F}(x_n + \tfrac{h}{2}, \mathbf{Y}_n + \tfrac{1}{2}\mathbf{K1})\\ &\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \mathbf{K2}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1,\end{aligned}}$$

kde $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}(0)$.

b) Vypočteme jeden krok metody:

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} 0,98 \\ -0,08 \\ 0,19376 \end{bmatrix}.$$

Našli jsme tedy přibližnou hodnotu $y_1^1 = 0,98 \cong y(0,2)$ počáteční úlohy pro danou rovnici 3. řádu.
Druhý krok metody:

$$\mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} 0,96788 \\ 0,08109 \\ 1,49639 \end{bmatrix}.$$

Našli jsme tedy přibližnou hodnotu $y_1^2 = 0,96788 \cong y(0,4)$ počáteční úlohy pro rovnici 3.

Řešení Zpět

Příklad 6.4 Odvoďte 2-krokovou metodu pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic co největšího řádu, která má tvar:

$$\alpha_2 y_{n+2} + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_0 y_n = h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n).$$

Výsledek:

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n),$$

řád metody je $p = 4$.

Řešení **Zpět**

Příklad 6.5 Odvoďte 3-krokovou Adams-Moultonovu metodu pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic co největšího řádu:

$$\alpha_3 y_{n+3} + \alpha_2 y_{n+2} = h(\beta_3 f_{n+3} + \beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n).$$

Výsledek:

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{24}(9f_{n+3} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n),$$

řád metody je $p = 4$.

Řešení **Zpět**

Cvičení 6.1 Určete přibližnou hodnotu řešení počáteční úlohy

$$y'(x) \;=\; 4x\sqrt{y(x)}, \qquad y(1) \;=\; 1$$

na intervalu $\langle 1\,; 1,2\rangle$ s krokem $h = 0,2$

a) Eulerovou metodou,

b) modifikovanou Eulerovou metodou.

Výsledky porovnejte s analytickým řešením.

Výsledek: Analytické řešení $y(1,2) = 2,0736$, a) $y_1 = 1,8$, b) $y_1 = 2,04123$

Zpět

Cvičení 6.2 Je dána počáteční úloha

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 y_3 + 1 \\ y_2' &= y_1 y_2 \\ y_3' &= x + \ln(1 - y_3) + 2\,, \end{aligned}$$

s podmínkami: $y_1(1) = 1\,, \quad y_2(1) = 0\,, \quad y_3(1) = -1\,.$
Určete přibližnou hodnotu $y(1,2)$ řešení této úlohy s krokem $h = 0,2$

a) Eulerovou metodou,

b) zlepšenou Eulerovou metodou,

c) modifikovanou Eulerovou metodou.

Výsledek:

$$\text{a)}\, \mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} 1,4 \\ 0 \\ -0,26137 \end{bmatrix},\ \text{b)}\, \mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} 1,44 \\ 0 \\ -0,2875 \end{bmatrix},\ \text{c)}\, \mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} 1,44 \\ 0 \\ -0,2822 \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 6.1 Určete přibližnou hodnotu řešení počáteční úlohy

$$y'(x) = y(x) + e^{x^2}, \qquad y(0) = 1$$

na intervalu $\langle 0\,; 0,4\rangle$ s krokem $h = 0,2$

a) Eulerovou metodou,

b) zlepšenou Eulerovou metodou,

c) modifikovanou Eulerovou metodou.

U modifikované Eulerovy metody (případ c)) odhadněte aposteriorní chybu přibližného výsledku hodnoty $y(0,4)$ pomocí Richardsonovy extrapolace.

Řešení: Počáteční úlohu

$$y'(x) = y(x) + e^{x^2}, \qquad y(0) = 1\,, \tag{1}$$

kterou řešíme na intervalu $\langle 0\,; 0,4\rangle$ s krokem $h = 0,2$, zapíšeme obecnějším zápisem

$$y'(x) = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0\,,$$

kde $f(x, y) = y(x) + e^{x^2}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

Najít přibližné řešení v bodech $x_{n+1} = x_n + h,\ n = 0, 1,$ tedy znamená, použít ve dvou krocích následující algoritmus:

a) Eulerovy metody:

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n)\,.}$$

Pro přibližné hodnoty y_1, y_2 v bodech $x_1 = 0,2$ a $x_2 = 0,4$ dostáváme:

$y(0,2) \cong y_1 = 1 + 0,2 \cdot f(0\,;\ 1) = 1 + 0,2 \cdot (1 + e^0) = 1,4\,.$

$y(0,4) \cong y_2 = 1,4 + 0,2 \cdot f(0,2\,;\ 1,4) = 1,4 + 0,2 \cdot (1,4 + e^{0,04}) = 1,8881622.$

Zpět

b) <u>zlepšené Eulerovy metody</u>:

$$\boxed{\begin{aligned} &k1 = h\, f(x_n, y_n) \\ &k2 = h\, f(x_n + h, y_n + k1) \\ &y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{2}(k1 + k2)\,. \end{aligned}}$$

Pro přibližnou hodnotu y_1 v bodě $x_1 = 0,2$ dostáváme:

$k1 = 0,2 \cdot f(0\,;\,1) = 0,2 \cdot (1 + \mathrm{e}^0) = 0,4\,.$
$k2 = 0,2 \cdot f(0,2\,;\,1 + 0,4) = 0,2 \cdot (1,4 + \mathrm{e}^{0,04}) = 0,4881621\,.$
$y(0,2) \cong y_1 = 1 + \frac{1}{2}(k1 + k2) = 1,4440811\,.$

Pro přibližnou hodnotu y_2 v bodě $x_2 = 0,4$ dostáváme:

$k1 = 0,2 \cdot f(0,2\,;\,1,4441) = 0,2 \cdot (1,4441 + \mathrm{e}^{0,04}) = 0,4969783\,.$
$k2 = 0,2 \cdot f(0,4\,;\,1,9410595) = 0,2 \cdot (1,9410595 + \mathrm{e}^{0,16}) = 0,622914\,.$
$y(0,4) \cong y_2 = 1,4440811 + \frac{1}{2}(k1 + k2) = 2,0040273\,.$

c) <u>modifikované Eulerovy metody</u>:

$$\boxed{\begin{aligned} &k1 = h\, f(x_n, y_n) \\ &k2 = h\, f(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{1}{2}k1) \\ &y_{n+1} = y_n + k2\,. \end{aligned}}$$

Pro přibližnou hodnotu y_1 v bodě $x_1 = 0,2$ dostáváme:

$k1 = 0,2 \cdot f(0\,;\,1) = 0,2 \cdot (1 + \mathrm{e}^0) = 0,4\,.$
$k2 = 0,2 \cdot f(0,1\,;\,1 + \frac{1}{2}0,4) = 0,2 \cdot (1,2 + \mathrm{e}^{0,01}) = 0,4420101\,.$
$y(0,2) \cong y_1 = 1 + k2 = 1,4420101\,,$

Pro přibližnou hodnotu y_2 v bodě $x_2 = 0,4$ dostáváme:

$k1 = 0,2 \cdot f(0,2\,;\,1,4420101) = 0,2 \cdot (1,4420101 + \mathrm{e}^{0,04}) = 0,4965641\,.$
$k2 = 0,2 \cdot f(0,3\,;\,1,4420101 + \frac{1}{2}0,4965641) = 0,2 \cdot (1,6902922 + \mathrm{e}^{0,09}) = 0,5568932\,.$
$y(0,4) \cong y_2 = 1,4420101 + k2 = 1,9989033\,.$

Pro aposteriorní odhad u modifikované Eulerovy metody (případ c)) vypočítáme přibližnou hodnotu $\widetilde{y}_1$ s dvojnásobným krokem $\widetilde{h} = 0,4$ v bodě $x_1 = 0,4$:

$k1 = 0,4 \cdot f(0\,;\,1) = 0,4 \cdot (1 + \mathrm{e}^{0}) = 0,8\,.$
$k2 = 0,4 \cdot f(0,2\,;\,1 + \frac{1}{2}0,8) = 0,4 \cdot (1,4 + \mathrm{e}^{0,04}) = 0,9763243\,.$
$y(0,4) \cong \widetilde{y}_1 = 1 + k2 = 1,9763243\,.$

Jelikož je modifikovaná Eulerova metoda řádu $k = 2$, bude odhad $Q_{1,2}$ přibližné hodnoty v bodě $x = 0,4$ roven:

$$Q_{1,2} = \frac{\left(\frac{\widetilde{h}}{h}\right)^k Q_2 - Q_1}{\left(\frac{\widetilde{h}}{h}\right)^k - 1} = \frac{2^2 y_2 - \widetilde{y}_1}{2^2 - 1} = \frac{4 \cdot 1,9989033 - 1,9763243}{3} = 2,0064296\,.$$

Aposteriorní chyba výsledku $y_2 \cong y(0,4)$ pomocí Richardsonovy extrapolace tedy je $err = |y_2 - Q_{12}| = 0,0075263.$

Zpět

Příklad 6.2 Mějme dánu počáteční úlohu pro soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= \sqrt{y_1+3} + \frac{y_2}{x-1} \\ y_2' &= 2xy_1 - y_2^2 + 1 \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami: $y_1(0) = -2\,, \quad y_2(0) = 1\,.$

a) Napište postup řešení počáteční úlohy zlepšenou Eulerovou metodou druhého řádu na intervalu $I = \langle 0\,; 0,8 \rangle$.

b) Touto metodou s krokem $h = 0,2$ určete konkrétně přibližnou hodnotu řešení v bodě $x = 0,2$.

Řešení:
Počáteční úloha pro soustavy diferenciálních rovnic

$$y_1' = \sqrt{y_1+3} + \frac{y_2}{x-1} \tag{2}$$

$$y_2' = 2xy_1 - y_2^2 + 1 \tag{3}$$

s počátečními podmínkami

$$y_1(0) = -2 \tag{4}$$

$$y_2(0) = 1 \tag{5}$$

je soustavou dvou diferenciálních rovnic prvního řádu, kterou budeme řešit na intervalu I.

Nejdříve najdeme množinu, na které je počáteční úloha řešitelná a ověříme, zda jsou počáteční podmínky (4) a (5) kompatibilní se zadáním (zda leží v dané množině):

Zpět

Funkce $f_1(x,y_1,y_2)=\sqrt{y_1+3}+\dfrac{y_2}{x-1}$, $f_2(x,y_1,y_2)=2xy_1-y_2^2+1$,
$\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial y_2}$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial y_1}$ a $\dfrac{\partial f_2}{\partial y_2}$ jsou spojité v oblastech Ω_1 a Ω_2:

$$\Omega_1=\{[x,y_1,y_2],x\in(-\infty,1),y_1>-3,y_2\in\mathbb{R}\},$$

$$\Omega_2=\{[x,y_1,y_2],x\in(1,\infty),y_1>-3,y_2\in\mathbb{R}\}.$$

Protože bod $[0,-2,1]\in\Omega_1$, jsou počáteční podmínky kompatibilní se zadáním. Soustavu lze tedy řešit na intervalu $I=\langle 0\,;0,8\rangle\subset(-\infty,1)$.

Řešit úlohu (2), (3) s počátečními podmínkami (4), (5) znamená nalézt hodnoty vektorové funkce $\mathbf{Y}(x)=(y_1(x),y_2(x))^\top$ rovnice

$$\mathbf{Y}'=\mathbf{F}(x,\mathbf{Y}), \tag{6}$$

kde

$$\mathbf{Y}'(x)=\begin{bmatrix} y_1'(x)\\ y_2'(x)\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}(x,\mathbf{Y}(x))=\begin{bmatrix} f_1(x,y_1,y_2)\\ f_2(x,y_1,y_2)\end{bmatrix},$$

s počáteční podmínkou

$$\mathbf{Y}(0)=\begin{bmatrix} -2\\ 1\end{bmatrix}. \tag{7}$$

a) Úlohu řešíme zlepšenou Eulerovou metodou diskrétně v bodech dělení intervalu I:

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_N=0,8\,,\qquad x_{n+1}=x_n+h,\quad n=0,1,\ldots,N-1,$$

pro krok $h=\frac{0,8}{N}$. V těchto bodech budeme hledat přibližné hodnoty $\mathbf{Y}_n$ přesného řešení $\mathbf{Y}(x_n)=(y_1(x_n),y_2(x_n))^\top$,

Zpět

tj.
$$\mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} y_1^n \\ y_2^n \end{bmatrix} \cong \mathbf{Y}(x_n) = \begin{bmatrix} y_1(x_n) \\ y_2(x_n) \end{bmatrix}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N.$$

Zlepšená Eulerova metoda pro úlohu (6) a (7) počítá přibližné řešení úlohy v bodě x_{n+1} pomocí vzorce:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{K1} = h\,\mathbf{F}(x_n, \mathbf{Y}_n), \\ &\mathbf{K2} = h\,\mathbf{F}(x_n + h, \mathbf{Y}_n + \mathbf{K1}) \\ &\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \tfrac{1}{2}(\mathbf{K1} + \mathbf{K2}), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \end{aligned}}$$

kde $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}(0)$.

b) Pokud je $h = 0,2$ a je třeba vypočítat přibližné řešení $\mathbf{Y}_1$ v bodě $x_1 = 0,2$, potom $N = 1$, tedy provedeme pouze jeden krok metody. Při znalosti
$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
počítáme $\mathbf{Y}_1 \cong \mathbf{Y}(x_1)$ z $\mathbf{Y}_0$ následovně:
$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_0 + \frac{1}{2}(\mathbf{K1} + \mathbf{K2}),$$
kde
$$\mathbf{K1} = h\,\mathbf{F}(x_0, \mathbf{Y}_0) = 0,2 \begin{bmatrix} \sqrt{-2+3} + \frac{1}{0-1} \\ 0 - 1^2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
pomocný vektor pro výpočet **K2**
$$\mathbf{Y_p} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{K1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Zpět

$$\mathbf{K2} = h\,\mathbf{F}(x_1, \mathbf{Y}_p) = 0,2 \begin{bmatrix} \sqrt{-2+3} + \frac{1}{0,2-1} \\ 2 \cdot 0,2 \cdot (-2) - 1^2 + 1 \end{bmatrix} = 0,2 \begin{bmatrix} -0,25 \\ -0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,05 \\ -0,16 \end{bmatrix}.$$

Na závěr dostáváme hledaný přibližný vektor řešení v bodě $x = 0,2$:

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,05 \\ -0,16 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -2,025 \\ 0,92 \end{bmatrix}.$$

Zpět

Příklad 6.3 Je dána počáteční úloha pro diferenciální rovnici třetího řádu

$$y''' \quad = \quad \sqrt{1-y'} + 2x\,y'' + 5$$

s podmínkami: $y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,, \quad y''(0) = -1\,.$

a) Napište postup řešení počáteční úlohy modifikovanou Eulerovou metodou druhého řádu na intervalu $I = \langle 0\,; 0,6\rangle$.

b) Touto metodou s krokem $h = 0,2$ určete konkrétně přibližnou hodnotu řešení v bodě $x = 0,4$.

Řešení:
Diferenciální rovnici třetího řádu

$$y''' \quad = \quad \sqrt{1-y'} + 2x\,y'' + 5 \tag{8}$$

řešíme spolu s počátečními podmínkami:

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \\ y''(0) &= -1\,. \end{aligned}$$

Pro převod rovnice (8) na soustavu diferenciálních rovnic položíme

$$y_1 = y\,,\; y_2 = y',\; y_3 = y''\,.$$

Tím převedeme (8) na soustavu 3 diferenciálních rovnic 1. řádu (9) - (11):

$$y_1' \quad = \quad y_2 \tag{9}$$

$$y_2' \quad = \quad y_3 \tag{10}$$

$$y_3' \quad = \quad \sqrt{1-y_2} + 2x\,y_3 + 5 \tag{11}$$

Zpět

s počátečními podmínkami:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= 0 \\ y_3(0) &= -1\,. \end{aligned}$$

Nejdříve najdeme množinu, na které je tato počáteční úloha řešitelná a ověříme, zda jsou počáteční podmínky kompatibilní se zadáním:

Funkce $f(x, y_1, y_2, y_3) = \sqrt{1-y_2} + 2x\,y_3 + 5$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y_1}, \dfrac{\partial f}{\partial y_2}, \dfrac{\partial f}{\partial y_3}$ jsou spojité v oblasti:

$$\Omega = \{[x, y_1, y_2, y_3],\ x \in \mathbb{R},\ y_1 \in \mathbb{R},\ y_2 \in (-\infty, 1),\ y_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Protože bod $[1, 0, -1] \in \Omega$, jsou počáteční podmínky kompatibilní se zadáním. Soustavu lze tedy na zadaném intervalu $I = \langle 0\,;1\rangle$ řešit.

Řešit soustavu diferenciálních rovnic (9) - (11) s počátečními podmínkami znamená nalézt hodnoty vektorové funkce $\mathbf{Y}(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^\top$ rovnice

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y})\,, \tag{12}$$

kde

$$\mathbf{Y}'(x) = \begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}(x)) = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ f(x, y_1, y_2, y_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \sqrt{1-y_2} + 2x\,y_3 + 5 \end{bmatrix}$$

s počáteční podmínkou

$$\mathbf{Y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

a) Počáteční úlohu pro soustavu tří diferenciálních rovnic prvního řádu budeme řešit modifikovanou Eulerovou metodou diskrétně v bodech dělení intervalu $I = \langle 0\,; 0,6\rangle$:

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 0,6\,, \qquad x_{n+1} = x_n + h, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1,$$

pro krok $h = \frac{1}{N}$. V těchto bodech budeme hledat přibližné hodnoty $\mathbf{Y}_n$ přesného řešení $\mathbf{Y}(x_n) = (y_1(x_n), y_2(x_n, y_3(x_n))^\top$, tj.

$$\mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} y_1^n \\ y_2^n \\ y_3^n \end{bmatrix} \cong \mathbf{Y}(x_n) = \begin{bmatrix} y_1(x_n) \\ y_2(x_n) \\ y_3(x_n) \end{bmatrix}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N.$$

Budou nás především zajímat přibližné funkční hodnoty $y_1^n \cong y(x_n)$.

Modifikovaná Eulerova metoda pro úlohu (12) a (13) počítá přibližné řešení úlohy v bodě x_{n+1} pomocí vzorce

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{K1} = h\,\mathbf{F}(x_n, \mathbf{Y}_n), \\ &\mathbf{K2} = h\,\mathbf{F}(x_n + \tfrac{h}{2}, \mathbf{Y}_n + \tfrac{1}{2}\mathbf{K1}) \\ &\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \mathbf{K2}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \end{aligned}}$$

kde $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}(0)$.

b) Pokud je $h = 0,2$, je třeba nejdříve vypočítat přibližné řešení $\mathbf{Y}_1$ v bodě $x_1 = 0,2$ a dále $\mathbf{Y}_2$ v bodě $x_2 = 0,4$. tj. $N = 2$. Provedeme tedy dva kroky metody.

$\boxed{n=1}$ Ze znalosti počátečního vektoru

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

počítáme $\mathbf{Y}_1 \cong \mathbf{Y}(x_1)$ z $\mathbf{Y}_0$ následovně:

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{K2}\,,$$

kde

$$\mathbf{K1} = h\,\mathbf{F}(x_0, \mathbf{Y}_0) = 0,2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \sqrt{1-0} + 2\cdot 0 \cdot (-1) + 5 \end{bmatrix} = 0,2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix},$$

pomocný vektor pro výpočet $\mathbf{K2}$:

$$\mathbf{Y_p} = \mathbf{Y}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{K1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 0,1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,1 \\ -0,4 \end{bmatrix} \quad \text{a}$$

$$\mathbf{K2} = h\,\mathbf{F}\left(x_0 + \frac{h}{2}, \mathbf{Y}_p\right) = 0,2 \begin{bmatrix} -0,1 \\ -0,4 \\ \sqrt{1+0,1} + 2\cdot 0,1(-0,4) + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,02 \\ -0,08 \\ 1,19376 \end{bmatrix}.$$

Dostáváme hledaný přibližný vektor řešení v bodě $x = 0,2$

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,02 \\ -0,08 \\ 1,19376 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,98 \\ -0,08 \\ 0,19376 \end{bmatrix}.$$

Našli jsme tedy přibližnou hodnotu $y_1^1 = 0,98 \cong y(0,2)$ počáteční úlohy pro rovnici 3. řádu (8).

Zpět

$\boxed{n=2}$ Ze znalosti přibližné hodnoty

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} 0,98 \\ -0,08 \\ 0,19376 \end{bmatrix}$$

počítáme $\mathbf{Y}_2 \cong \mathbf{Y}(x_2)$ následovně:

$$\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{K2}\,,$$

kde

$$\mathbf{K1} = h\,\mathbf{F}(x_1, \mathbf{Y}_1) = 0,2 \begin{bmatrix} -0,08 \\ 0,19376 \\ \sqrt{1+0,08} + 2\cdot 0,2 \cdot (0,19376) + 5 \end{bmatrix} = 0,2 \begin{bmatrix} -0,08 \\ 0,19375 \\ 6,11673 \end{bmatrix},$$

pomocný vektor pro výpočet $\mathbf{K2}$:

$$\mathbf{Y_p} = \mathbf{Y}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{K1} = \begin{bmatrix} 0,98 \\ -0,08 \\ 0,19376 \end{bmatrix} + 0,1 \begin{bmatrix} -0,08 \\ 0,19376 \\ 6,11673 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,972 \\ -0,06062 \\ 0,80543 \end{bmatrix} \quad \text{a}$$

$$\mathbf{K2} = h\,\mathbf{F}\left(x_1 + \frac{h}{2}, \mathbf{Y}_p\right) = 0,2\,\mathbf{F}\left(0,3\,; \begin{bmatrix} 0,972 \\ -0,06062 \\ 0,80543 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= 0,2 \begin{bmatrix} -0,06062 \\ 0,80543 \\ \sqrt{1+0,06062} + 2\cdot 0,3(0,80543) + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,012124 \\ 0,1610866 \\ 1,30263 \end{bmatrix}.$$

Zpět

Na závěr dostáváme hledaný přibližný vektor řešení v bodě $x = 0,4$

$$\mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} 0,98 \\ -0,08 \\ 0,19376 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.012124 \\ 0,1610866 \\ 1,30263 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,96788 \\ 0,08109 \\ 1,49639 \end{bmatrix}.$$

Našli jsme tedy přibližnou hodnotu $y_1^2 = 0,96788 \cong y(0,4)$ počáteční úlohy pro rovnici 3. řádu (8).

