Matematika III
Lineární algebra

Miroslava Dubcová, Drahoslava Janovská, Daniel Turzík

Ústav matematiky

Přednášky LS 2015-2016

Obsah

Ortonormální báze

Systém vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tvoří bázi lineárního prostoru V $\iff$

1. systém vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_k$ je lineárně nezávislý ,
2. vektory $v_1, v_2, \ldots, v_k$ generují celý prostor V .

Báze $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárního prostoru V je ortonormální $\iff$

$$v_i^{\mathrm{T}} v_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \quad \ldots \quad \text{ortogonalita mezi prvky báze} \\ 1 & i = j \quad \ldots \quad \text{normalizace, tj. } v_i^{\mathrm{