Zpět

Příklad 6.4 Odvoďte 2-krokovou metodu pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic co největšího řádu, která má tvar:

$$\alpha_2 y_{n+2} + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_0 y_n = h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n).$$

Řešení: Bez újmy na obecnosti můžeme zvolit $\alpha_2 = 1$. Celkem pět koeficientů α_1, α_0, β_2, β_1, β_0 musí splňovat následující rovnice:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
C_0: & \alpha_0 & + & \alpha_1 & + & 1 & & & & & & & = & 0\\
C_1: & & & \alpha_1 & + & 2 & -(& \beta_0 & + & \beta_1 & + & \beta_2) & = & 0\\
C_2: & & & \frac{1}{2}(\alpha_1 & + & 4) & -(& & & \beta_1 & + & 2\beta_2) & = & 0\\
C_3: & & & \frac{1}{6}(\alpha_1 & + & 8) & -\frac{1}{2}(& & & \beta_1 & + & 4\beta_2) & = & 0\\
C_4: & & & \frac{1}{24}(\alpha_1 & + & 16) & -\frac{1}{6}(& & & \beta_1 & + & 8\beta_2) & = & 0
\end{array}$$

Zvolili jsme $C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Dostaneme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
\alpha_0 & + & \alpha_1 & & & & & & & = & -1\\
& & \alpha_1 & - & \beta_0 & - & \beta_1 & - & \beta_2 & = & -2\\
& & \alpha_1 & & & - & 2\beta_1 & - & 4\beta_2 & = & -4\\
& & \alpha_1 & & & - & 3\beta_1 & - & 12\beta_2 & = & -8\\
& & \alpha_1 & & & - & 4\beta_1 & - & 32\beta_2 & = & -16
\end{array}$$

Tuto soustavu můžeme řešit Gaussovou eliminací:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1\\
0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2\\
0 & 1 & 0 & -2 & -4 & -4\\
0 & 1 & 0 & -3 & -12 & -8\\
0 & 1 & 0 & -4 & -32 & -16
\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1\\
0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2\\
0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2\\
0 & 0 & 1 & -2 & -11 & -6\\
0 & 0 & 1 & -3 & -31 & -14
\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1\\
0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2\\
0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2\\
0 & 0 & 0 & -1 & -8 & -4\\
0 & 0 & 0 & -2 & -28 & -12
\end{array}\right) \sim$$

Zpět

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \beta_2 = \frac{1}{3},\ \beta_1 = \frac{4}{3},\ \beta_0 = \frac{1}{3},\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_0 = -1.$$

Zjistíme ještě, zda je metoda stabilní. Sestavíme polynom $\rho(\xi) = \alpha_2\xi^2 + \alpha_1\xi + \alpha_0 = \xi^2 - 1$. Protože kořeny polynomu jsou $\xi = \pm 1$, je metoda stabilní.

Protože $C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ a $C_5 = \frac{1}{120}(\alpha_1 + 32) - \frac{1}{24}(\beta_1 + 16\beta_2) = -\frac{1}{90} \neq 0$ je metoda řádu $p = 4$. Odvozená metoda je

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n).$$

Zpět

Příklad 6.5 Odvoďte 3-krokovou Adams-Moultonovu metodu pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic co největšího řádu:

$$\alpha_3 y_{n+3} + \alpha_2 y_{n+2} = h(\beta_3 f_{n+3} + \beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n).$$

Řešení: Bez újmy na obecnosti můžeme zvolit $\alpha_3 = 1$. Koeficienty α_2, β_3, β_2, β_1, β_0 musí splňovat následující rovnice:

$$\begin{array}{lrcrlrcrcrcr}
C_0: & \alpha_2 & + & 1 & & & & & & & & = 0 \\
C_1: & 2\alpha_2 & + & 3 & -(& \beta_0 & + & \beta_1 & + & \beta_2 & + & \beta_3) = 0 \\
C_2: & \frac{1}{2}(4\alpha_2 & + & 9) & -(& & & \beta_1 & + & 2\beta_2 & + & 3\beta_3) = 0 \\
C_3: & \frac{1}{6}(8\alpha_2 & + & 27) & -\frac{1}{2}(& & & \beta_1 & + & 4\beta_2 & + & 9\beta_3) = 0 \\
C_4: & \frac{1}{24}(16\alpha_2 & + & 81) & -\frac{1}{6}(& & & \beta_1 & + & 8\beta_2 & + & 27\beta_3) = 0
\end{array}.$$

Zvolili jsme $C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Z první rovnice vypočteme $\alpha_2 = -1$. Dosazením za α_2 do předchozích rovnic dostaneme po úpravě soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
\beta_0 & + & \beta_1 & + & \beta_2 & - & \beta_3 & = & 1 \\
 & & \beta_1 & + & 2\beta_2 & + & 3\beta_3 & = & \frac{5}{2} \\
 & & \beta_1 & + & 4\beta_2 & + & 9\beta_3 & = & \frac{19}{3} \\
 & & \beta_1 & + & 8\beta_2 & + & 27\beta_3 & = & \frac{65}{4}
\end{array}.$$

Tuto soustavu můžeme řešit Gaussovou eliminací:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 3 & \frac{5}{2} \\
0 & 1 & 4 & 9 & \frac{19}{3} \\
0 & 1 & 8 & 27 & \frac{65}{4}
\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 3 & \frac{5}{2} \\
0 & 0 & 2 & 6 & \frac{23}{6} \\
0 & 0 & 6 & 24 & \frac{55}{4}
\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 3 & \frac{5}{2} \\
0 & 0 & 2 & 6 & \frac{23}{6} \\
0 & 0 & 0 & 6 & \frac{9}{4}
\end{array}\right)$$

Zpět

$\Rightarrow \quad \beta_3 = \frac{3}{8},\ \beta_2 = \frac{19}{24},\ \beta_1 = -\frac{5}{24},\ \beta_0 = \frac{1}{24}$. Zjistíme, zda je metoda stabilní. Sestavíme polynom $\rho(\xi) = \xi^3 - \xi^2$. Protože kořeny polynomu jsou $\xi_1 = 1$ a $\xi_{2,3} = 0$, je metoda stabilní.
Protože $C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ $C_5 = \frac{1}{120}(32\alpha_2 + 243) - \frac{1}{24}(\beta_1 + 16\beta_2 + 81\beta_3) = -0{,}026388 \neq 0$ je metoda řádu $p = 4$. Odvozená metoda je

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{24}(9f_{n+3} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n).$$

Zpět

7. ODR - Metoda sítí pro okrajové úlohy

- Příklad 7.1 Na intervalu $\langle a, b \rangle$ navrhněte, jak byste řešili metodou sítí okrajovou úlohu pro diferenciální rovnici druhého řádu
$$-y'' + p(x)y = f(x)$$
a okrajové podmínky $y(a) = \gamma_0, \;\; y(b) = \gamma_1$. Předpokládejte, že p a f jsou obecné funkce definované na intervalu $\langle a, b \rangle$, $p(x) \geq 0$ a $\gamma_0, \; \gamma_1 \in \mathbb{R}$ jsou zadané hodnoty.

- Příklad 7.2 Metodou sítí s krokem $h = 0,2$ řešte na intervalu $\langle -0,8; 0 \rangle$ okrajovou úlohu pro diferenciální rovnici druhého řádu
$$-y'' - xy = 2\,(1 + x)$$
s podmínkami: $y(-0,8) = 0, \;\; y(0) = 1$.

- Příklad 7.3 Na intervalu $\langle 0,2; 1 \rangle$ navrhněte, jak byste řešili metodou sítí diferenciální rovnici
$$u'' + \frac{2}{x}u' = f(u)$$
s okrajovými podmínkami $u(0,2) = 0,4$ a $u(1) = 1$, pro různé pravé strany f obecně nelineární hladké funkce proměnné u. Na řešení diferenčních rovnic použijte Newtonovu metodu.

- Příklad 7.4 Na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ řešte metodou sítí diferenciální rovnici
$$\frac{1}{6}\,u'' - u' = u^2 + 1$$
s okrajovými podmínkami $u(0) - \frac{1}{6}\,u'(0) = 1, \quad u'(1) = 0$.

Obsah

Cvičení:

- Cvičení 7.1

  Na intervalu $\langle 2, 4\rangle$ řešte metodou sítí diferenciální rovnici

  $$-u'' + \frac{2}{x}u' + (x-1)u \; = \; x^2$$

  s okrajovými podmínkami $u(2) = -1,\; u(4) = 3$. Napište soustavu diferenciálních rovnic pro krok $h = 0,5$. Řešení znázorněte graficky.

◀ Obsah

Příklad 7.1 Na intervalu $\langle a, b \rangle$ navrhněte, jak byste řešili metodou sítí okrajovou úlohu pro diferenciální rovnici druhého řádu

$$-y'' + p(x)y = f(x)$$

a okrajové podmínky $y(a) = \gamma_0, \quad y(b) = \gamma_1$. Předpokládejte, že p a f jsou obecné funkce definované na intervalu $\langle a, b \rangle$, $p(x) \geq 0$ a γ_0, $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ jsou zadané hodnoty.

Výsledek: Diferenciální rovnici nahradíme soustavou $n-1$ rovnic o $n-1$ neznámých maticově zapsanou

$$A\mathbf{y} = \mathbf{b}\,, \tag{1}$$

kde

$$A = \begin{bmatrix} 2 + h^2 p(x_1) & -1 & 0 & & 0 \\ -1 & 2 + h^2 p(x_2) & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 2 + h^2 p(x_{n-2}) & -1 \\ 0 & & 0 & -1 & 2 + h^2 p(x_{n-1}) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} h^2 f(x_1) + y_0 \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ h^2 f(x_{n-2}) \\ h^2 f(x_{n-1}) + y_n \end{bmatrix}.$$

Vektor neznámých je $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1})^\top$, kde $y_i \cong y(x_i)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Podrobněji viz řešení.

Řešení Zpět

Příklad 7.2 Metodou sítí s krokem $h = 0,2$ řešte na intervalu $\langle -0,8; 0\rangle$ okrajovou úlohu pro diferenciální rovnici druhého řádu

$$-y'' - xy = 2\,(1+x)$$

s podmínkami: $y(-0,8) = 0, \ \ y(0) = 1\,.$

Výsledek: Přibližné řešení na 5 platných míst můžeme zapsat do tabulky:

i	0	1	2	3	4
x_i	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0,0
y_i	0,0	0,30228	0,57982	0,81864	1,0

.

Řešení **Zpět**

Příklad 7.3 Na intervalu $\langle 0,2;1\rangle$ navrhněte, jak byste řešili metodou sítí diferenciální rovnici

$$u'' + \frac{2}{x}u' = f(u)$$

s okrajovými podmínkami $u(0,2) = 0,4$ a $u(1) = 1$, pro různé pravé strany f obecně nelineární hladké funkce proměnné u. Na řešení diferenčních rovnic použijte Newtonovu metodu.

Výsledek: Vektor neznámých, který označíme $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_{n-1})^\top$, bude řešením soustavy nelineárních rovnic

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}\,, \tag{2}$$

kde

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}) = (\Phi_1(\boldsymbol{u}), \ldots, \Phi_{n-1}(\boldsymbol{u}))^\top$$

a

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\boldsymbol{u}) &= (1-\alpha_i)\;0,4 - 2u_i + (1+\alpha_i)\;u_{i+1} - h^2 f(u_i)\\
\Phi_i(\boldsymbol{u}) &= (1-\alpha_i)\;u_{i-1} - 2u_i + (1+\alpha_i)\;u_{i+1} - h^2 f(u_i)\,, \quad i = 2, \ldots, n-2\\
\Phi_{n-1}(\boldsymbol{u}) &= (1-\alpha_i)\;u_{i-1} - 2u_i + (1+\alpha_i) - h^2 f(u_i)
\end{aligned}$$

Soustavu nelineárních rovnic budeme řešit Newtonovou metodou. Podrobněji viz. řešení

Řešení **Zpět**

Příklad 7.4 Na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ řešte metodou sítí diferenciální rovnici

$$\frac{1}{6}\,u'' - u' = u^2 + 1$$

s okrajovými podmínkami $u(0) - \frac{1}{6}\,u'(0) \;=\; 1, \quad u'(1) \;=\; 0\,.$

Výsledek: Vektor neznámých přibližných hodnot, který označíme $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_{n-1})^\top$, bude řešit soustavu nelineárních algebraických rovnic

$$A\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{u})\,,$$

kde

$$A = \begin{bmatrix} (1+3h)\beta - 2 & (1+3h)\gamma + (1-3h) & 0 & & 0 \\ (1+3h) & -2 & (1-3h) & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & (1+3h) & -2 & (1-3h) \\ 0 & & 0 & (1+6h) & -(1+6h) \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} 6h^2(u_1^2+1) - (1+3h)\alpha \\ 6h^2(u_2^2+1) \\ \vdots \\ 6h^2(u_{n-2}^2+1) \\ 9h^2(u_{n-1}^2+1) \end{bmatrix}.$$

Tuto soustavu můžeme řešit metodou postupných aproximací, viz řešení.

Řešení **Zpět**

Cvičení 7.1

Na intervalu $\langle 2, 4\rangle$ řešte metodou sítí diferenciální rovnici

$$-u'' + \frac{2}{x}u' + (x-1)u \;=\; x^2$$

s okrajovými podmínkami $u(2) = -1,\ u(4) = 3$. Napište soustavu diferenciálních rovnic pro krok $h = 0,5$. Řešení znázorněte graficky.

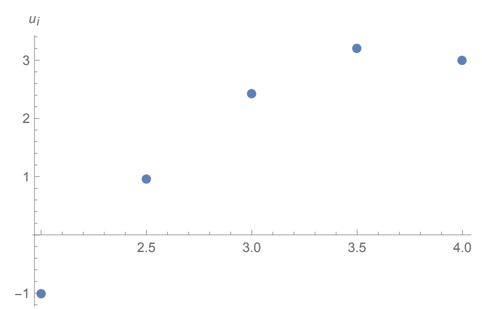
Výsledek: Označme $u_0 = -1,\ u_1 \cong u(2,5),\ u_2 \cong u(3),\ u_3 \cong u(3,5),\ u_4 = 3$. Vektor neznámých přibližných hodnot, který označíme $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)^\top$, bude řešit soustavu lineárních algebraických rovnic

$$A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}\,,$$

kde

$$A = \begin{bmatrix} 4,75 & -1,6 & 0 \\ -2,\bar{3} & 5 & -1,\bar{6} \\ 0 & -2,28671 & 5,25 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 0,725 \\ 4,5 \\ 11,2679 \end{bmatrix}.$$

Řešení této soustavy je $\boldsymbol{u} = (0,966948; 2,4175; 3,19878)^\top$.
Grafické znázornění řešení je na následujícím orázku:



Zpět

Příklad 7.1 Na intervalu $\langle a, b \rangle$ navrhněte, jak byste řešili metodou sítí okrajovou úlohu pro diferenciální rovnici druhého řádu

$$-y'' + p(x)y = f(x)$$

a okrajové podmínky $y(a) = \gamma_0, \quad y(b) = \gamma_1$. Předpokládejte, že p a f jsou obecné funkce definované na intervalu $\langle a, b \rangle$, $p(x) \geq 0$ a γ_0, $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ jsou zadané hodnoty.

Řešení: Rovnice

$$-y'' + p(x)y = f(x)\,, \tag{3}$$

je lineární diferenciální rovnicí, kterou je třeba řešit spolu s Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$y(a) = \gamma_0 \tag{4}$$

$$y(b) = \gamma_1\,. \tag{5}$$

Na intervalu $\langle a, b\rangle$ zvolíme síť $n+1$ ekvidistantních bodů s krokem h, tj.

$$x_i = a + i\,h\,, \quad i = 0, \ldots, n, \qquad h = \frac{b-a}{n}\,.$$

Hledáme přibližné hodnoty y_i řešení okrajové úlohy v bodech sítě. Hodnoty řešení $y(x)$ v krajních bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ již známe z okrajových podmínek (4) a (5), tj. $y(a) = y_0 = \gamma_0$ a $y(b) = y_n = \gamma_1$. Je tedy třeba najít $n-1$ hodnot, které aproximují $y(x_i)$ pouze ve vnitřních bodech intervalu:

$$y_i \cong y(x_i)\,, \quad i = 1, \ldots, n-1\,.$$

V diferenciální rovnici (3) nahradíme derivaci diferenční formulí s přesností $O(h^2)$

$$-\frac{y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1})}{h^2} + p(x_i)\,y(x_i) = f(x_i) + O(h^2)\,.$$

Zpět

Zanedbáme výraz $O(h^2)$ a dostaneme rovnici pro přibližné hodnoty y_i, $i = 1, \ldots, n-1$

$$-\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + p(x_i)\, y_i = f(x_i)\,,$$

Po úpravě dostaneme soustavu $n-1$ lineárních rovnic pro $n-1$ neznámých

$$\boxed{-y_{i-1} + (2 + h^2 p(x_i))y_i - y_{i+1} = h^2 f(x_i)\,, \quad i = 1, \ldots, n-1\,.}$$

Vektor neznámých, který označíme $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1})^\top$, bude řešit soustavu algebraických rovnic

$$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}\,, \tag{6}$$

kde

$$A = \begin{bmatrix} 2 + h^2 p(x_1) & -1 & 0 & & 0 \\ -1 & 2 + h^2 p(x_2) & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 2 + h^2 p(x_{n-2}) & -1 \\ 0 & & 0 & -1 & 2 + h^2 p(x_{n-1}) \end{bmatrix},$$

je třídiagonální matice

a vektor pravých stran je roven

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} h^2 f(x_1) + y_0 \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ h^2 f(x_{n-2}) \\ h^2 f(x_{n-1}) + y_n \end{bmatrix}.$$

Soustavu (6) můžeme řešit například modifikovanou Gaussovou eliminací pro třídiagonální matice, tzv. metodou faktorizace. Vzhledem k tomu, že je matice A ryze diagonálně dominantní můžeme soustavu (6) řešit také některou iterační metodou (Jacobiho nebo Gauss-Seidela) pro řešení soustavy algebraických rovnic. Nyní si označme vektor $k-$té iterace $(\boldsymbol{y})^k = \left((y_0)^k, (y_1)^k, \ldots, (y_{n-1})^k, (y_n^k)\right)^\top$ délky $n+1$.

Jacobiho metoda: pro $k = 1, 2, \ldots$ počítáme

$$(y_i)^{k+1} = \frac{h^2 f(x_i) + (y_{i-1})^k + (y_{i+1})^k}{(2 + h^2\, p(x_i))}, \; i = 1, \ldots, n-1, \;\; (y_0)^k = \gamma_0, \; (y_n)^k = \gamma_1.$$

Gauss-Seidelova metoda: pro $k = 1, 2, \ldots$ počítáme

$$(y_i)^{k+1} = \frac{h^2 f(x_i) + (y_{i-1})^{k+1} + (y_{i+1})^k}{(2 + h^2\, p(x_i))}, \; i = 1, \ldots, n-1, \;\; (y_0)^k = \gamma_0, \; (y_n)^k = \gamma_1.$$

Počáteční přiblížení $(\boldsymbol{y})^0 = ((y_0)^0, \ldots, (y_n)^0)^\top$ volíme např. tak, aby hodnoty $(y_i)^0$ lineárně interpolovaly okrajové podmínky:

$$\boldsymbol{y}^0 = \left(\gamma_0, \ldots, \gamma_0 + i\frac{\gamma_1 - \gamma_0}{n}, \ldots, , \gamma_1\right)^\top.$$

Iterace pro k počítáme dokud neplatí $\|(\boldsymbol{y})^{k+1} - (\boldsymbol{y})^k\| < \varepsilon$, kde ε je předem daná malá kladná hodnota.

Zpět

Příklad 7.2 Metodou sítí s krokem $h = 0,2$ řešte na intervalu $\langle -0,8; 0 \rangle$ okrajovou úlohu pro diferenciální rovnici druhého řádu

$$-y'' - xy = 2\,(1 + x)$$

s podmínkami: $y(-0,8) \;=\; 0, \;\; y(0) \;=\; 1\,.$

Řešení: Zadaná rovnice

$$-y'' - xy = 2\,(1 + x) \tag{7}$$

je lineární diferenciální rovnicí, kterou je třeba řešit spolu s Dirichletovými okrajovými podmínkami

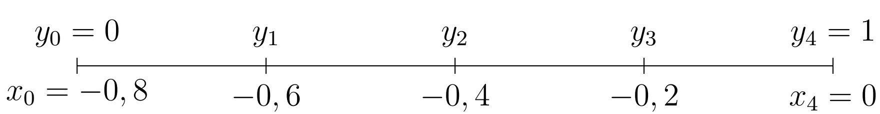
$$y(-0,8) \;=\; 0 \tag{8}$$

$$y(0) \;=\; 1 \tag{9}$$

na intervalu $\langle -0,8, 0\rangle$. Rovnice (7) spolu s okrajovými podmínkami (8) a (9) je konkrétní okrajová úloha obecnější úlohy příkladu 7.1, kde $p(x) = -x$ a $f(x) = 2(1 + x)$.
Na intervalu $\langle -0,8, 0\rangle$ zvolíme síť ekvidistantních bodů se zadaným krokem $h = 0,2$:

$$x_i = -0,8 + h\,i = 0,2\,i\,, \quad i = 0, \ldots, 4\,.$$

Hledané hodnoty řešení $y(x)$ budeme aproximovat v uzlových bodech x_i , tj. $y(x_i) \cong y_i$, přičemž $y_0 = 0$, $y_4 = 1$.



Diferenciální rovnici (7) nahradíme diferenční formulí

$$\boxed{-y_{i-1} + (2 - h^2 x_i) y_i - y_{i+1} = 2h^2 (1 + x_i)\,, \quad i = 1, 2, 3\,.} \tag{10}$$

Zpět

Řešíme soustavu tří lineárních algebraických rovnic

$$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}\,, \tag{11}$$

konkrétně po dosazení

$$\begin{bmatrix} 2,024 & -1 & 0 \\ -1 & 2,016 & -1 \\ 0 & -1 & 2,008 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,032 \\ 0,048 \\ 1,064 \end{bmatrix}.$$

Tuto soustavu lze řešit Gaussovou eliminací "ručně".

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2,024 & -1 & 0 & 0,032 \\ 0 & 3,08038 & -2,024 & 0,129152 \\ 0 & -1 & 2,008 & 1,064 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2,024 & -1 & 0 & 0,032 \\ 0 & -1 & 2,008 & 1,064 \\ 0 & 0 & 4,1614 & 3,4066763 \end{array}\right]$$

Výsledné přibližné hodnoty řešení ve vnitřních uzlech jsou

$$(y_1, y_2, y_3)^\top = (0,302284; 0,579823; 0,818637)\,.$$

Přibližné řešení můžeme zapsat do tabulky:

i	0	1	2	3	4
x_i	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0,0
y_i	0,0	0,30228	0,57982	0,81864	1,0

Zpět

Příklad 7.3 Na intervalu $\langle 0,2;1\rangle$ navrhněte, jak byste řešili metodou sítí diferenciální rovnici

$$u'' + \frac{2}{x}u' = f(u)$$

s okrajovými podmínkami $u(0,2) = 0,4$ a $u(1) = 1$, pro různé pravé strany f obecně nelineární hladké funkce proměnné u. Na řešení diferenčních rovnic použijte Newtonovu metodu.

Řešení:
Zadaná rovnice

$$u'' + \frac{2}{x}\,u' = f(u) \tag{12}$$

je obecně nelineární diferenciální rovnicí, kterou řešíme spolu s Dirichletovými okrajovými podmínkami

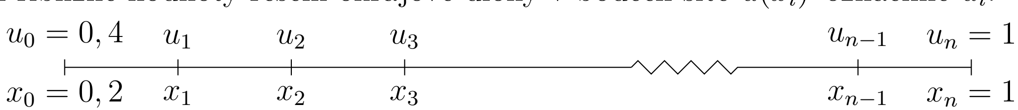
$$u(0,2) \;=\; 0,4 \tag{13}$$

$$u(1) \;=\; 1\,. \tag{14}$$

Na intervalu $\langle 0,2\,;1\rangle$ zvolíme síť $n+1$ ekvidistantních bodů s krokem h, tj.

$$x_i = 0,2 + i\,h\,, \quad i = 0,\ldots,n, \qquad h = \frac{0,8}{n}\,.$$

Přibližné hodnoty řešení okrajové úlohy v bodech sítě $u(x_i)$ označíme u_i.



Hodnoty řešení $u(x)$ v krajních bodech intervalu $\langle 0,2\,;1\rangle$ známe z okrajových podmínek (13) a (14), tj. $u_0 = 0,4$ a $u_n = 1$. Je tedy třeba najít $n-1$ hodnot, které aproximují $u(x_i)$ ve vnitřních bodech intervalu:

$$u_i \cong u(x_i)\,, \quad i = 1,\ldots,n-1\,.$$

Zpět

Diferenciální rovnici (12) nahradíme diferenční formulí s přesností $O(h^2)$

$$\frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2} + \frac{2}{x_i}\left(\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h}\right) = f(u(x_i)) + O(h^2)\,,$$

zanedbáme výraz $O(h^2)$ a nahradíme $u_i \cong u(x_i)$

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + \frac{2}{x_i}\left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}\right) = f(u_i)\,.$$

Rovnici upravíme

$$u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} + \alpha_i(u_{i+1} - u_{i-1}) = h^2 f(u_i)\,, \quad \text{kde} \quad \alpha_i = \frac{h}{0,2 + ih}\,.$$

Dále upravíme na výslednou diferenční formuli:

$$\boxed{(1-\alpha_i)\ u_{i-1} - 2u_i + (1+\alpha_i)\ u_{i+1} = h^2 f(u_i)\,, \quad i = 1,\ldots,n-1.} \tag{15}$$

Vektor neznámých, který označíme $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_{n-1})^\top$, bude řešit soustavu rovnic

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}\,, \tag{16}$$

kde

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}) = (\Phi_1(\boldsymbol{u}), \ldots, \Phi_{n-1}(\boldsymbol{u}))^\top$$

a

$$\Phi_i(\boldsymbol{u}) = (1-\alpha_i)\ u_{i-1} - 2u_i + (1+\alpha_i)\ u_{i+1} - h^2 f(u_i)\,, \quad i = 1,\ldots,n-1.$$

Zpět

Vzhledem k okrajovým podmínkám (13) a (14) bude

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} (1-\alpha_1)\, 0,4 - 2u_1 + (1+\alpha_1)\ u_2 - h^2 f(u_1) \\ \vdots \\ (1-\alpha_i)\ u_{i-1} - 2u_i + (1+\alpha_i)\ u_{i+1} - h^2 f(u_i) \\ \vdots \\ (1-\alpha_{n-1})\ u_{n-2} - 2u_{n-1} + (1+\alpha_{n-1})\, 1 - h^2 f(u_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

Rovnici (16) budeme řešit Newtonovou metodou. Nejdříve zvolíme počáteční přiblížení $\boldsymbol{u}^0 = (u_1^0, \ldots, u_{n-1}^0)$ hodnot u_i , $i = 1, \ldots, n-1$. Další aproximace vypočteme ze vztahu

$$\boldsymbol{u}^{k+1} = \boldsymbol{u}^k + \boldsymbol{\Delta}^k\,, \quad k = 0, 1, 2\ldots\,,$$

kde $\boldsymbol{\Delta}^k$ řeší

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{u}^k)\,\boldsymbol{\Delta}^k = -\,\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}^k)\,, \quad k = 0, 1, 2\ldots$$

a $\mathbf{J}(\boldsymbol{u}) = \dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}$ je Jacobiho matice.

Jacobiho matice

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{u}^k) = \begin{bmatrix} B_1 & C_1 & 0 & & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A_{n-2} & B_{n-2} & C_{n-2} \\ 0 & & 0 & A_{n-1} & B_{n-1} \end{bmatrix},$$

je třídiagonální matice, kde

$$A_i = 1 - \alpha_i \qquad B_i = -2 - h^2 \frac{\partial f}{\partial u}(u_i) \qquad C_i = 1 + \alpha_i$$

Pokud je například $f(u) = \dfrac{u(x)}{u(x)+1}$, potom

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_i) = f'(u_i) = \frac{1}{(u_i+1)^2}\,.$$

Počáteční přiblížení $\boldsymbol{u}^0 = (u_1^0, \ldots, u_{n-1}^0)$ volíme např. tak, aby hodnoty u_j^0 lineárně interpolovaly okrajové podmínky

$$\boldsymbol{u}^0 = \left(0,4 + \frac{0,6}{n}; \ldots; 0,4 + \frac{0,6\,j}{n}; \ldots; 0,4 + \frac{0,6\,(n-1)}{n}\right)^\top .$$

Zpět

Příklad 7.4 Na intervalu $\langle 0,1\rangle$ řešte metodou sítí diferenciální rovnici

$$\frac{1}{6}\,u'' - u' = u^2 + 1$$

s okrajovými podmínkami $u(0) - \frac{1}{6}\,u'(0) \;=\; 1, \quad u'(1) \;=\; 0\,.$

Řešení:

Diferenciální rovnice

$$\frac{1}{6}\,u'' - u' = u^2 + 1 \tag{17}$$

je zřejmě nelineární. Na intervalu $\langle 0,1\rangle$ zvolíme síť $x_i = ih\,,\ i = 0,\ldots n$ ekvidistantních bodů s krokem $h = \frac{1}{n}$. Hledané hodnoty $u(x)$ budeme aproximovat v uzlech x_i, tj. $u(x_i) \cong u_i\,.$

Diferenciální rovnici (17) nahradíme diferenční formulí

$$\frac{1}{6}\left(\frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2}\right) - \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} = u^2(x_i) + 1 + O(h^2)\,,$$

zanedbáme výraz $O(h^2)$ a nahradíme $u_i \cong u(x_i)$

$$\frac{1}{6}\left(\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}\right) - \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = u_i^2 + 1\,,$$

rovnici upravíme na

$$u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} - 3hu_{i+1} + 3hu_{i-1} = 6h^2(u_i^2 + 1)\,.$$

Zpět

Dostaneme soustavu $n-1$ diferenčních rovnic

$$\boxed{(1+3h)u_{i-1} - 2u_i + (1-3h)u_{i+1} = 6h^2(u_i^2+1)\,, \quad i = 1,\dots,n-1\,.} \tag{18}$$

První okrajovou podmínku budeme také aproximovat s přesností $O(h^2)$:

$$u(0) - \frac{1}{6}\,u'(0) = 1 \qquad \to \qquad u(x_0) - \frac{1}{6}\,\frac{-3u(x_0)+4u(x_1)-u(x_2)}{2h} = 1 + O(h^2)$$

Zanedbáním výrazu $O(h^2)$ a nahradou $u_i \cong u(x_i)$ dostaneme

$$u_0 = \frac{12h}{12h+3} + \frac{4u_1}{12h+3} - \frac{u_2}{12h+3} \tag{19}$$

Označíme-li $\alpha = \dfrac{12h}{12h+3}$, $\beta = \dfrac{4}{12h+3}$, $\gamma = \dfrac{-1}{12h+3}$, lze (19) zjednodušit na

$$\boxed{u_0 = \alpha + \beta u_1 + \gamma u_2}\,. \tag{20}$$

Podobně aproximujeme druhou okrajovou podmínku

$$u'(1) = 0 \qquad \to \qquad \frac{u(x_{n-2}) - 4u(x_{n-1}) + 3u(x_n)}{2h} = 0 + O(h^2)\,,$$

tedy

$$\boxed{u_n = \tfrac{4}{3}u_{n-1} - \tfrac{1}{3}u_{n-2}}\,. \tag{21}$$

Vzhledem ke vztahům (20) a (21) se počet neznámých redukuje na $n-1$. Tyto neznámé by měly splňovat $n-1$ rovnic:

$$\begin{aligned}
((1+3h)\beta-2)u_1 + ((1+3h)\gamma + (1-3h))u_2 &= 6h^2(u_1^2+1) - (1+3h)\alpha\,,\\
(1+3h)u_{i-1} - 2u_i + (1-3h)u_{i+1} &= 6h^2(u_i^2+1)\ , \qquad i=2,\dots,n-2\,,\\
\frac{2(1+6h)}{3}u_{n-2} - \frac{2(1+6h)}{3}u_{n-1} &= 6h^2(u_{n-1}^2+1)\,.
\end{aligned}$$

První (resp. poslední) rovnici jsme obdrželi dosazením vztahu pro u_0 z (20) do (18), kde $i=0$ (resp. u_n ze vztahu(21) do (18), kde $i=n-1$).

Vektor neznámých, který označíme $\boldsymbol{u} = (u_1,\dots,u_{n-1})^\top$, bude řešit soustavu algebraických rovnic

$$A\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{u})\,, \tag{22}$$

kde

$$A = \begin{bmatrix} (1+3h)\beta - 2 & (1+3h)\gamma + (1-3h) & 0 & & 0 \\ (1+3h) & -2 & (1-3h) & & 0 \\ & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \\ 0 & & (1+3h) & -2 & (1-3h) \\ 0 & & 0 & (1+6h) & -(1+6h) \end{bmatrix},$$

$$f(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} 6h^2(u_1^2+1) - (1+3h)\alpha \\ 6h^2(u_2^2+1) \\ \vdots \\ 6h^2(u_{n-2}^2+1) \\ 9h^2(u_{n-1}^2+1) \end{bmatrix}.$$

Soustavu (36) můžeme řešit například metodou postupných aproximací

$$A\boldsymbol{u}^{k+1} = f(\boldsymbol{u}^k)\,, \qquad k = 0, 1, 2, \dots\,,$$

kde výchozí aproximaci $\boldsymbol{u}^0$ volíme např. tak, aby splňovala okrajové podmínky, v našem případě například konstantní funkci $u(x) = 1$, tedy

$$\boldsymbol{u}^0 = (1, 1, \dots, 1)\,.$$

Výpočet provádíme dokud neplatí

$$\|\boldsymbol{u}^{k+1} - \boldsymbol{u}^k\| < \varepsilon\ .$$

pro předem zvolenou přesnost ε.

8. ODR - Metoda střelby pro okrajové úlohy

- Příklad 8.1 Je dána soustava diferenciálních rovnic

$$
\begin{aligned}
y_1' &= \mathrm{e}^{y_1} + \sin y_2 \\
y_2' &= x^2 y_1 + \mathrm{e}^{3y_2}\, y_1
\end{aligned}
$$

  s okrajovými podmínkami $2y_1(0) - 3y_2(0) = 5\,,\quad y_1(2) + y_2(2) = -1$. Navrhněte řešení okrajové úlohy metodou střelby pomocí variačních proměnných. Napište postup řešení.

- Příklad 8.2 Navrhněte řešení okrajové úlohy

$$
y'' = \frac{1}{2}\, y - 2\,\frac{(y')^2}{y}
$$

$$
y(0) = 1\,, \quad y(1) = 1,5
$$

  metodou střelby. Řešte pomocí variačních proměnných. Napište postup řešení.

Obsah

Příklad 8.1 Je dána soustava diferenciálních rovnic

$$
\begin{aligned}
y_1' &= \mathrm{e}^{y_1} + \sin y_2 \\
y_2' &= x^2 y_1 + \mathrm{e}^{3y_2}\, y_1
\end{aligned}
$$

s okrajovými podmínkami $2y_1(0) - 3y_2(0) = 5\,, \quad y_1(2) + y_2(2) = -1$. Navrhněte řešení okrajové úlohy metodou střelby pomocí variačních proměnných. Napište postup řešení.

Výsledek:

Postup řešení okrajové úlohy

1. Položme $k = 0$, zvolme počáteční hodnotu $\eta = \eta^k$ a přesnost ε.

2. Pro $\eta = \eta^k$ řešíme pomocí RK–metody počáteční úlohu pro 4 rovnice

$$
\begin{aligned}
y_1' &= \mathrm{e}^{y_1} + \sin y_2 \\
y_2' &= x^2 y_1 + \mathrm{e}^{3y_2}\, y_1 \\
p_1' &= \mathrm{e}^{y_1} p_1 + \cos y_2\, p_2 \\
p_2' &= (x^2 + \mathrm{e}^{3y_2}) p_1 + 3y_1\, \mathrm{e}^{3y_2}\, p_2
\end{aligned}
$$

s podmínkami

$$
\begin{aligned}
y_1(0) &= \eta\,, \\
y_2(0) &= \frac{1}{3}(2\eta - 5)\,, \\
p_1(0) &= 1\,, \\
p_2(0) &= \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}
$$

Získáme $y_1(2, \eta^k), y_2(2, \eta^k),\ p_1(2, \eta^k), p_2(2, \eta^k)$.

Řešení Zpět

Pokračování výsledku:
3. Vypočítáme

$$\eta^{k+1} = \eta^k - \frac{y_1(2,\eta^k) + y_2(2,\eta^k) + 1}{p_1(2,\eta^k) + p_2(2,\eta^k)}\,.$$

Na základě hodnot η^{k+1}, η^k rozhodneme o dalším kroku algoritmu:
$|\eta^{k+1} - \eta^k| \geq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad k := k+1 \quad \Rightarrow \quad$ **2.**
$|\eta^{k+1} - \eta^k| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad$ **4.**
4. Pro $\eta = \eta^{k+1}$ řešíme pomocí RK–metody počáteční úlohu pro dvě diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} y_1' &= \mathrm{e}^{y_1} + \sin y_2 \\ y_2' &= x^2 y_1 + \mathrm{e}^{3y_2}\, y_1 \end{aligned}$$

s podmínkami

$$\begin{aligned} y_1(0) &= \eta\,, \\ y_2(0) &= \frac{1}{3}(2\eta - 5)\,. \end{aligned}$$

Diskrétní přibližné hodnoty funkcí y_1, y_2 získané RK–metodou v bodech dělení $x_i,\ i = 0,\dots,N$ intervalu $\langle 0\,;2\rangle$, tj.

$$y_1(x_i,\eta^{k+1}),\ y_2(x_i,\eta^{k+1}), \quad i = 0,\dots,N$$

budou výsledným přibližným řešením dané okrajové úlohy.

Řešení Zpět

Příklad 8.2 Navrhněte řešení okrajové úlohy

$$y'' = \frac{1}{2}\,y - 2\,\frac{(y')^2}{y}$$

$$y(0) = 1\,, \quad y(1) = 1,5$$

metodou střelby. Řešte pomocí variačních proměnných. Napište postup řešení.

Výsledek:

Postup řešení okrajové úlohy

1. Položme $k = 0$, zvolme počáteční hodnotu $\eta = \eta^k$ a přesnost ε.

2. Pro $\eta = \eta^k$ řešíme pomocí RK–metody počáteční úlohu pro 4 rovnice

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= \frac{1}{2}\,y_1 - 2\frac{y_2^2}{y_1} \\ p_1' &= p_2 \\ p_2' &= \left(\frac{1}{2} + 2\,\frac{y_2^2}{y_1^2}\right) p_1 - 4\,\frac{y_2}{y_1}\,p_2 \end{aligned}$$

s podmínkami

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= \eta \\ p_1(0) &= 0 \\ p_2(0) &= 1\,. \end{aligned}$$

Získáme $y_1(1,\eta^k), y_2(1,\eta^k),\ p_1(1,\eta^k), p_2(1,\eta^k)$

Řešení **Zpět**

Pokračování výsledku:

3. Vypočítáme novou aproximaci η^{k+1}

$$\eta^{k+1} = \eta^k - \frac{y_1(1, \eta^k) - 1,5}{p_1(1, \eta^k)} \,.$$

Na základě hodnot η^{k+1}, η^k rozhodneme o dalším kroku algoritmu:
$|\eta^{k+1} - \eta^k| \geq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad k := k+1 \quad \Rightarrow \quad$ **2**.
$|\eta^{k+1} - \eta^k| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad$ **4**.

4. Pro $\eta = \eta^{k+1}$ řešíme pomocí RK–metody počáteční úlohu pro dvě diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= \frac{1}{2}\, y_1 - 2\frac{y_2^2}{y_1} \,, \end{aligned}$$

s podmínkami

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= \eta \,. \end{aligned}$$

Diskrétní přibližné hodnoty funkce $y = y_1$ získané RK–metodou v bodech dělení $x_i,\ i = 0, \ldots, N$ intervalu $\langle 0\,; 1\rangle$, tj.

$$y_1(x_i, \eta^{k+1}), \quad i = 0, \ldots, N \,,$$

budou výsledným přibližným řešením dané okrajové úlohy.

Příklad 8.1 Je dána soustava diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= \mathrm{e}^{y_1} + \sin y_2 \\ y_2' &= x^2 y_1 + \mathrm{e}^{3y_2}\, y_1 \end{aligned}$$

s okrajovými podmínkami $2y_1(0) - 3y_2(0) = 5\,,\quad y_1(2) + y_2(2) = -1$. Navrhněte řešení okrajové úlohy metodou střelby pomocí variačních proměnných. Napište postup řešení.

Řešení:
Soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= \mathrm{e}^{y_1} + \sin y_2 && (1) \\ y_2' &= x^2 y_1 + \mathrm{e}^{3y_2}\, y_1 && (2) \end{aligned}$$

se separovanými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} 2y_1(0) - 3y_2(0) &= 5 && (3) \\ y_1(2) + y_2(2) &= -1\,, && (4) \end{aligned}$$

řešíme na intervalu $\langle 0\,; 2\rangle$.
Okrajovou úlohu převedeme na posloupnost počátečních úloh se zvolenou počáteční podmínkou v některém krajním bodě intervalu a určíme druhou počáteční podmínku. Budeme požadovat, aby volba těchto počátečních úloh byla taková, že řešení s touto počáteční podmínkou splňuje okrajové podmínky v obou krajních bodech.

1) Nejprve volíme jednu počáteční podmínku, např. $y_1(0) = \eta$ (η počáteční nástřel) a z rovnice (3) dopočítáme zbývající počáteční podmínku $y_2(0)$, tj.

$$\begin{aligned} y_1(0) &= \eta\,, && (5) \\ y_2(0) &= \frac{1}{3}(2\eta - 5)\,. && (6) \end{aligned}$$

Tak získáme počáteční úlohu pro soustavu dvou diferenciálních rovnic (1), (2) s počátečními podmínkami (5), (6).

Zpět

Řešit úlohu pomocí variačních proměnných znamená přidat, pomocí variačních proměnných

$$p_1 = \frac{\partial y_1}{\partial \eta}\,, \quad p_2 = \frac{\partial y_2}{\partial \eta}\,,$$

dvě nové diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} p_1' &= \frac{\partial y_1'}{\partial \eta} = \frac{\partial\left(\mathrm{e}^{y_1} + \sin y_2\right)}{\partial \eta} = \mathrm{e}^{y_1}\frac{\partial y_1}{\partial \eta} + \cos y_2\,\frac{\partial y_2}{\partial \eta} \\ p_2' &= \frac{\partial y_2'}{\partial \eta} = \frac{\partial\left(x^2 y_1 + \mathrm{e}^{3y_2}\,y_1\right)}{\partial \eta} = (x^2 + \mathrm{e}^{3y_2})\frac{\partial y_1}{\partial \eta} + 3y_1\,\mathrm{e}^{3y_2}\,\frac{\partial y_2}{\partial \eta}\,, \end{aligned}$$

tj.

$$p_1' = \mathrm{e}^{y_1} p_1 + \cos y_2\, p_2 \tag{7}$$
$$p_2' = (x^2 + \mathrm{e}^{3y_2}) p_1 + 3y_1\,\mathrm{e}^{3y_2}\,p_2 \tag{8}$$

s počátečními podmínkami

$$p_1(0) = 1 \tag{9}$$
$$p_2(0) = \frac{2}{3}\,. \tag{10}$$

Dostáváme tedy počáteční úlohu pro 4 diferenciální rovnice (1), (2), (7), (8) s počátečními podmínkami (5), (6), (9), (10).

2) Pomocí některé z metod Rungova Kuttova typu (RK–metody) získáme (pro zvolené η) přibližné řešení počáteční úlohy, tj. hodnoty funkce $y_1(2,\eta), y_2(2,\eta)$, $p_1(2,\eta), p_2(2,\eta)$. Pokud neplatí okrajová podmínka (4), tj.

$$y_1(2,\eta) + y_2(2,\eta) + 1 \neq 0\,,$$

znamená to, že jsme počátečním nástřelem η minuli cíl a je nutno opravit původní odhad η.

Je třeba najít takové η, aby přibližně splňovalo nelineární rovnici

$$\varphi(\eta) = 0\,, \quad \text{kde} \quad \varphi(\eta) = y_1(2,\eta) + y_2(2,\eta) + 1\,. \tag{11}$$

Na hledání kořene funkce φ lze použít některou iterační metodu. Řešení pomocí variačních proměnných usnadní použití Newtonovy metody.

3) Odhad počáteční hodnoty η opravíme pomocí Newtonovy metody vypočítáním nové iterace η^{Nov} ze staré hodnoty $\eta^{St} = \eta$ následovně

$$\eta^{Nov} = \eta^{St} - \frac{\varphi(\eta^{St})}{\varphi'(\eta^{St})}. \tag{12}$$

Dosadíme-li derivaci funkce $\varphi(\eta)$, tj.

$$\varphi'(\eta) = \frac{\partial\left(y_1(2,\eta) + y_2(2,\eta) + 1\right)}{\partial\eta} = p_1(2,\eta) + p_2(2,\eta)$$

do (12) bude

$$\eta^{Nov} = \eta^{St} - \frac{y_1(2,\eta^{St}) + y_2(2,\eta^{St}) + 1}{p_1(2,\eta^{St}) + p_2(2,\eta^{St})}\,. \tag{13}$$

Postup řešení okrajové úlohy

1. Položme $k = 0$, zvolme počáteční hodnotu $\eta = \eta^k$ a přesnost ε.

2. Pro $\eta = \eta^k$ řešíme pomocí RK–metody počáteční úlohu pro 4 rovnice (1), (2), (7), (8) s podmínkami (5), (6), (9), (10).
Získáme $y_1(2,\eta^k), y_2(2,\eta^k),\ p_1(2,\eta^k), p_2(2,\eta^k)$.

3. Vypočítáme

$$\eta^{k+1} = \eta^k - \frac{y_1(2,\eta^k) + y_2(2,\eta^k) + 1}{p_1(2,\eta^k) + p_2(2,\eta^k)}\,. \tag{14}$$

Na základě hodnot η^{k+1}, η^k rozhodneme o dalším kroku algoritmu:
$|\eta^{k+1} - \eta^k| \geq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad k := k+1 \quad \Rightarrow \quad$ **2.**
$|\eta^{k+1} - \eta^k| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad$ **4.**

4. Pro $\eta = \eta^{k+1}$ řešíme pomocí RK–metody počáteční úlohu pro dvě diferenciální rovnice (1), (2) s podmínkami (5), (6).
Diskrétní přibližné hodnoty funkcí y_1, y_2 získané RK–metodou v bodech dělení $x_i,\ i = 0,\dots,N$ intervalu $\langle 0\,;2\rangle$, tj.

$$y_1(x_i,\eta^{k+1}),\ y_2(x_i,\eta^{k+1}), \quad i = 0,\dots,N$$

budou výsledným přibližným řešením dané okrajové úlohy (1) – (4).

Zpět

Příklad 8.2 Navrhněte řešení okrajové úlohy

$$y'' = \frac{1}{2}\,y - 2\,\frac{(y')^2}{y}$$

$$y(0) = 1\,, \quad y(1) = 1,5$$

metodou střelby. Řešte pomocí variačních proměnných. Napište postup řešení.

Řešení:
Diferenciální rovnici

$$y'' = \frac{1}{2}\,y - 2\frac{(y')^2}{y} \tag{15}$$

s okrajovými podmínkami

$$y(0) = 1\,, \quad y(1) = 1,5 \tag{16}$$

převedeme nejprve na soustavu diferenciálních rovnic 1. řádu

$$y_1' = y_2 \tag{17}$$

$$y_2' = \frac{1}{2}\,y_1 - 2\frac{y_2^2}{y_1} \tag{18}$$

s okrajovými podmínkami

$$y_1(0) = 1 \tag{19}$$

$$y_1(1) = 1,5\,. \tag{20}$$

přičemž pro tento převod položíme $y_1 = y$, $y_2 = y'$.

Zpět

1) Připravíme si počáteční úlohu pro soustavu diferenciálních rovnic.
K podmínce (19) zvolíme druhou počáteční podmínku $y_2(0)$ a dostaneme

$$y_1(0) = 1 \tag{21}$$

$$y_2(0) = \eta\,. \tag{22}$$

Tak získáme počáteční úlohu pro soustavu dvou diferenciálních rovnic (17), (18) s počátečními podmínkami (21), (22). Přidáme-li variační proměnné $p_1 = \dfrac{\partial y_1}{\partial \eta}$, $p_2 = \dfrac{\partial y_2}{\partial \eta}$, dostaneme další dvě diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} p_1' &= \frac{\partial y_1'}{\partial \eta} = \frac{\partial y_2}{\partial \eta} \\ p_2' &= \frac{\partial y_2'}{\partial \eta} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2}\, y_1 - 2\,\frac{y_2^2}{y_1}\right)}{\partial \eta} = \left(\frac{1}{2} + 2\,\frac{y_2^2}{y_1^2}\right)\frac{\partial y_1}{\partial \eta} - 4\,\frac{y_2}{y_1}\,\frac{\partial y_2}{\partial \eta}\,, \end{aligned}$$

tj.

$$p_1' = p_2 \tag{23}$$

$$p_2' = \left(\frac{1}{2} + 2\,\frac{y_2^2}{y_1^2}\right) p_1 - 4\,\frac{y_2}{y_1}\, p_2 \tag{24}$$

s počátečními podmínkami

$$p_1(0) = 0 \tag{25}$$

$$p_2(0) = 1\,. \tag{26}$$

Dostáváme tedy počáteční úlohu pro 4 diferenciální rovnice (17), (18), (23), (24) s počátečními podmínkami (21), (22), (25), (26).

2) Metodou Rungova–Kuttova typu (RK–metody) získáme (pro zvolené η) přibližné řešení počáteční úlohy, tj. hodnoty funkce $y_1(1,\eta), y_2(1,\eta),\ p_1(1,\eta), p_2(1,\eta)$.

Pokud neplatí okrajová podmínka (20), tj. $y_1(1,\eta) - 1,5 \neq 0$, znamená to, že je nutno opravit původní odhad η. Rovnici

$$\varphi(\eta) = 0\,, \quad \text{kde} \quad \varphi(\eta) = y_1(1,\eta) - 1,5\,. \tag{27}$$

budeme řešit Newtonovou metodou.

3) Odhad počáteční hodnoty η opravíme vypočítáním nové iterace η^{k+1} ze staré hodnoty $\eta^k = \eta$ podle vztahu

$$\eta^{k+1} = \eta^k - \frac{\varphi(\eta^k)}{\varphi'(\eta^k)}. \tag{28}$$

Dosadíme-li derivaci funkce $\varphi(\eta)$, tj.

$$\varphi'(\eta) = \frac{\partial\left(y_1(1,\eta) - 1,5\right)}{\partial\eta} = p_1(1,\eta)$$

do (28), je

$$\eta^{k+1} = \eta^{k+1} - \frac{y_1(1,\eta^k) - 1,5}{p_1(1,\eta^k)}\,. \tag{29}$$

Postup řešení okrajové úlohy

1. Položme $k = 0$, zvolme počáteční hodnotu $\eta = \eta^k$ a přesnost ε.

2. Pro $\eta = \eta^k$ řešíme pomocí RK–metody počáteční úlohu pro 4 rovnice (17), (18), (23), (24) s podmínkami (21), (22), (25), (26).
Získáme $y_1(1, \eta^k), y_2(1, \eta^k)$, $p_1(1, \eta^k), p_2(1, \eta^k)$.

3. Ze vztahu (29) vypočítáme novou aproximaci η^{k+1} .
Na základě hodnot η^{k+1}, η^k rozhodneme o dalším kroku algoritmu:
$|\eta^{k+1} - \eta^k| \geq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad k := k + 1 \quad \Rightarrow \quad$ **2.**
$|\eta^{k+1} - \eta^k| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad$ **4.**

4. Pro $\eta = \eta^{k+1}$ řešíme pomocí RK–metody počáteční úlohu pro dvě diferenciální rovnice (17), (18) s podmínkami (21), (22).
Diskrétní přibližné hodnoty funkce $y = y_1$ získané RK–metodou v bodech dělení x_i, $i = 0, \ldots, N$, intervalu $\langle 0\,; 1\rangle$, tj.

$$y_1(x_i, \eta^{k+1}), \quad i = 0, \ldots, N,$$

budou výsledným přibližným řešením dané okrajové úlohy (15) – (16).

Zpět

9. PDR - parabolického typu

- Příklad 9.1 Na množině $D = \{[x,t] : x \in \langle 0;1\rangle,\ 0 \le t \le T\}$ je dána rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

s počáteční podmínkou $u(x,0) = 5x^2$ a okrajovými podmínkami: $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 5$.
Řešte tuto úlohu metodou sítí:

a) Odvoďte explicitní formuli pro obecné h a k.

b) Zvolte prostorový krok $h = 0,2$ a časový krok $k = 0,01$. Napište maticový zápis formule. Ověřte, že je při této volbě explicitní metoda stabilní. Konkrétně pro $f(x,t) = x$, $x \in \langle 0;1\rangle$ vypočítejte přibližně hodnoty funkce $u(x,t)$ v uzlových bodech sítě první a druhé časové vrstvy.

- Příklad 9.2 Na množině $D = \{[x,t] : x \in \langle 0;1\rangle,\ 0 \le t \le T\}$ je dána rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

s počáteční podmínkou $u(x,0) = 5x^2$ a okrajovými podmínkami: $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 5$.

a) Odvoďte jednoduchou implicitní formuli pro obecné h a k. Soustavu zapište v maticovém tvaru - konkrétní matici napište až v bodu b).

b) Zvolte prostorový krok $h = 0,2$ a časový krok $k = 0,2$. Pro tuto volbu a pro $f(x,t) = x$, $x \in \langle 0;1\rangle$, sestavte soustavu diferenčních rovnic pro výpočet první časové vrstvy pomocí implicitního schématu. Soustavu zapište v maticovém tvaru.

- Příklad 9.3 Na množině $D = \{[x, t] : x \in \langle -1; 1\rangle,\ 0 \le t \le T\}$ je dána PDR:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

s počáteční podmínkou $u(x, 0) = 2x + 2$ a okrajovými podmínkami: $u(-1, t) = 0\,,\ u(1, t) = 4 - t\,.$

a) Řešte tuto úlohu metodou sítí. Odvoďte Cranka–Nicolsonové formuli.

b) Zvolte prostorový krok $h = 0,5$. Pro j obecné zapište soustavu v maticovém tvaru. Pro časový krok $k = 0,2$ sestavte soustavu diferenčních rovnic pro výpočet první časové vrstvy pomocí schématu Cranka–Nicolsonové. Předpokládejte, že $f(x, t) = 10x + t$, pro $x \in \langle -1; 1\rangle$, $t \in \langle 0; 0,2\rangle$.

- Příklad 9.4 Na množině $D = \{[x, t] : x \in \langle 0; 2\rangle \times \langle 0; T\rangle$ je dána PDR:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u)$$

s počáteční podmínkou $u(x, 0) = x(2 - x)$ a okrajovými podmínkami $u(0, t) = 20\,t\,,\ u(2, t) = 0\,.$

a) Řešte tuto úlohu metodou sítí. Odvoďte jednoduchou implicitní formuli s jednoduchou linearizací.

b) Zvolte prostorový krok $h = 0,5$ a časový krok $k = 0,25$. Pro tuto volbu sestavte soustavu diferenčních rovnic pro výpočet první časové vrstvy pomocí jednoduchého implicitního schématu. Soustavu zapište v maticovém tvaru.

Obsah

- Příklad 9.5 Na množině $D = \{[x,t] : x \in \langle 0;1\rangle,\ t \geq 0\}$ je dána PDR:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} - x\mathrm{e}^{-t}$$

s počáteční podmínkou

$$u(x,0) \;=\; 1$$

a okrajovými podmínkami $u(0,t) = 1\,,\ u(1,t) - \dfrac{1}{t+1}\dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 1\,.$

a) Řešte tuto úlohu metodou sítí. Odvoďte jednoduchou implicitní formuli pro obecné kroky h a k.

b) Zvolte prostorový krok $h = 0,25$ a časový krok $k = 0,25$. Pro tuto volbu zapište soustavu diferenčních rovnic v maticovém tvaru.

- Příklad 9.6 Na množině $D = \{[x,t] : x \in \langle 0;1\rangle,\ t \geq 0\}$ je dána PDR:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2\,u$$

s počáteční podmínkou

$$u(x,0) \;=\; x$$

a okrajovými podmínkami $u(0,t) = 0\,,\ u(1,t) = 1\,.$

a) Řešte tuto úlohu metodou přímek pro obecný prostorový krok h.

b) Metodou přímek vypočtete řešení pro $h = 0,5$.

Cvičení:

- Cvičení 9.1

  Na množině $D = \{[x,t] : x \in \langle 0;1\rangle,\ t \geq 0\}$ je dána rovnice vedení tepla

  $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

  s počáteční podmínkou: $u(x,0) \;=\; x^2+1$ a okrajovými podmínkami: $u(0,t) = 1\,,\ u(1,t) = 2\,.$

  a) Řešte tuto úlohu za použití explicitní formule metodou sítí pro obecné h a k.

  b) Pro zadaný prostorový krok $h = 0,2$ zvolte co největší časový krok k, aby explicitní metoda byla ještě stabilní. Pro $f(x,t) = x\,\mathrm{e}^{-t}$, $x \in \langle 0;1\rangle$, $t \geq 0$, vypočítejte přibližně hodnotu funkce $u(x,t)$ v bodě $[0,8;0,04]$

- Cvičení 9.2

  Na množině $D = \{[x,t] : x \in \langle 0;1\rangle,\ 0 \leq t \leq T\}$ je dána PDR:

  $$\frac{\partial u}{\partial t} = x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

  s počáteční podmínkou: $u(x,0) \;=\; 4x$ a okrajovými podmínkami: $u(0,t) = 0\,,\ u(1,t) = 4\,.$

  a) Řešte tuto úlohu metodou sítí. Odvoďte Cranka–Nicolsonové formuli pro obecné h a k.

  b) Zvolte prostorový krok $h = 0,25$ a časový krok $k = 0,2$. Pro tuto volbu sestavte soustavu diferenčních rovnic pomocí schématu Cranka–Nicolsonové. Soustavu zapište v maticovém tvaru. Předpokládejte, že $f(x,t) = 10\,x$ pro $x \in \langle 0;1\rangle$, $t \in \langle 0;0,2\rangle$. Vypočítejte první časovou vrstvu.

Příklad 9.1 Na množině $D = \{[x,t] : x \in \langle 0;1\rangle,\ 0 \le t \le T\}$ je dána rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

s počáteční podmínkou $u(x,0) = 5x^2$ a okrajovými podmínkami: $u(0,t) = 0\,,\ u(1,t) = 5\,.$
Řešte tuto úlohu metodou sítí:

a) Odvoďte explicitní formuli pro obecné h a k.

b) Zvolte prostorový krok $h = 0,2$ a časový krok $k = 0,01$. Napište maticový zápis formule. Ověřte, že je při této volbě explicitní metoda stabilní. Konkrétně pro $f(x,t) = x$, $x \in \langle 0;1\rangle$ vypočítejte přibližně hodnoty funkce $u(x,t)$ v uzlových bodech sítě první a druhé časové vrstvy.

Výsledek:

a) Explicitní schéma pro danou úlohu je:

$$\boxed{\begin{aligned} & u_i^{j+1} = \frac{k}{h^2}(u_{i-1}^j + u_{i+1}^j) + \left(1 - \frac{2k}{h^2}\right) u_i^j + k\, f(x_i,t_j)\,, \quad i = 1,\dots,n-1\,, \\ & u_0^j = 0\,,\ u_n^j = 5\,. \end{aligned}}$$

Explicitní schéma počítáme pro $j = 0,1,\dots,m-1$. 0-tou vrstvu známe z počátečních podmínek

$$u_i^0 = 5(ih)^2\,,\ i = 0,\dots,n$$

b) Diferenční schéma je stabilní, protože $\alpha = \frac{k}{h^2} = \frac{1}{4}$. Maticové vyjádření explicitního schématu pro $m = 2$:

$$\mathbf{u}^{j+1} = A\mathbf{u}^j + k\,\mathbf{f}^j + \mathbf{v}^j, \quad j = 0,1,2,$$

Řešení Zpět

Pokračování výsledku:
kde $\mathbf{u}^{j+1} = \left(u_1^{j+1}, \ldots, u_4^{j+1}\right)^\top$ je hledaný vektor v další časové vrstvě,

$$A = \begin{bmatrix} (1-2\alpha) & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & (1-2\alpha) & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & (1-2\alpha) & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & (1-2\alpha) \end{bmatrix},$$

a $\boldsymbol{f}^j = \left(f_1^j, \ldots, f_4^j\right)^\top$ a $\boldsymbol{v}^j = \left(\alpha\, u_0^j, 0, 0, \alpha\, u_5^j\right)^\top$.
Řešení dvou časových vrstev:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^1 &= \left(u_1^1, \ldots, u_4^1\right)^\top = (0,302; 0,904; 1,906; 3,308)^\top, \\ \boldsymbol{u}^2 &= \left(u_1^2, \ldots, u_4^2\right)^\top = (0,379; 1,008; 2,012; 3,3885)^\top. \end{aligned}$$

Řešení Zpět

Příklad 9.2 Na množině $D = \{[x,t] : x \in \langle 0;1\rangle,\ 0 \le t \le T\}$ je dána rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

s počáteční podmínkou $u(x,0) = 5x^2$ a okrajovými podmínkami: $u(0,t) = 0\,,\ u(1,t) = 5\,.$

a) Odvoďte jednoduchou implicitní formuli pro obecné h a k. Soustavu zapište v maticovém tvaru - konkrétní matici napište až v bodu b).

b) Zvolte prostorový krok $h = 0,2$ a časový krok $k = 0,2$. Pro tuto volbu a pro $f(x,t) = x$, $x \in \langle 0;1\rangle$, sestavte soustavu diferenčních rovnic pro výpočet první časové vrstvy pomocí implicitního schématu. Soustavu zapište v maticovém tvaru.

Výsledek:

a) Výsledná implicitní formule pro výpočet hledaných hodnot v $(j+1)$-ním časovém kroku pro $j = 0,1,\dots,m-1$:

$$\boxed{\begin{aligned} &-\alpha\, u_{i-1}^{j+1} + (1+2\alpha)u_i^{j+1} - \alpha u_{i+1}^{j+1} = u_i^j + k\, f_i^{j+1}, \quad i = 1,\dots,n-1\,,\\ &u_0^j = 0\,,\ u_n^j = 5\,,\ u_i^0 = 0,2i^2\,,\end{aligned}}$$

což je soustava $n-1$ rovnic o $n-1$ neznámých, kterou můžeme zapsat:

$$A\boldsymbol{u}^{j+1} = \boldsymbol{u}^j + k\,\boldsymbol{f}^{j+1} + \boldsymbol{v}^{j+1}, \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{f}^{j+1} = \left(f_1^{j+1},\dots,f_{n-1}^{j+1}\right)^\top$, $\boldsymbol{v}^{j+1} = \left(\alpha u_0^{j+1}, 0,\dots,0,\alpha u_n^{j+1}\right)^\top$ jsou známé vektory a $\boldsymbol{u}^{j+1} = \left(u_1^{j+1},\dots,u_{n-1}^{j+1}\right)^\top$ je hledaný vektor v další časové vrstvě.

Řešení Zpět

Pokračování výsledku:

b) Při známých hodnotách $\boldsymbol{u}^0$ v 0-té časové vrstvě bude vektor $\boldsymbol{u}^1$ řešit konkrétní soustavu lineárních algebraických rovnic s třídiagonální maticí:

$$\begin{bmatrix} 11 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 11 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 11 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,24 \\ 0,88 \\ 1,92 \\ 28,36 \end{bmatrix}.$$

Pro úplnost uvádíme vektor řešení ze software Maple:
$\boldsymbol{u}^1 = (0,7563947664; 1,616068486; 2,622955904; 3,770434502)^\top$

Řešení Zpět

Příklad 9.3 Na množině $D = \{[x,t] : x \in \langle -1; 1\rangle,\ 0 \le t \le T\}$ je dána PDR:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

s počáteční podmínkou $u(x,0) = 2x + 2$ a okrajovými podmínkami: $u(-1,t) = 0\,,\ u(1,t) = 4 - t\,.$

a) Řešte tuto úlohu metodou sítí. Odvoďte Cranka–Nicolsonové formuli.

b) Zvolte prostorový krok $h = 0,5$. Pro j obecné zapište soustavu v maticovém tvaru. Pro časový krok $k = 0,2$ sestavte soustavu diferenčních rovnic pro výpočet první časové vrstvy pomocí schématu Cranka–Nicolsonové. Předpokládejte, že $f(x,t) = 10x + t$, pro $x \in \langle -1; 1\rangle$, $t \in \langle 0; 0,2\rangle$.

Výsledek:

a) Diferenční schéma pro danou úlohu je

$$\boxed{-\frac{\alpha}{2}u_{i-1}^{j+1} + (1+\alpha)u_i^{j+1} - \frac{\alpha}{2}u_{i+1}^{j+1} = \frac{\alpha}{2}u_{i-1}^{j} + (1-\alpha)u_i^{j} + \frac{\alpha}{2}u_{i+1}^{j} + k\frac{f_i^{j+1} + f_i^j}{2},\ \text{pro } i = 1\ldots,n-1 \text{ a } j = 1,\ldots,m-1,}$$

kde $u_i^j \cong u(x_i, t_j)$ a kde jsme použili označení $f(x_i,t_j) = f_i^j$, $\alpha = \frac{k}{h^2}$.

b) Pro $n = 4$ a j obecné zapíšeme soustavu maticově:

$$A\boldsymbol{u}^{j+1} = B\boldsymbol{u}^j + k\,\frac{\boldsymbol{f}^{j+1} + \boldsymbol{f}^j}{2} + \boldsymbol{v}^{j+1}, \tag{2}$$

kde $\boldsymbol{u}^{j+1} = \left(u_1^{j+1}, u_2^{j+1}, u_3^{j+1}\right)^\top$ je hledaný vektor v další časové vrstvě,

Řešení Zpět

Pokračování výsledku:

$$A = \begin{bmatrix} (1+\alpha) & -\frac{\alpha}{2} & 0 \\ -\frac{\alpha}{2} & (1+\alpha) & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & -\frac{\alpha}{2} & (1+\alpha) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} (1-\alpha) & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & (1-\alpha) & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & (1-\alpha) \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{u}^j = \left(u_1^j, u_2^j, u_3^j\right)^\top$, $\boldsymbol{f}^{j+1} = \left(f_1^{j+1}, f_2^{j+1}, f_3^{j+1}\right)^\top$, $\boldsymbol{f}^j = \left(f_1^j, f_2^j, f_3^j\right)^\top$.
Vektor $\boldsymbol{u}^1$ je řešením konkrétní soustavy lineárních algebraických rovnic s třídiagonální maticí:

$$\begin{bmatrix} 1,8 & -0,4 & 0 \\ -0,4 & 1,8 & -0,4 \\ 0 & -0,4 & 1,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,02 \\ 2,02 \\ 5,54 \end{bmatrix}.$$

Pro úplnost uvádíme vektor řešení soustavy v software Maple:
$\boldsymbol{u}^1 = (0,4570776255; 2,006849315; 3,523744292]^\top$

Příklad 9.4 Na množině $D = \{[x,t] : x \in \langle 0;2\rangle \times \langle 0;T\rangle$ je dána PDR:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u)$$

s počáteční podmínkou $u(x,0) = x(2-x)$ a okrajovými podmínkami $u(0,t) = 20\,t$, $u(2,t) = 0$.

a) Řešte tuto úlohu metodou sítí. Odvoďte jednoduchou implicitní formuli s jednoduchou linearizací.

b) Zvolte prostorový krok $h = 0,5$ a časový krok $k = 0,25$. Pro tuto volbu sestavte soustavu diferenčních rovnic pro výpočet první časové vrstvy pomocí jednoduchého implicitního schématu. Soustavu zapište v maticovém tvaru.

Výsledek:

a) Diferenční schéma pro danou úlohu je

$$\boxed{-\alpha\, u_{i-1}^{j+1} + (1 + 2\alpha + k(u_i^j - 1))u_i^{j+1} - \alpha u_{i+1}^{j+1} = u_i^j, \quad i = 1,\dots,n-1\,.}$$

kde $u_i^j \cong u(x_i, t_j)$, $\alpha = \frac{k}{h^2}$.

b) Pro $n = 4$ a j obecné zapíšeme soustavu maticově:

$$A^j \boldsymbol{u}^{j+1} = \boldsymbol{u}^j + \boldsymbol{v}^{j+1}, \tag{3}$$

kde $\boldsymbol{u}^{j+1} = \left(u_1^{j+1}, u_2^{j+1}, u_3^{j+1}\right)^\top$ je hledaný vektor v další časové vrstvě.

Řešení Zpět

Pokračování výsledku:
Matice A^j má pro $n = 4$ tvar

$$A^j = \begin{bmatrix} 1 + 2\alpha + k(u_1^j - 1) & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 1 + 2\alpha + k(u_2^j - 1) & -\alpha \\ 0 & -\alpha & 1 + 2\alpha + k(u_3^j - 1) \end{bmatrix},$$

a vektor je $\boldsymbol{v}^{j+1} = \left(\alpha\, u_0^{j+1},\, 0,\, \alpha\, u_4^{j+1}\right)^\top$.
Při známých hodnotách $\boldsymbol{u}^0$ v 0-té časové vrstvě bude vektor $\boldsymbol{u}^1$ řešit konkrétní soustavu lineárních algebraických rovnic s třídiagonální maticí:

$$\begin{bmatrix} 2,9375 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2,9375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,75 \\ 1 \\ 0,75 \end{bmatrix}.$$

Pro úplnost uvádíme vektor řešení v software Maple:
$\boldsymbol{u}^1 = (3,529299848; 1,506849315; 0,7515220700)^\top$

Příklad 9.5 Na množině $D = \{[x,t] : x \in \langle 0;1\rangle,\ t \geq 0\}$ je dána PDR:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} - x\mathrm{e}^{-t}$$

s počáteční podmínkou

$$u(x,0) \;=\; 1$$

a okrajovými podmínkami $u(0,t) = 1\,,\ u(1,t) - \dfrac{1}{t+1}\dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 1\,.$

a) Řešte tuto úlohu metodou sítí. Odvoďte jednoduchou implicitní formuli pro obecné kroky h a k.

b) Zvolte prostorový krok $h = 0,25$ a časový krok $k = 0,25$. Pro tuto volbu zapište soustavu diferenčních rovnic v maticovém tvaru.

Výsledek:

a) Označme $u_i^j \cong u(x_i, t_j)$, diferenční schéma pro danou úlohu je

$$\boxed{\begin{gathered} -\left(\alpha - \frac{ki}{2}\right) u_{i-1}^{j+1} + (1+2\alpha)u_i^{j+1} - \left(\alpha + \frac{ki}{2}\right) u_{i+1}^{j+1} = u_i^j + k\,hi\mathrm{e}^{-(j+1)k}, \quad i = 1,\ldots,n-1\,, \\ u_n^{j+1} - \beta u_{n-2}^{j+1} + 4\beta u_{n-1}^{j+1} = \gamma, \end{gathered}}$$

kde $\alpha = \frac{k}{h^2}$, $\beta = \frac{1}{(1+(j+1)k)2h-3}\,,\ \gamma = \beta(1+(j+1)k)2h\,.$

Řešení Zpět

Pokračování výsledku:

b) Maticový zapis soustavy je

$$A\boldsymbol{u}^{j+1} = \boldsymbol{u}^{j} + k\,\boldsymbol{f}^{j+1} + \boldsymbol{v}^{j+1}, \tag{4}$$

kde pro $n = 4$ je $\boldsymbol{u}^{j+1} = \left(u_1^{j+1}, u_2^{j+1}, u_3^{j+1}, u_4^{j+1}\right)^\top$ hledaný vektor v další časové vrstvě, $\boldsymbol{u}^{j} = \left(u_1^{j}, u_2^{j}, u_3^{j}, u_4^{j}\right)^\top$ je známý již vypočítaný vektor,

$$A = \begin{bmatrix} (1+2\alpha) & -(\alpha+\frac{k}{2}) & 0 & 0 \\ -(\alpha-k) & (1+2\alpha) & -(\alpha+k) & 0 \\ 0 & -(\alpha-\frac{k3}{2}) & (1+2\alpha) & -(\alpha+\frac{k3}{2}) \\ 0 & \beta & 4\beta & 1 \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{f}^{j+1} = \left(h\,\mathrm{e}^{-k(j+1)}, 2\,h\,\mathrm{e}^{-k(j+1)}, 3\,h\,\mathrm{e}^{-k(j+1)}, 0\right)^\top$ a $\boldsymbol{v}^{j+1} = \left((\alpha-\frac{k}{2})u_0^{j+1}, 0, 0, 0\right)^\top$ jsou známé vektory. Počáteční vektor $\boldsymbol{u}^0$, který dostaneme z počátní podmínky je $\boldsymbol{u}^0 = (u_1^0, u_2^0, u_4^0, \gamma)^\top = (1; 1; 1; -0,2631578)^\top$.

Řešení Zpět

Příklad 9.6 Na množině $D = \{[x,t] : x \in \langle 0;1\rangle,\ t \geq 0\}$ je dána PDR:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2\,u$$

s počáteční podmínkou

$$u(x,0) \;=\; x$$

a okrajovými podmínkami $u(0,t) = 0\,,\ u(1,t) = 1\,.$

a) Řešte tuto úlohu metodou přímek pro obecný prostorový krok h.

b) Metodou přímek vypočtete řešení pro $h = 0,5$.

Výsledek:

a) Na intervalu $\langle 0,1\rangle$ vytvoříme síť

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\,, \qquad x_{i+1} = x_i + h\,, i = 0,\ldots,n\,, \qquad n = \frac{1}{h}.$$

Označme v každém bodě x_i přibližnou funkci $u_i(t) \cong u(x_i,t)$ pro $t \in \langle 0,T\rangle$. Po náhradě derivace diferencí dostaneme soustavu $n-1$ ODR s $n-1$ počátečními podmínkami:

$u_i'(t) = \alpha u_{i-1}(t) + \beta u_i(t) + \gamma u_{i+1}(t), \quad t \in \langle 0,T\rangle,$
kde $u_0(t) = 0,\ u_n(t) = 1,\ \alpha = \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right),\ \beta = \left(2 - \frac{2}{h^2}\right),\ \gamma = \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right),$
a $u_i(0) = i\,h$ pro $i = 1,\ldots,n-1.$

Tuto soustavu můžeme pro obecné n řešit některou z Runge-Kuttových metod.

Řešení Zpět

Pokračování výsledku:

b) Pro $h = 0,5$, tj. $n = 2$ dostaneme jednu obyčejnou diferenciální rovnici

$$u_1'(t) = -6u_1(t) + 5, \quad \text{pro } t \in \langle 0, T\rangle$$
kde $u_1(0) = 0,5$

Tuto ODR můžeme vyřešit analyticky. Partikulární řešení naší ODR s danou počáteční podmínkou je

$$u_1(t) = \frac{-2\mathrm{e}^{-6t} + 5}{6}.$$

Řešení Zpět

Cvičení 9.1

Na množině $D = \{[x,t] : x \in \langle 0;1\rangle,\ t \geq 0\}$ je dána rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

s počáteční podmínkou: $u(x,0) \;=\; x^2+1$ a okrajovými podmínkami: $u(0,t)=1\,,\ u(1,t)=2\,.$

a) Řešte tuto úlohu za použití explicitní formule metodou sítí pro obecné h a k.

b) Pro zadaný prostorový krok $h=0,2$ zvolte co největší časový krok k, aby explicitní metoda byla ještě stabilní. Pro $f(x,t) = x\,\mathrm{e}^{-t}$, $x \in \langle 0;1\rangle$, $t \geq 0\,$, vypočítejte přibližně hodnotu funkce $u(x,t)$ v bodě $[0,8;0,04]$

Výsledek:

a) Označme $\alpha = \frac{k}{h^2}$. Explicitní schéma pro danou úlohu je:

$$\boxed{\begin{aligned} &u_i^{j+1} = \alpha(u_{i-1}^j + u_{i+1}^j) + (1-2\alpha)\,u_i^j + k\,f(x_i,t_j)\,, \quad i=1,\ldots,n-1\,,\\ &u_0^j = 1\,,\ u_n^j = 2\,.\end{aligned}}$$

Explicitní schéma počítáme pro $j=0,1,\ldots,m-1$. 0-tou vrstvu známe z počátečních podmínek

$$u_i^0 = (ih)^2+1\,,\ i=0,\ldots,n$$

b) Aby bylo schéma stabilní, musíme zvolit $k \leq 0,02$, zvolíme tedy $k=0,02$.
Protože máme vypočítat hodnotu $u(0,08;0,04)$, musíme zvolit $m=2$, budeme tedy počítat dvě časové vrstvy.
Ze zadání $h=0,2$ plyne $n=5$.

Zpět

Pokračování výsledku:
Označíme-li $\boldsymbol{u}^j = (u_0^j, u_1^j, u_2^j, u_3^j, u_4^j, u_5^j)$, dostaneme:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}^0 &= (1; 1,04; 1,16; 1,36; 1,64; 2) \\
\boldsymbol{u}^1 &= (1; 1,084; 1,208; 1,412; 1,696; 2) \\
\boldsymbol{u}^2 &= (1; 1,10792; 1,25584; 1,46376; 1,72168; 2)
\end{aligned}$$

Tedy $u(0,08; 0,04) \doteq u_4^2 = 1,72168.$

Zpět

Cvičení 9.2

Na množině $D = \{[x,t] : x \in \langle 0;1\rangle,\ 0 \le t \le T\}$ je dána PDR:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

s počáteční podmínkou: $u(x,0) = 4x$ a okrajovými podmínkami: $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 4$.

a) Řešte tuto úlohu metodou sítí. Odvoďte Cranka–Nicolsonové formuli pro obecné h a k.

b) Zvolte prostorový krok $h = 0,25$ a časový krok $k = 0,2$. Pro tuto volbu sestavte soustavu diferenčních rovnic pomocí schématu Cranka–Nicolsonové. Soustavu zapište v maticovém tvaru. Předpokládejte, že $f(x,t) = 10\,x$ pro $x \in \langle 0;1\rangle$, $t \in \langle 0;0,2\rangle$. Vypočítejte první časovou vrstvu.

Výsledek:

a) Označme $n = \frac{1}{h}$, $m = \frac{T}{k}$ a $\beta = \frac{k}{h}$. Diferenční schéma pro danou úlohu je

$$\boxed{-i\frac{\beta}{2}u_{i-1}^{j+1} + (1+i\beta)u_i^{j+1} - i\frac{\beta}{2}u_{i+1}^{j+1} = i\frac{\beta}{2}u_{i-1}^{j} + (1-i\beta)u_i^{j} + i\frac{\beta}{2}u_{i+1}^{j} + k\frac{f_i^{j+1}+f_i^{j}}{2}, \text{ pro } i = 1\ldots,n-1 \text{ a } j = 0,\ldots,m-1,}$$

kde $u_i^j \cong u(x_i,t_j)$ a kde jsme použili označení $f(x_i,t_j) = f_i^j$.

b) Pro $n = 4$ a j obecné zapíšeme soustavu maticově:

$$A\boldsymbol{u}^{j+1} = B\boldsymbol{u}^j + k\,\frac{\boldsymbol{f}^{j+1}+\boldsymbol{f}^j}{2} + \boldsymbol{v}^j, \tag{5}$$

kde $\boldsymbol{u}^{j+1} = \left(u_1^{j+1}, u_2^{j+1}, u_3^{j+1}\right)^\top$ je hledaný vektor v další časové vrstvě,

Zpět

Pokračování výsledku:

$$A = \begin{bmatrix} (1+\beta) & -\frac{\beta}{2} & 0 \\ -\beta & (1+2\beta) & -\beta \\ 0 & -3\frac{\beta}{2} & (1+3\beta) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} (1-\beta) & \frac{\beta}{2} & 0 \\ \beta & (1-2\beta) & \beta \\ 0 & 3\frac{\beta}{2} & (1-3\beta) \end{bmatrix},$$

kde $\beta = 0,8$ a $\boldsymbol{u}^j = \left(u_1^j, u_2^j, u_3^j\right)^\top$, $\boldsymbol{f}^{j+1} = \left(f_1^{j+1}, f_2^{j+1}, f_3^{j+1}\right)^\top = (2,5; 0,5; 7,5)^\top$, $\forall j = 0, \dots m-1$, $\boldsymbol{v}^j = (0; 0; 9,6)^\top$, $\forall j = 0, \dots m-1$.
Z počátečních podmínek dostaneme: $\boldsymbol{u}^0 = (1; 2; 3)^\top$
Vektor $\boldsymbol{u}^1$ je řešením konkrétní soustavy lineárních algebraických rovnic s třídiagonální maticí:

$$\begin{bmatrix} 1,8 & -0,4 & 0 \\ -0,8 & 2,6 & -0,8 \\ 0 & -1,2 & 3,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 3,0 \\ 9,3 \end{bmatrix}.$$

Pro úplnost uvádíme vektor řešení soustavy v software Maple:
$\boldsymbol{u}^1 = (1,44136; 2,7361; 3,70098)^\top$

Zpět

Příklad 9.1 Na množině $D = \{[x,t] : x \in \langle 0;1\rangle,\ 0 \le t \le T\}$ je dána rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

s počáteční podmínkou $u(x,0) = 5x^2$ a okrajovými podmínkami: $u(0,t) = 0\,,\ u(1,t) = 5\,.$
Řešte tuto úlohu metodou sítí:

a) Odvoďte explicitní formuli pro obecné h a k.

b) Zvolte prostorový krok $h = 0,2$ a časový krok $k = 0,01$. Napište maticový zápis formule. Ověřte, že je při této volbě explicitní metoda stabilní. Konkrétně pro $f(x,t) = x$, $x \in \langle 0;1\rangle$ vypočítejte přibližně hodnoty funkce $u(x,t)$ v uzlových bodech sítě první a druhé časové vrstvy.

Řešení:

a) Rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{6}$$

je lineární PDR parabolického typu. Nejdříve si ověříme kompatibilitu zadané počáteční podmínky s okrajovými podmínkami. Zřejmě jsou okrajové a počáteční podmínky v souhlasu, neboť:
$u(x,0) = 0 = u(0,t)$ v bodě $[0,0]$ a $u(x,0) = 5 = u(1,t)$ v bodě $[1,0]$.
Vytvoříme síť $D^{h,k}$ množiny D s uzly $[x_i, t_j]$, kde

$$\begin{aligned}
0 &= x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\,, \qquad & x_{i+1} = x_i + h\,, i = 0,\ldots,n\,, \qquad & n = \tfrac{1}{h}\\
0 &= t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T\,, \qquad & t_{j+1} = t_j + k\,, j = 0,\ldots,m\,, \qquad & m = \tfrac{T}{k}.
\end{aligned}$$

Přibližnou hodnotu řešení v uzlu $[x_i, t_j]$ budeme značit u_i^j, tedy

$$u_i^j \cong u(x_i, t_j)\,, \quad i = 0,\ldots,n\,,\ j = 0,1,2,\ldots.$$

Zpět

Z okrajových podmínek a z počáteční podmínky plyne:

$$u_0^j = 0\,,\ u_n^j = 5\,,\ j = 0, 1, \dots, m \qquad \text{a} \qquad u_i^0 = 5(ih)^2\,,\ i = 0, \dots, n\,.$$

Tyto přesné hodnoty použijeme pro výpočet přibližných hodnot řešení u_i^j ve vnitřních uzlech $[x_i, t_j]$, $i = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, m-1\,.$

Nahradíme-li v rovnici (6) hodnoty derivací $\dfrac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t}$, resp. $\dfrac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2}$ diferenčními podíly:

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k}\,, \qquad \text{resp.} \qquad \frac{u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)}{h^2}$$

s přesností $O(k)$, resp. $O(h^2)$, dostaneme ve vnitřních bodech $[x_i, t_j]$, $i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, m-1$ při zanedbání hodnot $O(k) + O(h^2)$ přibližné diferenční rovnice:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} + f(x_i, t_j)\,,\ i = 1, \dots, n-1,\ j = 0, 1, \dots, m-1\,.$$

Rovnice spolu s náhradou okrajových podmínek upravíme na explicitní schéma pro výpočet přibližných hodnot řešení

$$\boxed{\begin{aligned} &u_i^{j+1} = \frac{k}{h^2}(u_{i-1}^j + u_{i+1}^j) + \left(1 - \frac{2k}{h^2}\right) u_i^j + k\, f(x_i, t_j)\,, \quad i = 1, \dots, n-1\,, \\ &u_0^j = 0\,,\ u_n^j = 5\,. \end{aligned}}$$

Explicitní schéma počítáme pro $j = 0, 1, \dots, m-1$. 0-tou vrstvu známe z počátečních podmínek

$$u_i^0 = 5(ih)^2\,,\ i = 1, \dots, n-1.$$

b) Podmínka stability pro volbu $h = 0,2$ a časový krok $k = 0,01$:

$$\alpha = \frac{k}{h^2} = \frac{0,01}{0,04} = 0,25 \le \frac{1}{2}\,.$$

zaručuje omezení vlivu zaokrouhlovacích chyb u explicitní metody.
Počet bodů sítě určuje $h = 0,2$, tj. $n = \frac{1}{h} = 5$.
Označíme-li $f(x_i, t_j) = f_i^j$, dostáváme pro $j = 0, 1 \dots m-1$ explicitní schéma

$$\boxed{\begin{aligned} & u_i^{j+1} = \alpha(u_{i-1}^j + u_{i+1}^j) + (1-2\alpha)\, u_i^j + k\, f_i^j\,, \quad i = 1, \dots, 4, \\ & u_0^j = 0\,,\ u_5^j = 5. \end{aligned}} \tag{7}$$

0-tou vrstvu známe z počátečních podmínek

$$u_i^0 = u(x_i, 0) = 5\, x_i^2 = 5(0,2\, i)^2 = 0,2\, i^2, \quad i = 0, \dots, 5\,, \tag{8}$$

Explicitní lineární algebraické vztahy (7) lze také vyjádřit maticově

$$\boldsymbol{u}^{j+1} = A\boldsymbol{u}^j + k\,\boldsymbol{f}^j + \boldsymbol{v}^j, \tag{9}$$

kde $\boldsymbol{u}^{j+1} = \left(u_1^{j+1}, \dots, u_4^{j+1}\right)^\top$ je hledaný vektor v další časové vrstvě,

$$A = \begin{bmatrix} (1-2\alpha) & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & (1-2\alpha) & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & (1-2\alpha) & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & (1-2\alpha) \end{bmatrix},$$

a $\boldsymbol{f}^j = \left(f_1^j, \dots, f_4^j\right)^\top$ a $\boldsymbol{v}^j = \left(\alpha\, u_0^j, 0, 0, \alpha\, u_5^j\right)^\top$.

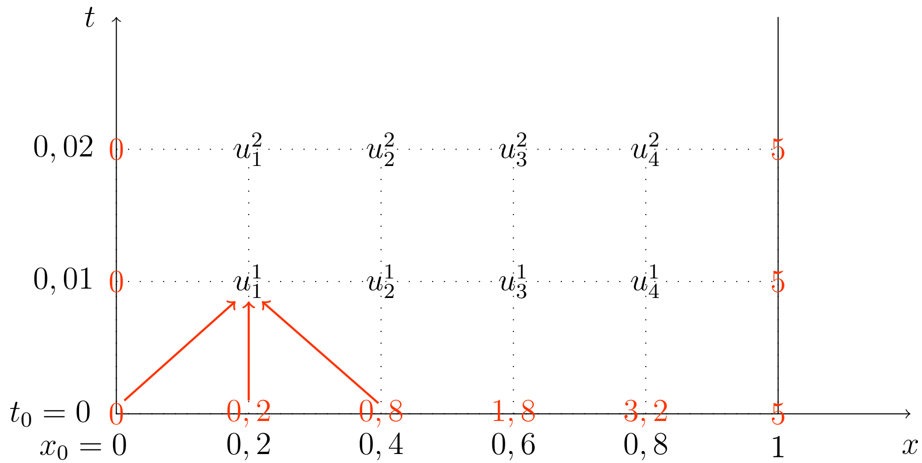
Máme počítat dvě časové vrstvy, tj. $m = 2$. Pro "ruční" výpočet je vhodné použít přímo vztah (7). Z počáteční podmínky známe hodnoty ve výchozí, tj. 0-té časové vrstvě (na obr. znázorněno červeně) $\boldsymbol{u}^0 = (u_1^0, \ldots, u_4^0)^\top = (0,2; 0,8; 1,8; 3,2)^\top$. Z okrajových podmínek dostáváme přímo (na obr. znázorněno červeně)

$$u_0^j = u(0, t_j) = 0, \quad u_n^j = u(5, t_j) = 5, \quad j = 1, 2\,. \tag{10}$$

Jelikož $\alpha = 0,25$, $(1 - 2\alpha) = 0,5$ a $kf_i^j = 0,01\,(0,2\,i) = 0,002\,i$, $i = 1,2,3,4\,,\ j = 0, \ldots m$, počítáme u_i^j konkrétně ze vztahů

$$u_i^{j+1} = \frac{1}{4}(u_{i-1}^j + u_{i+1}^j) + \frac{1}{2}u_i^j + 0,002\,i\,, \quad i = 1, \ldots, 4\,,\ j = 0, 1\,.$$

podle schématu (na obr. znázorněno červeně).

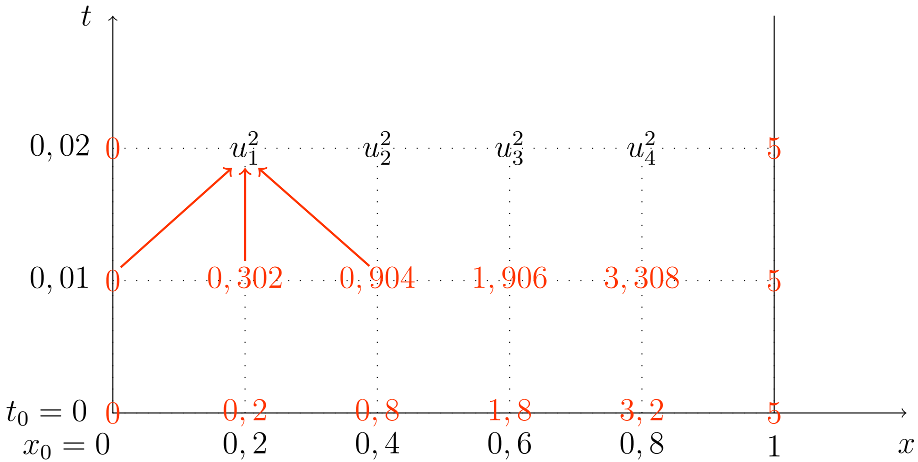


Tedy

$$
\begin{aligned}
u_1^1 &= \frac{1}{4}(u_0^0 + u_2^0) + \frac{1}{2}u_1^0 + 0,002 = \frac{1}{4}(0,0 + 0,8) + \frac{1}{2}0,2 + 0,002 = 0,302\,,\\
u_2^1 &= \frac{1}{4}(u_1^0 + u_3^0) + \frac{1}{2}u_2^0 + 0,004 = \frac{1}{4}(0,2 + 1,8) + \frac{1}{2}0,8 + 0,004 = 0,904\,,\\
u_3^1 &= \frac{1}{4}(u_2^0 + u_4^0) + \frac{1}{2}u_3^0 + 0,006 = \frac{1}{4}(0,8 + 3,2) + \frac{1}{2}1,8 + 0,006 = 1,906\,,\\
u_4^1 &= \frac{1}{4}(u_3^0 + u_5^0) + \frac{1}{2}u_4^0 + 0,008 = \frac{1}{4}(1,8 + 5,0) + \frac{1}{2}3,2 + 0,008 = 3,308\,,
\end{aligned}
$$

tj. $\boldsymbol{f}u^1 = (u_1^1, \ldots, u_4^1)^\top = (0,302; 0,904; 1,906; 3,308)^\top$.

Pro výpočet 2. časové vrstvy budeme postupovat obdobně.



Zpět

$$
\begin{aligned}
u_1^2 &= \frac{1}{4}(u_0^1 + u_2^1) + \frac{1}{2}u_1^1 + 0,002 = \frac{1}{4}(0,000 + 0,904) + \frac{1}{2}0,302 + 0,002 = 0,379\,,\\
u_2^2 &= \frac{1}{4}(u_1^1 + u_3^1) + \frac{1}{2}u_2^1 + 0,004 = \frac{1}{4}(0,302 + 1,906) + \frac{1}{2}0,904 + 0,004 = 1,008\,,\\
u_3^2 &= \frac{1}{4}(u_2^1 + u_4^1) + \frac{1}{2}u_3^1 + 0,006 = \frac{1}{4}(0,904 + 3,308) + \frac{1}{2}1,906 + 0,006 = 2,012\,,\\
u_4^2 &= \frac{1}{4}(u_3^1 + u_5^1) + \frac{1}{2}u_4^1 + 0,008 = \frac{1}{4}(1,906 + 5,000) + \frac{1}{2}3,308 + 0,008 = 3,3885\,,
\end{aligned}
$$

tj. $\boldsymbol{u}^2 = (u_1^2, \ldots, u_4^2)^\top = (0,379; 1,008; 2,012; 3,3885)^\top$.

Zpět

Příklad 9.2 Na množině $D = \{[x,t] : x \in \langle 0;1\rangle,\ 0 \le t \le T\}$ je dána rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

s počáteční podmínkou $u(x,0) = 5x^2$ a okrajovými podmínkami: $u(0,t) = 0\,,\ u(1,t) = 5\,.$

a) Odvoďte jednoduchou implicitní formuli pro obecné h a k. Soustavu zapište v maticovém tvaru - konkrétní matici napište až v bodu b).

b) Zvolte prostorový krok $h = 0,2$ a časový krok $k = 0,2$. Pro tuto volbu a pro $f(x,t) = x$, $x \in \langle 0;1\rangle$, sestavte soustavu diferenčních rovnic pro výpočet první časové vrstvy pomocí implicitního schématu. Soustavu zapište v maticovém tvaru.

Řešení:

a) Zadání rovnice je stejné jako v příkladu **9.1**.

Vytvoříme síť $D^{h,k}$ množiny D s uzly $[x_i,t_j]$, kde

$$\begin{aligned}
0 &= x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\,, \qquad & x_{i+1} &= x_i + h\,, i = 0,\ldots,n\,, \qquad & n &= \tfrac{1}{h} \\
0 &= t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T\,, \qquad & t_{j+1} &= t_j + k\,, j = 0,\ldots,m\,, \qquad & m &= \tfrac{T}{k}.
\end{aligned}$$

Přibližnou hodnotu řešení v uzlu $[x_i,t_j]$ budeme značit u_i^j, tedy

$$u_i^j \cong u(x_i,t_j)\,, \quad i = 0,\ldots,n\,,\ j = 0,1,2,\ldots,m.$$

Na hranici množiny D již známe přesné hodnoty $u(x_i,t_j) = u_i^j$ z okrajových podmínek a z počáteční podmínky. Platí tedy:

$$u_0^j = 0\,,\ u_n^j = 5\,,\ j = 0,1,\ldots,m \quad \text{a} \quad u_i^0 = 5(ih)^2\,,\ i = 0,\ldots,n\,.$$

Tyto přesné hodnoty použijeme pro výpočet přibližných hodnot řešení u_i^j ve vnitřních uzlech $[x_i,t_j]$, $i = 1,\ldots,n-1$, $j = 1,\ldots,m-1\,.$

Zpět

Levou stranu rovnice nahradíme zpětnou diferencí. Pravou stranu budeme aproximovat (na rozdíl od explicitní formule) v $(j+1)$-ní časové vrstvě, kde prostorovou derivaci nahradíme centrální diferencí, a dosadíme odpovídající hodnoty do funkce f. Tedy

$$\frac{u(x_i,t_{j+1})-u(x_i,t_j)}{k} \doteq \frac{u(x_{i-1},t_{j+1})-2u(x_i,t_{j+1})+u(x_{i+1},t_{j+1})}{h^2}+f(x_i,t_{j+1})$$

s přesností $O(k)+O(h^2)$. Při zanedbání hodnot $O(k)+O(h^2)$ dostáváme implicitní diferenční rovnice pro přibližné řešení u_i^{j+1}:

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{k}=\frac{u_{i-1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i+1}^{j+1}}{h^2}+f(x_i,t_{j+1}),\ i=1,\dots,n-1,\ j=0,\dots m-1\,.$$

Dále použijeme označení $f(x_i,t_{j+1})=f_i^{j+1}$ a $\alpha=\frac{k}{h^2}$. Po úpravě dostáváme výslednou implicitní formuli pro výpočet hledaných hodnot v $(j+1)$-ním časovém kroku pro $j=0,1,\dots,m-1$:

$$\boxed{\begin{aligned}&-\alpha\, u_{i-1}^{j+1}+(1+2\alpha)u_i^{j+1}-\alpha u_{i+1}^{j+1}=u_i^j+k\, f_i^{j+1}, \quad i=1,\dots,n-1\,,\\ &u_0^j=0\,,\ u_n^j=5\,,\end{aligned}}$$

což je soustava $n-1$ rovnic o $n-1$ neznámých, kterou můžeme zapsat:

$$A\boldsymbol{u}^{j+1}=\boldsymbol{u}^j+k\,\boldsymbol{f}^{j+1}+\boldsymbol{v}^{j+1}, \tag{11}$$

kde $\boldsymbol{f}^{j+1}=\left(f_1^{j+1},\dots,f_{n-1}^{j+1}\right)^\top$, $\boldsymbol{v}^{j+1}=\left(\alpha u_0^{j+1},0,\dots,0,\alpha u_n^{j+1}\right)^\top$ jsou známé vektory a $\boldsymbol{u}^{j+1}=\left(u_1^{j+1},\dots,u_{n-1}^{j+1}\right)^\top$ je hledaný vektor v další časové vrstvě.

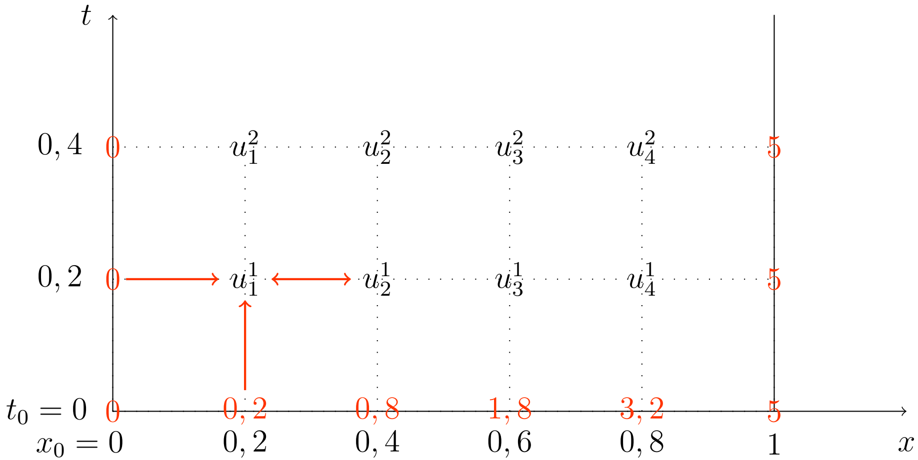
b) Počet bodů sítě určuje $h=0,2$ tj. $n=\frac{1}{h}=5$, máme počítat jednu časovou vrstvu, tj. $m=1$. Dostáváme implicitní schéma pro $j=0$:

$$-\alpha\, u_{i-1}^1+(1+2\alpha)u_i^1-\alpha u_{i+1}^1=u_i^0+k\, f_i^1, \quad i=1,\dots,4\,, \tag{12}$$

$$u_0^0=0\,,\ u_n^0=5\,,\ \boldsymbol{u}^0=(0,2;0,8;1,8;3,2)^\top\,.$$

Zpět

Celá 1-ní vrstva, tj. vektor $\boldsymbol{u}^1 = (u_1^1, \ldots, u_4^1)^\top$ se bude vyhodnocovat z rovnic (12) najednou, neboť hodnoty u_i^1 jsou svázány s hodnotami v okolních uzlech podle schématu (na obr. znázorněno červeně).



Soustavu (12) zapíšeme maticově:

$$A\boldsymbol{u}^1 = \boldsymbol{u}^0 + k\,\boldsymbol{f}^1 + \boldsymbol{v}^1, \tag{13}$$

kde $\boldsymbol{u}^1 = (u_1^1, \ldots, u_4^1)^\top$ je hledaný vektor v další časové vrstvě,

$$A = \begin{bmatrix} (1+2\alpha) & -\alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & (1+2\alpha) & -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & (1+2\alpha) & -\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & (1+2\alpha) \end{bmatrix},$$

a $\boldsymbol{u}^0$, $\boldsymbol{f}^1 = (f_1^1, \ldots, f_4^1)^\top$ a $\boldsymbol{v}^1 = (\alpha\, u_0^1, 0, 0, \alpha\, u_5^1)^\top$ jsou známé vektory.

V zadané úloze je $\alpha = 5$, tj. $(1+2\alpha) = 11$, a $kf_i^1 = 0,2\,(0,2\,i) = 0,04\,i$, tj. $k\,\boldsymbol{f}^1 = (0,04; 0,08; 0,12; 0,16)^\top$. Dále z okrajových podmínek je $u_0^1 = 0$ a $u_5^1 = 5$, tedy $\boldsymbol{v}^1 = (5\,u_0^1\,;\, 0;\, 0\,;\, 5\,u_5^1)^\top = (0; 0; 0;\, 25)^\top$.

Při známých hodnotách $\boldsymbol{u}^0$ v 0-té časové vrstvě bude vektor $\boldsymbol{u}^1$ řešit konkrétní soustavu lineárních algebraických rovnic s třídiagonální maticí:

$$\begin{bmatrix} 11 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 11 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 11 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,8 \\ 1,8 \\ 3,2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,04 \\ 0,08 \\ 0,12 \\ 0,16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,24 \\ 0,88 \\ 1,92 \\ 28,36 \end{bmatrix}.$$

Pro úplnost uvádíme vektor řešení ze software Maple:
$\boldsymbol{u}^1 = (0,7563947664; 1,616068486; 2,622955904; 3,770434502)^\top$

Zpět

Příklad 9.3 Na množině $D = \{[x,t] : x \in \langle -1;1\rangle,\ 0 \le t \le T\}$ je dána PDR:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

s počáteční podmínkou $u(x,0) = 2x + 2$ a okrajovými podmínkami: $u(-1,t) = 0\,,\ u(1,t) = 4 - t\,.$

a) Řešte tuto úlohu metodou sítí. Odvoďte Cranka–Nicolsonové formuli.

b) Zvolte prostorový krok $h = 0,5$. Pro j obecné zapište soustavu v maticovém tvaru. Pro časový krok $k = 0,2$ sestavte soustavu diferenčních rovnic pro výpočet první časové vrstvy pomocí schématu Cranka–Nicolsonové. Předpokládejte, že $f(x,t) = 10x + t$, pro $x \in \langle -1;1\rangle$, $t \in \langle 0;0,2\rangle$.

Řešení: Rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{14}$$

je lineární PDR parabolického typu.

Nejdříve si ověříme kompatibilitu zadané počáteční podmínky

$$u(x,0) \;=\; 2x + 2 \quad \text{pro} \ \ x \in \langle -1;1\rangle \tag{15}$$

s okrajovými podmínkami

$$u(-1,t) \;=\; 0 \tag{16}$$

$$u(1,t) \;=\; 4 - t\,. \tag{17}$$

Zřejmě jsou okrajové a počáteční podmínky v souhlasu, neboť:
$u(x,0) = 0 = u(-1,t)$ v bodě $[-1,0]$ a $u(x,0) = 4 = u(1,t)$ v bodě $[1,0]$.
Funkce f je zadána předpisem $f(x,t) = 10x + t$, $x \in \langle -1;1\rangle$, $t \in \langle 0;0,2\rangle$.

Zpět

Při řešení této úlohy pomocí Cranka–Nicolsonové formule (CN) vytvoříme nejdříve síť množiny D s uzly $[x_i, t_j]$, kde

$$\begin{aligned} -1 &= x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\,, & x_{i+1} &= x_i + h\,,\ \text{kde } h = \tfrac{2}{n}\,,\\ 0 &= t_0 < t_1 < \cdots < t_m\,, & t_{j+1} &= t_j + k\,,\ \text{kde } k = \tfrac{T}{m}\,. \end{aligned}$$

Přibližnou hodnotu řešení v uzlu $[x_i, t_j]$ budeme značit u_i^j, tedy

$$u_i^j \cong u(x_i, t_j)\,, \quad i = 0, \ldots, n\,,\ j = 0, 1, 2, \cdots, m.$$

Hodnoty v 0-té časové vrstvě dostaneme z počáteční podmínky (15)

$$u_i^0 = u(x_i, 0) = 2x_i + 2 = 2\,(-1 + ih) + 2, \quad i = 0, \ldots, n\,, \tag{18}$$

tedy $\boldsymbol{u}^0 = \left(u_1^0, \ldots, u_{n-1}^0\right)^\top = (2h; 4h; \ldots; 2(n-1)h)^\top$.

Z okrajových podmínek (16), (17) dostáváme

$$u_0^j = u(0, t_j) = 0, \quad u_n^j = u(1, t_j) = 4 - j\,k, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1\,. \tag{19}$$

Levou stranu rovnice (14) nahradíme zpětnou diferencí. Pravou stranu budeme aproximovat tak, že zprůměrujeme aproximaci centrální diferencí v $(j+1)$-ní časové vrstvě a aproximaci centrální diferencí v j-té časové vrstvě, a dosadíme odpovídající hodnoty do funkce f.

Tedy

$$\begin{aligned} \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} &= \frac{u(x_{i-1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i+1}, t_{j+1})}{2h^2} + \\ &+ \frac{u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)}{2h^2} + \frac{f(x_i, t_{j+1}) + f(x_i, t_j)}{2} + \\ &+ O(k^2) + O(h^2) \end{aligned}$$

Při zanedbání hodnot $O(k^2)+O(h^2)$ dostáváme diferenční rovnice pro přibližné řešení $u_{i-1}^{j+1}, u_i^{j+1}, u_{i+1}^{j+1}$, $j = 0, \dots, m-1$.:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{2\,h^2} + \frac{u_{i-1}^{j} - 2u_i^{j} + u_{i+1}^{j}}{2\,h^2} + \frac{f(x_i, t_{j+1}) + f(x_i, t_j)}{2}\,.$$

Dále použijeme označení $f(x_i, t_j) = f_i^j$ a $\alpha = \frac{k}{h^2}$. Po úpravě dostáváme výslednou CN formuli pro výpočet hledaných hodnot v $(j+1)$-ním časovém kroku pro $i = 1, \dots, n-1$:

$$\boxed{-\frac{\alpha}{2}u_{i-1}^{j+1} + (1+\alpha)u_i^{j+1} - \frac{\alpha}{2}u_{i+1}^{j+1} = \frac{\alpha}{2}u_{i-1}^{j} + (1-\alpha)u_i^{j} + \frac{\alpha}{2}u_{i+1}^{j} + k\frac{f_i^{j+1} + f_i^j}{2}\,.} \tag{20}$$

Celá $(j+1)$-ní vrstva, tedy vektor $\boldsymbol{u}^{j+1} = \left(u_1^{j+1}, \dots, u_{n-1}^{j+1}\right)^\top$ se bude vyhodnocovat ze soustavy rovnic (20) najednou, neboť hodnoty u_i^{j+1} jsou svázány s hodnotami v okolních uzlech u_{i-1}^{j+1} a u_{i+1}^{j+1} a počítají se ze známých hodnot v uzlech $u_{i-1}^j, u_i^j, u_{i+1}^j$. Hodnoty $u_0^j = 0$ a $u_n^j = 4 - jh$, $j = 0, 2, \dots m$ již známe z okrajových podmínek (19).

b) Počet bodů sítě určuje $h = 0,5$ tj. $n = \frac{2}{h} = 4$, máme počítat jednu časovou vrstvu, tj. $m = 1$. Pro $n = 4$ a j obecné zapíšeme soustavu (20) maticově:

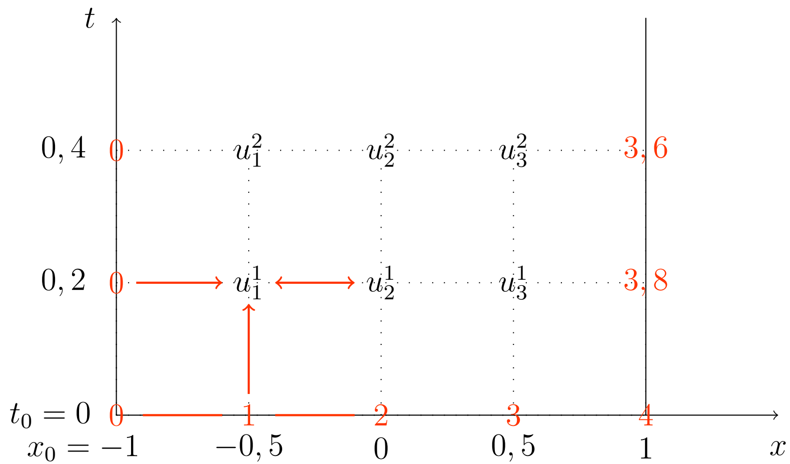
$$A\boldsymbol{u}^{j+1} = B\boldsymbol{u}^j + k\,\frac{\boldsymbol{f}^{j+1} + \boldsymbol{f}^j}{2} + \boldsymbol{v}^{j+1}, \tag{21}$$

kde $\boldsymbol{u}^{j+1} = \left(u_1^{j+1}, u_2^{j+1}, u_3^{j+1}\right)^\top$ je hledaný vektor v další časové vrstvě,

$$A = \begin{bmatrix} (1+\alpha) & -\frac{\alpha}{2} & 0 \\ -\frac{\alpha}{2} & (1+\alpha) & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & -\frac{\alpha}{2} & (1+\alpha) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} (1-\alpha) & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & (1-\alpha) & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & (1-\alpha) \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{u}^j = \left(u_1^j, u_2^j, u_3^j\right)^\top$, $\boldsymbol{f}^{j+1} = \left(f_1^{j+1}, f_2^{j+1}, f_3^{j+1}\right)^\top$, $\boldsymbol{f}^j = \left(f_1^j, f_2^j, f_3^j\right)^\top$ a $\boldsymbol{v}^{j+1} = \left(\frac{\alpha}{2}\,(u_0^{j+1} + u_0^j), 0, \frac{\alpha}{2}\,(u_4^{j+1} + u_4^j)\right)^\top$ jsou známé vektory. Pro $j = 0$ je $\boldsymbol{u}^j = (1, 2, 3)^\top$

Pro $n = 4$ a j=0 se hodnoty u_{i-1}^1, u_i^1 a u_{i+1}^1 počítají ze známých hodnot v uzlech $u_{i-1}^0, u_i^0, u_{i+1}^0$ podle schématu (na obr. znázorněno červeně). Hodnoty $u_0^0 = u_0^1 = 0$ a $u_4^0 = 4$, $u_4^1 = 3,8$ již známe z okrajových podmínek (19).



V zadané úloze je $k = 0,2,\ \alpha = 0,8,$ tj. $(1 + \alpha) = 1,8\,,\ (1 - \alpha) = 0,2\,,$
$f_i^0 = 10x_i + t_0 = 10\,(-1 + 0,5\,i)$ a $f_i^1 = 10x_i + t_1 = 10\,(-1 + 0,5\,i) + 0,2\,,$ pro $i = 1, 2, 3.$
Platí tedy

$$\frac{k}{2}\,(\boldsymbol{f}^1 + \boldsymbol{f}^0) = 0,1\ (-9,8; 0,2; 10,2)^\top = (-0,98;\ 0,02\,; 1,02)^\top\,.$$

Dále z okrajových podmínek je $u_0^1 = u_0^0 = 0$ a $u_4^1 = 3,8,\ u_4^0 = 4\,,$ tedy

$$\boldsymbol{v}^1 = \left(0,4\,(u_0^1 + u_0^0);\ 0\,;\ 0,4\,(u_4^1 + u_4^0)\right)^\top = (0\,;\ 0\,;\ 3,12)^\top\,.$$

Zpět

Vektor $\boldsymbol{u}^1$ bude řešit konkrétní soustavu lineárních algebraických rovnic s třídiagonální maticí:

$$\begin{bmatrix} 1,8 & -0,4 & 0 \\ -0,4 & 1,8 & -0,4 \\ 0 & -0,4 & 1,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 & 0 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}^0 + k\,\frac{\boldsymbol{f}^1 + \boldsymbol{f}^0}{2} + \boldsymbol{v}^1 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 & 0 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,98 \\ 0,02 \\ 1,02 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3,12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,02 \\ 2,02 \\ 5,54 \end{bmatrix}.$$

Pro úplnost uvádíme vektor řešení soustavy v software Maple:
$\boldsymbol{u}^1 = (0,4570776255; 2,006849315; 3,523744292]^\top$

Zpět

Příklad 9.4 Na množině $D = \{[x,t] : x \in \langle 0;2\rangle \times \langle 0;T\rangle$ je dána PDR:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u)$$

s počáteční podmínkou $u(x,0) \;=\; x(2-x)$ a okrajovými podmínkami $u(0,t) = 20\,t\,,\; u(2,t) = 0\,.$

a) Řešte tuto úlohu metodou sítí. Odvoďte jednoduchou implicitní formuli s jednoduchou linearizací.

b) Zvolte prostorový krok $h = 0,5$ a časový krok $k = 0,25$. Pro tuto volbu sestavte soustavu diferenčních rovnic pro výpočet první časové vrstvy pomocí jednoduchého implicitního schématu. Soustavu zapište v maticovém tvaru.

Řešení:
Rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u) \tag{22}$$

je nelineární PDR parabolického typu.
Nejdříve si ověříme kompatibilitu zadané počáteční podmínky

$$u(x,0) \;=\; x(2-x) \quad \text{pro } x \in \langle 0;2\rangle \tag{23}$$

s okrajovými podmínkami

$$u(0,t) \;=\; 20\,t \tag{24}$$

$$u(2,t) \;=\; 0\,. \tag{25}$$

Zřejmě jsou okrajové a počáteční podmínky v souhlasu, neboť:
$u(x,0) = 0 = u(0,t)$ v bodě $[0,0]$ a $u(x,0) = 0 = u(2,t)$ v bodě $[2,0]$.

Zpět

a) Na množině D vytvoříme ekvidistantní síť s uzly $[x_i, t_j]$, kde

$$\begin{aligned} 0 &= x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 2\,, & x_{i+1} &= x_i + h\,,\ \text{kde } h = \tfrac{2}{n}\,, \\ 0 &= t_0 < t_1 < \cdots < t_m\,, & t_{j+1} &= t_j + k\,,\ \text{kde } k = \tfrac{T}{m}\,. \end{aligned}$$

Označíme $\alpha = \dfrac{k}{h^2}$. Jednoduchá implicitní formule je vždy stabilní.

Přibližnou hodnotu řešení v uzlu $[x_i, t_j]$ budeme značit u_i^j, tedy

$$u_i^j \cong u(x_i, t_j)\,, \quad i = 0, \ldots, n\,,\ j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Hodnoty v 0-té časové vrstvě dostaneme z počáteční podmínky (23)

$$u_i^0 = u(x_i, 0) = x_i(2 - x_i) = hi\,(2 - h\,i), \quad i = 0, \ldots, n\,, \tag{26}$$

Z okrajových podmínek (24), (25) dostáváme přímo

$$u_0^j = u(0, t_j) = 20kj, \quad u_n^j = u(2, t_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, m\,. \tag{27}$$

Levou stranu rovnice (22) nahradíme zpětnou diferencí. Pravou stranu budeme aproximovat v $(j+1)$-ní časové vrstvě, kde prostorovou derivaci na pravé straně nahradíme centrální diferencí v $(j+1)$-ní časové vrstvě. Nelineární člen na pravé straně budeme aproximovat částečně v $(j+1)$-ní časové vrstvě a částečně v j-té vrstvě, tak docílíme zlinearizování diferenčních rovnic

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} \doteq \frac{u(x_{i-1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i+1}, t_{j+1})}{h^2} + u(x_i, t_{j+1})(1 - u(x_i, t_j))\,.$$

Dostáváme implicitní diferenční analogii pro přibližné řešení u_i^{j+1}

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2} + u_i^{j+1}(1 - u_i^j)\,.$$

Po úpravě dostáváme výslednou implicitní formuli pro výpočet hledaných hodnot v $(j+1)$-ním časovém kroku:

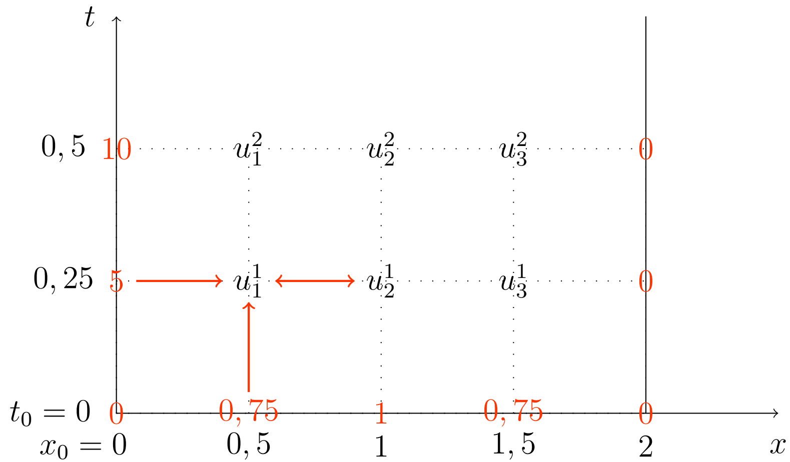
$$\boxed{-\alpha\, u_{i-1}^{j+1} + (1 + 2\alpha + k(u_i^j - 1))u_i^{j+1} - \alpha u_{i+1}^{j+1} = u_i^j, \quad i = 1, \dots, n-1\,.} \tag{28}$$

Celá $(j+1)$-ní vrstva, tj. vektor $\boldsymbol{u}^{j+1} = \left(u_1^{j+1}, \dots, u_{n-1}^{j+1}\right)^\top$ se bude vyhodnocovat ze soustavy rovnic (28) najednou, neboť hodnoty u_i^{j+1} jsou svázány s hodnotami v okolních uzlech viz schéma v bodě b) (na obr. znázorněno červeně), přičemž hodnoty u_0^{j+1} a u_{n-1}^{j+1} již známe z okrajových podmínek (24) a (25).
Soustavu lineárních rovnic (28) zapíšeme maticově:

$$A^j \boldsymbol{u}^{j+1} = \boldsymbol{u}^j + \boldsymbol{v}^{j+1}, \tag{29}$$

kde $\boldsymbol{u}^{j+1} = \left(u_1^{j+1}, u_2^{j+1}, \dots, u_{n-1}^{j+1}\right)^\top$ je hledaný vektor v další časové vrstvě, $\boldsymbol{u}^j = \left(u_1^j, u_2^j, \dots, u_{n-1}^j\right)^\top$ a $\boldsymbol{v}^{j+1}$ jsou známé vektory získané z okrajových podmínek.
Poznamenejme, že matice soustavy (36) A^j bude v tomto případě (vlivem linearizace) v každé časové vrstvě jiná. Konkrétní matici A^j a vektor $\boldsymbol{v}^{j+1}$ si ukážeme v bodu b).

b) Pro kroky $h = 0,5$ ve směru osy x a $k = 0,25$ ve směru osy t vytvoříme síť množiny D s uzly $[x_i, t_j]$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ a $j = 0, 1, 2\dots$



Matice A^j má pro $n = 4$ tvar

$$A^j = \begin{bmatrix} 1 + 2\alpha + k(u_1^j - 1) & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 1 + 2\alpha + k(u_2^j - 1) & -\alpha \\ 0 & -\alpha & 1 + 2\alpha + k(u_3^j - 1) \end{bmatrix},$$

kde $\alpha = 1$ a vektor je $\boldsymbol{v}^{j+1} = \left(\alpha\, u_0^{j+1},\, 0,\, \alpha\, u_4^{j+1}\right)^\top = (\alpha\,(j+1)5,\, 0,\, 0)^\top$.
Celá $(j+1)$-ní vrstva, tj. vektor $\boldsymbol{u}^{j+1} = \left(u_1^{j+1}, u_2^{j+1}, u_3^{j+1}\right)^\top$ se bude vyhodnocovat ze soustavy rovnic (28) najednou, neboť hodnoty u_i^{j+1} jsou svázány s hodnotami v okolních uzlech podle schématu (na obr. znázorněno červeně), přičemž hodnoty u_0^{j+1} a u_4^{j+1} již známe z okrajových podmínek (24) a (25).

Zpět

V zadané úloze je $k = 0,25$, tj. $\alpha = 1$, $(1+2\alpha) = 3$. Z (26) plyne $\boldsymbol{u}^0 = (0,75; 1; 0,75)^\top$. Dále z okrajových podmínek je $u_0^1 = 5$ a $u_4^1 = 0$, tedy $\boldsymbol{v}^1 = (1\,u_0^1\,;\,0\,;\,1\,u_4^1)^\top = (5;\,0;\,0\,)^\top$.

Při známých hodnotách $\boldsymbol{u}^0$ v 0-té časové vrstvě bude vektor $\boldsymbol{u}^1$ řešit konkrétní soustavu lineárních algebraických rovnic s třídiagonální maticí:

$$\begin{bmatrix} 2,9375 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2,9375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,75 \\ 1 \\ 0,75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,75 \\ 1 \\ 0,75 \end{bmatrix}.$$

Pro úplnost uvádíme vektor řešení v software Maple:
$\boldsymbol{u}^1 = (2,42905; 1,38532; 0,726918)^\top$

Zpět

Příklad 9.5 Na množině $D = \{[x,t] : x \in \langle 0;1\rangle,\ t \geq 0\}$ je dána PDR:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} - x\mathrm{e}^{-t}$$

s počáteční podmínkou

$$u(x,0) \ = \ 1$$

a okrajovými podmínkami $u(0,t) = 1\,,\ u(1,t) - \dfrac{1}{t+1}\dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 1\,.$

a) Řešte tuto úlohu metodou sítí. Odvoďte jednoduchou implicitní formuli pro obecné kroky h a k.

b) Zvolte prostorový krok $h = 0,25$ a časový krok $k = 0,25$. Pro tuto volbu zapište soustavu diferenčních rovnic v maticovém tvaru.

Řešení:
Rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} - x\mathrm{e}^{-t} \tag{30}$$

je lineární PDR parabolického typu zadaná na množině
$D = \{[x,t] : x \in \langle 0;1\rangle,\ t \in \langle 0;T\rangle\}$ spolu s počáteční podmínkou

$$u(x,0) \ = \ 1 \tag{31}$$

a okrajovými podmínkami

$$u(0,t) \ = \ 1 \tag{32}$$

$$u(1,t) - \frac{1}{t+1}\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) \ = \ 1\,. \tag{33}$$

Zpět

Nejdříve ověříme kompatibilitu zadané počáteční podmínky (31) s okrajovými podmínkami:
Okrajová podmínka (32) a počáteční podmínka (31) jsou zřejmě v souhlasu, neboť: $u(x,0)=1=u(0,t)$ v bodě $[0,0]$.
V bodě $[1,0]$ je okrajová podmínka (33) rovněž v souhlasu s (31), neboť:

$$u(1,0)=1+\frac{1}{(0+1)}\frac{\partial u}{\partial x}(1,0)=1+0=1.$$

a) Odvodíme jednoduchou implicitní formuli metody sítí. Nejdříve k daným krokům h ve směru osy x a k ve směru osy t vytvoříme síť $D_{h,k}$ s uzly $[x_i,t_j]$, kde

$$\begin{aligned} 0 &= x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\,, \qquad & x_{i+1} &= x_i + h\,, \quad & h &= \tfrac{1}{n} \\ 0 &= t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T\,, \qquad & t_{j+1} &= t_j + k\,, \quad & k &= \tfrac{T}{m}\,. \end{aligned}$$

Označíme $\alpha=\dfrac{k}{h^2}$. Jednoduchá implicitní formule je vždy stabilní (není zde omezující podmínka na α). Sestavíme soustavu diferenčních rovnic pro výpočet $(j+1)$-ní časové vrstvy pomocí jednoduchého implicitního schématu. Levou stranu rovnice (30) nahradíme zpětnou diferencí. Pravou stranu budeme aproximovat v $(j+1)$-ní časové vrstvě, přičemž druhou prostorovou derivaci i první prostorovou derivaci nahradíme centrálními diferencemi a dosadíme odpovídající hodnoty funkce $x\,\mathrm{e}^{-t}$ v $(j+1)$-ní vrstvě. Tedy máme náhradu

$$\frac{u(x_i,t_{j+1})-u(x_i,t_j)}{k}=\frac{u(x_{i-1},t_{j+1})-2u(x_i,t_{j+1})+u(x_{i+1},t_{j+1})}{h^2}+$$
$$+h\,i\,\frac{u(x_{i+1},t_{j+1})-u(x_{i-1},t_{j+1})}{2h}-h\,i\,\mathrm{e}^{-(j+1)k}+O(k)+O(h^2).$$

Při zanedbání hodnot $O(k)+O(h^2)$ dostáváme implicitní diferenční rovnice pro přibližné řešení u_i^{j+1}:

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{k}=\frac{u_{i-1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i+1}^{j+1}}{h^2}+i\,\frac{u_{i+1}^{j+1}-u_{i-1}^{j+1}}{2}-h\,i\,\mathrm{e}^{-(j+1)k}\,.$$

Po úpravě dostáváme výslednou implicitní formuli pro výpočet hledaných hodnot v $(j+1)$-ním časovém kroku:

$$\boxed{-\left(\alpha - \frac{ki}{2}\right) u_{i-1}^{j+1} + (1+2\alpha)u_i^{j+1} - \left(\alpha + \frac{ki}{2}\right) u_{i+1}^{j+1} = u_i^j + k\, hie^{-(j+1)k}, \quad i = 1, \ldots, n-1\,,} \tag{34}$$

pro $j = 0, \ldots, m-1$.

Hodnoty $u_i^0 = 1,\ i = 0, \ldots, n$, resp. $u_0^j = 1,\ j = 0, 1, \ldots, m-1$, již známe z počáteční (31), resp. okrajové podmínky (32).

Okrajovou podmínku(33) nahradíme s přesností $O(h^2)$:

$$u_n^{j+1} - \frac{u_{n-2}^{j+1} - 4u_{n-1}^{j+1} + 3u_n^{j+1}}{(j(k+1)+1)2h} = 1$$

a po úpravě dostáváme

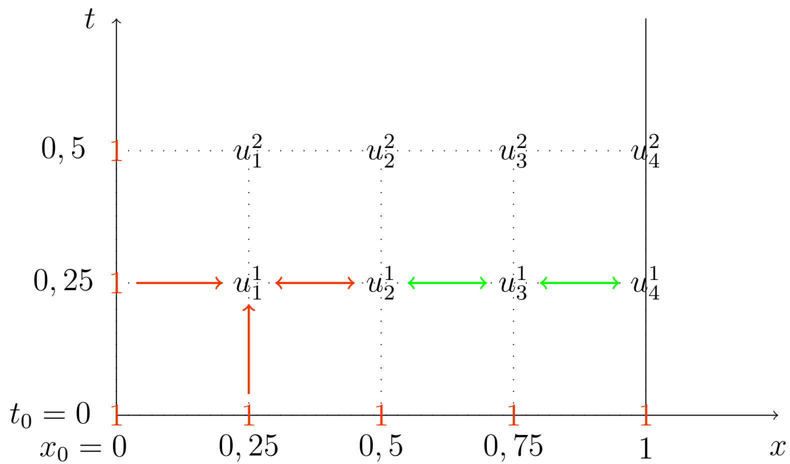
$$\boxed{u_n^{j+1} = \beta u_{n-2}^{j+1} - 4\beta u_{n-1}^{j+1} + \gamma, \quad \text{kde } \beta = \tfrac{1}{(1+(j+1)k)2h-3}\,,\ \gamma = \beta(1+(j+1)k)2h\,,} \tag{35}$$

pro $j = 1, \ldots, m-1$.

Řešíme (34), spolu s (35) pro počáteční hodnoty $u_i^0 = 1, \quad i = 0, \ldots, n$.

Celá $(j+1)$-ní vrstva, tj. vektor $\boldsymbol{u}^{j+1} = \left(u_1^{j+1}, \ldots, u_n^{j+1}\right)^\top$ se bude vyhodnocovat z rovnic (34) a (35) najednou, neboť hodnoty u_i^{j+1} jsou svázány s hodnotami v okolních uzlech podle schématu (na obr. znázorněno červeně), přičemž hodnoty u_0^{j+1} již známe z okrajových podmínek (32) a u_n^{j+1} vstupují do rovnic z (35) (na obr. znázorněno zeleně)

b) Pro zadaný prostorový krok $h = 0,25$ a časový krok $k = 0,25$ je $n = 4$ a $\alpha = \dfrac{k}{h^2} = \dfrac{0,25}{0,0625} = 4$, tj. $1 + 2\alpha = 9$.



Rozepíšeme-li (34) pro $i = 1, 2, 3, 4$, a (35) pro $j + 1$, dostaneme následující 4 rovnice pro celkem 4 neznámé $u_1^{j+1}, u_2^{j+1}, u_3^{j+1}, u_4^{j+1}$:

$$\begin{aligned}
-\left(\alpha - \tfrac{k1}{2}\right) u_0^{j+1} + (1+2\alpha)u_1^{j+1} - \left(\alpha + \tfrac{k1}{2}\right) u_2^{j+1} &= u_1^j + k\,h\,\mathrm{e}^{-k(j+1)}\\
-\left(\alpha - \tfrac{k2}{2}\right) u_1^{j+1} + (1+2\alpha)u_2^{j+1} - \left(\alpha + \tfrac{k2}{j+2}\right) u_3^{j+1} &= u_2^j + k\,2h\,\mathrm{e}^{-k(j+1)}\\
-\left(\alpha - \tfrac{k3}{2}\right) u_2^{j+1} + (1+2\alpha)u_3^{j+1} - \left(\alpha + \tfrac{k3}{2}\right) u_4^{j+1} &= u_3^j + k\,3h\,\mathrm{e}^{-k(j+1)}\\
\beta u_2^{j+1} + 4\beta u_3^{j+1} + u_4^{j+1} &= \gamma\,,
\end{aligned}$$

kde $\beta = \frac{1}{(1+k)2h-3} = -0,4210526$, a $\gamma = \beta(1+k)2h = -0,2631578$.

Celá $j+1$ vrstva, tj. vektor $\boldsymbol{u}^{j+1} = \left(u_1^{j+1}, u_2^{j+1}, u_3^{j+1}, u_4^{j+1}\right)^\top$ se bude vyhodnocovat z rovnic (34) a (35) najednou, neboť hodnoty u_i^{j+1} jsou svázány s hodnotami v okolních uzlech podle implicitního schématu (na obr. znázorněno červeně), přičemž hodnotu u_0^j již známe z okrajové podmínky (32) a u_4^{j+1} vstupuje do rovnic z (35) (na obr. znázorněno zeleně)
Soustavu $j+1$ časovou vrstvu zapíšeme maticově:

$$A\boldsymbol{u}^{j+1} = \tilde{\boldsymbol{u}}^j + k\,\boldsymbol{f}^{j+1} + \boldsymbol{v}^{j+1}, \tag{36}$$

kde $\boldsymbol{u}^{j+1} = \left(u_1^{j+1}, u_2^{j+1}, u_3^{j+1}, u_4^{j+1}\right)^\top$ je hledaný vektor v další časové vrstvě, $\tilde{\boldsymbol{u}}^j = \left(u_1^j, u_2^j, u_3^j, \gamma\right)^\top$ je známý již vypočítaný vektor,

$$A = \begin{bmatrix} (1+2\alpha) & -(\alpha+\frac{k}{2}) & 0 & 0 \\ -(\alpha-k) & (1+2\alpha) & -(\alpha+k) & 0 \\ 0 & -(\alpha-\frac{k3}{2}) & (1+2\alpha) & -(\alpha+\frac{k3}{2}) \\ 0 & \beta & 4\beta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -4,125 & 0 & 0 \\ -3,75 & 9 & -4,25 & 0 \\ 0 & -3,625 & 9 & -4,375 \\ 0 & -0,4210526 & -1,6842104 & 1 \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{f}^{j+1} = \left(h\,\mathrm{e}^{-k(j+1)}, 2\,h\,\mathrm{e}^{-k(j+1)}, 3\,h\,\mathrm{e}^{-k(j+1)}, 0\right)^\top = \left(0,25\,\mathrm{e}^{-0,25(j+1)}; 0,5\,\mathrm{e}^{-0,25(j+1)}; 0,75\,\mathrm{e}^{-0,25(j+1)}; 0\right)^\top$
a $\boldsymbol{v}^{j+1} = \left((\alpha-\frac{k}{2})u_0^{j+1}, 0, 0, 0\right)^\top = (3,875; 0; 0; 0)^\top$ jsou známé vektory. Počáteční vektor $\boldsymbol{u}^0$ dostaneme z počátní podmínky, tedy $\tilde{\boldsymbol{u}}^0 = (u_1^0, u_2^0, u_3^0, \gamma)^\top = (1; 1; 1; -0,2631578)^\top$.

Příklad 9.6 Na množině $D = \{[x,t] : x \in \langle 0;1\rangle,\ t \geq 0\}$ je dána PDR:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2\,u$$

s počáteční podmínkou

$$u(x,0) = x$$

a okrajovými podmínkami $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 1$.

a) Řešte tuto úlohu metodou přímek pro obecný prostorový krok h.

b) Metodou přímek vypočtete řešení pro $h = 0,5$.

Řešení:

a) Na intervalu $\langle 0,1\rangle$ vytvoříme síť

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\,, \qquad x_{i+1} = x_i + h,\ i = 0,\dots,n\,, \qquad n = \frac{1}{h}.$$

Označme v každém bodě x_i přibližnou funkci $u_i(t) \cong u(x_i,t)$ pro $t \in \langle 0,T\rangle$. Provedeme diskrétní náhradu PDR v bodě x_i a $t \in \langle 0,T\rangle$. Dostaneme soustavu $n-1$ obyčejných diferenciálních rovnic:

$$u_i'(t) = \frac{u_{i-1}(t) - 2\,u_i(t) + u_{i+1}(t)}{h^2} + \frac{u_{i+1}(t) - u_{i-1}(t)}{2h} + 2\,u_i(t),\ u_0(t) = 0,\ u_n(t) = 1,\ t \in \langle 0,T\rangle,\ i = 1,\dots,n-1.$$

Z počátečních podmínek dostaneme počáteční podmínky pro soustavu ODR:

$$u_i(0) = i\,h,\ i =,1,\dots,n-1.$$

Zpět

Po úpravě dostaneme soustavu $n-1$ ODR s $n-1$ počátečními podmínkami:

$$u_i'(t) = \alpha u_{i-1}(t) + \beta u_i(t) + \gamma u_{i+1}(t), \quad t \in \langle 0, T \rangle,$$

kde $u_0(t) = 0,\ u_n(t) = 1,\ \alpha = \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right),\ \beta = \left(2 - \frac{2}{h^2}\right),\ \gamma = \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right),$

a $u_i(0) = i\,h$ pro $i = 1, \ldots, n-1$.

Tuto soustavu můžeme pro obecné n řešit některou z Runge-Kuttových metod.

b) Pro $h = 0,5$, tj. $n = 2$ dostaneme jednu obyčejnou diferenciální rovnici

$$u_1'(t) = -6u_1(t) + 5, \quad \text{pro } t \in \langle 0, T \rangle$$

kde $u_1(0) = 0,5$

Tuto ODR můžeme vyřešit analyticky. Jedná se o nehomogenní lineární diferenciální rovnici 1. řádu. Dostaneme obecné řešení

$$u_1(t) = C\mathrm{e}^{-6t} + \frac{5}{6}.$$

Z počáteční podmínky vyjde $C = -\frac{1}{3}$, partikulární řešení naší ODR s danou počáteční podmínkou je

$$u_1(t) = \frac{-2\mathrm{e}^{-6t} + 5}{6}.$$

Zpět

10. Vyhodnocování experimentálních dat

- Příklad 10.1 Uvažujme závislost proměnné y na nezávisle proměnných x_1, x_2 a x_3 ve tvaru $y = ax_1 + bx_2 + cx_3$. Pro hodnoty proměnných x_1, x_2 a x_3 byly naměřeny odpovídající hodnoty y, viz následující tabulka:

x_1	1	2	-1	-1	-1
x_2	1	1	0	0	2
x_3	1	2	1	1	-1
y	$3,5$	$4,5$	0	$-0,5$	0

.

  Najděte nejlepší parametry a, b, c ve smyslu minimalizace součtu čtverců odchylek.

- Příklad 10.2 Metodou nejmenších čtverců určete polynom druhého stupně, který nejlépe aproximuje naměřené hodnoty:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1	$1,8$	$1,3$	$2,5$	$6,3$

- Příklad 10.3 Metodou nejmenších čtverců aproximujte funkci $y(x)$, která je zadaná tabulkou, přičemž předpokládejte závislost ve tvaru $y(x) \cong f(x, a, b) = a\, x^b$.

x_i	1	2	3	4
y_i	$1,5$	$3,9$	9	15

Cvičení:

- Cvičení 10.1

  Uvažujme závislost proměnné y na nezávisle proměnných x_1 a x_2 ve tvaru $y = a+bx_1+cx_2$. Pro nezávisle proměnné x_1 a x_2 byly naměřeny hodnoty y, viz následující tabulka:

x_1	$0,0$	$2,0$	$2,5$	$1,0$	$4,0$	$7,0$
x_2	0	1	2	13	6	2
y	5	10	9	0	3	27

  Najděte nejlepší parametry a, b, c ve smyslu minimalizace součtu čtverců odchylek .

- Cvičení 10.2

  Nalezněte polynom druhého stupně, tj. funkci $a + bx + cx^2$, který ve smyslu nejmenších čtverců nejlépe aproximuje zadaná data:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	0	$0,4$	1	$0,4$	0

  Graficky znázorněte naměřené hodnoty i optimální parabolu. Vypočtěte součet čtverců odchylek δ.

Obsah

Příklad 10.1 Uvažujme závislost proměnné y na nezávisle proměnných x_1, x_2 a x_3 ve tvaru $y = ax_1 + bx_2 + cx_3$. Pro hodnoty proměnných x_1, x_2 a x_3 byly naměřeny odpovídající hodnoty y, viz následující tabulka:

x_1	1	2	-1	-1	-1
x_2	1	1	0	0	2
x_3	1	2	1	1	-1
y	$3,5$	$4,5$	0	$-0,5$	0

Najděte nejlepší parametry a, b, c ve smyslu minimalizace součtu čtverců odchylek.

Výsledek:
Hledaná závislost je $y \cong 1,0821\, x_1 + 1,0143\, x_2 + 0,8321\, x_3$.

Řešení **Zpět**

Příklad 10.2 Metodou nejmenších čtverců určete polynom druhého stupně, který nejlépe aproximuje naměřené hodnoty:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1	1,8	1,3	2,5	6,3

Výsledek:
Hledaná přibližná závislost je $y \cong 1,42 - 1,07\,x + 0,55\,x^2$.

Řešení Zpět

Příklad 10.3 Metodou nejmenších čtverců aproximujte funkci $y(x)$, která je zadaná tabulkou, přičemž předpokládejte závislost ve tvaru $y(x) \cong f(x, a, b) = a\, x^b$.

x_i	1	2	3	4
y_i	$1,5$	$3,9$	9	15

Výsledek:
Výsledná přibližná závislost:

$$y \cong 1,40647\, x^{1,670002}\,.$$

Řešení Zpět

Cvičení 10.1

Uvažujme závislost proměnné y na nezávisle proměnných x_1 a x_2 ve tvaru $y = a + bx_1 + cx_2$. Pro nezávisle proměnné x_1 a x_2 byly naměřeny hodnoty y, viz následující tabulka:

x_1	$0,0$	$2,0$	$2,5$	$1,0$	$4,0$	$7,0$
x_2	0	1	2	13	6	2
y	5	10	9	0	3	27

Najděte nejlepší parametry a, b, c ve smyslu minimalizace součtu čtverců odchylek .

Výsledek:

Řeší se soustava tří rovnic o třech neznámých a, b, c

$$\begin{bmatrix} 6 & 16,5 & 14 \\ 16,5 & 76,3 & 48 \\ 14 & 48 & 54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54 \\ 243,5 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Hledaná závislost je $y \cong 5,01282 + 3,99251\, x_1 - 2,9967\, x_2$.

Zpět

Cvičení 10.2

Nalezněte polynom druhého stupně, tj. funkci $a+bx+cx^2$, který ve smyslu nejmenších čtverců nejlépe aproximuje zadaná data:

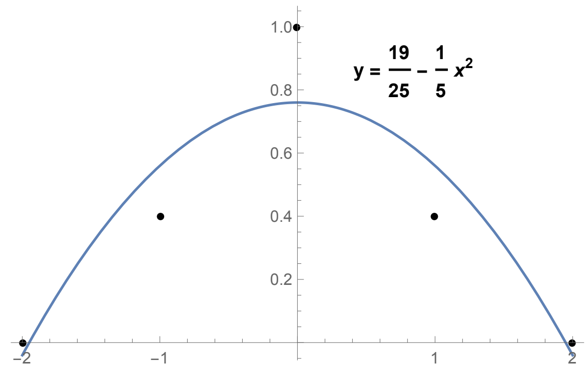
x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	0	$0,4$	1	$0,4$	0

Graficky znázorněte naměřené hodnoty i optimální parabolu. Vypočtěte součet čtverců odchylek δ.

Výsledek:

Hledaná závislost je $y \cong \frac{19}{25} - \frac{1}{5}x^2$, $\delta = \frac{14}{125} = 0,112$.

Grafické znázornění paraboly a naměřených hodnot:



Zpět

Příklad 10.1 Uvažujme závislost proměnné y na nezávisle proměnných x_1, x_2 a x_3 ve tvaru $y = ax_1 + bx_2 + cx_3$. Pro hodnoty proměnných x_1, x_2 a x_3 byly naměřeny odpovídající hodnoty y, viz následující tabulka:

x_1	1	2	-1	-1	-1
x_2	1	1	0	0	2
x_3	1	2	1	1	-1
y	$3,5$	$4,5$	0	$-0,5$	0

.

Najděte nejlepší parametry a, b, c ve smyslu minimalizace součtu čtverců odchylek.

Řešení:

Jedná se o nalezení přibližné lineární závislosti $y \cong ax_1 + bx_2 + cx_3$, kde parametry a, b, c budou minimalizovat součet čtverců odchylek v zadaných hodnotách nezávisle proměnných x_1, x_2, x_3. Minimalizujeme tedy funkci

$$S(a,b,c) = \sum_{j=1}^{5} (y^j - (ax_1^j + bx_2^j + cx_3^j))^2.$$

Označme matici $\boldsymbol{A}$ tvořenou pěti řádky hodnot nezávisle proměnných a odpovídající vektor naměřených hodnot $\boldsymbol{y}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 \\ x_1^5 & x_2^5 & x_3^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \\ y^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,5 \\ 4,5 \\ 0 \\ -0,5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Potom vektor $\boldsymbol{a}^+ = (a, b, c)^\top$ minimalizující součet čtverců odchylek dostaneme jako řešení soustavy lineárních algebraických rovnic

$$\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{a}^+ = \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{y}\,,$$

tj.

Zpět

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{a}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,5 \\ 4,5 \\ 0 \\ -0,5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Výslednou soustavu tří rovnic o třech neznámých a, b, c

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

řešíme například Gaussovou eliminací

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 1 & 4 & 13 \\ 1 & 6 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 8 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 1 & 8 \\ 0 & -23 & 4 & -20 \\ 0 & -47 & -4 & -51 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 1 & 8 \\ 0 & -23 & 4 & -20 \\ 0 & 70 & 0 & 71 \end{array}\right].$$

Vypočteme

$$\boldsymbol{a}^+ = (a, b, c)^\top = \left(\frac{303}{280}, \frac{71}{70}, \frac{233}{280}\right)^\top \doteq (1,0821; 1,0143; 0,8321)^\top.$$

Hledaná závislost je tedy $y \cong 1,0821\, x_1 + 1,0143\, x_2 + 0,8321\, x_3\,.$

Příklad 10.2 Metodou nejmenších čtverců určete polynom druhého stupně, který nejlépe aproximuje naměřené hodnoty:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1	1,8	1,3	2,5	6,3

Řešení:
Hledaná závislost bude ve tvaru $y = a + b\,x + c\,x^2$. Obecně nebude možné splnit všechny rovnice

$$a + b\,x_i + c\,x_i^2 = y_i\,, \quad i = 1, \ldots, 5\,.$$

Najdeme optimální trojici hodnot a, b, c, které budou aproximovat daná data ve smyslu nejmenších čtverců. Minimalizujeme tedy funkci

$$S(a,b,c) = \sum_{i=1}^{5} (y_i - (a + b\,x_i + c\,(x_i)^2))^2.$$

Označíme-li matici $\boldsymbol{X}$ tvořenou řádky hodnot 1, x_i, x_i^2 a vektor naměřených hodnot $\boldsymbol{y}$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,8 \\ 1,3 \\ 2,5 \\ 6,3 \end{bmatrix},$$

potom vektor $\boldsymbol{a}^+ = (a, b, c)^\top$ minimalizující součet čtverců odchylek řeší soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X}\,\boldsymbol{a}^+ = \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{y}\,,$$

tj.

Zpět

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \boldsymbol{a}^{+} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,8 \\ 1,3 \\ 2,5 \\ 6,3 \end{bmatrix}.$$

Soustavu tří rovnic o třech neznámých a, b, c

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12,9 \\ 37,1 \\ 130,3 \end{bmatrix}$$

řešíme Gaussovou eliminací

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 10 & 30 & 12,9 \\ 0 & 10 & 40 & 11,3 \\ 0 & 40 & 174 & 52,9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 10 & 30 & 12,9 \\ 0 & 10 & 40 & 11,3 \\ 0 & 0 & 14 & 7,7 \end{array}\right].$$

Vypočteme

$$\boldsymbol{a}^{+} = (a, b, c)^{\top} = (1,42;\ -1,07;\ 0,55)^{\top}.$$

Dostali jsme tedy hledanou přibližnou závislost $y \cong 1,42 - 1,07\,x + 0,55\,x^2$.

Zpět

Příklad 10.3 Metodou nejmenších čtverců aproximujte funkci $y(x)$, která je zadaná tabulkou, přičemž předpokládejte závislost ve tvaru $y(x) \cong f(x,a,b) = a\,x^b$.

x_i	1	2	3	4
y_i	1,5	3,9	9	15

Řešení:
Závislost $y(x) \cong f(x,a,b) = a\,x^b$ zlinearizujeme následovně

$$\ln y(x) \cong \ln a + b \ln x\,,$$

tj. $\widetilde{y} \cong \widetilde{a} + b\,\widetilde{x}$, kde $\widetilde{a} = \ln a$. Nové hodnoty doplníme do tabulky.

x_i	1	2	3	4
y_i	1,5	3,9	9	15
$\widetilde{x}_i = \ln x_i$	0	0,69315	1,09861	1,38629
$\widetilde{y}_i = \ln y_i$	0,40547	1,36098	2,19722	2,70805

Najdeme parametry $\widetilde{a}$ a b, aby aproximace $\widetilde{y} = \widetilde{a} + b\,\widetilde{x}$ byla nejlepší ve smyslu minimalizace součtu čtverců odchylek $\widetilde{y}_i - (\widetilde{a} + b\,\widetilde{x}_i)\,,\ i = 1,\ldots,4$.
Označíme-li matici $\boldsymbol{X}$ a vektor hodnot $\widetilde{\boldsymbol{y}}$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0,69315 \\ 1 & 1,09861 \\ 1 & 1,38629 \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} 0,40547 \\ 1,36098 \\ 2,19722 \\ 2,70805 \end{bmatrix},$$

Zpět

potom vektor $\boldsymbol{a}^+ = (\widetilde{a}, b)^\top$ minimalizující součet čtverců odchylek řeší soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X}\,\boldsymbol{a}^+ = \boldsymbol{X}^\top \widetilde{\boldsymbol{y}}\,,$$

kde

$$\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0{,}69315 & 1{,}09861 & 1{,}38629 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0{,}69315 \\ 1 & 1{,}09861 \\ 1 & 1{,}38629 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3{,}17805 \\ 3{,}17805 & 3{,}60920 \end{bmatrix}$$

a

$$\boldsymbol{X}^\top \widetilde{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0{,}69315 & 1{,}09861 & 1{,}38629 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}40547 \\ 1{,}36098 \\ 2{,}19722 \\ 2{,}70805 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}67172 \\ 7{,}11139 \end{bmatrix}.$$

Řešíme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých $\widetilde{a}, b$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3{,}17805 \\ 3{,}17805 & 3{,}60920 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{a} \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}67172 \\ 7{,}11139 \end{bmatrix}.$$

Vypočteme hodnoty $b = 1{,}67001$, $\widetilde{a} = 0{,}34108$, tj.

$$\boldsymbol{a}^+ = (\widetilde{a}, b)^\top = (0{,}34108;\ 1{,}67001\,)^\top\ .$$

Tedy

$$\widetilde{y} \cong 0{,}341084 + 1{,}67001\,x\,.$$

Vzhledem k tomu, že $a = \mathrm{e}^{\widetilde{a}} = \mathrm{e}^{0{,}34108} = 1{,}40647$, je výsledná přibližná závislost:

$$y \cong 1{,}40647\,x^{1{,}670002}\,.$$

Zpět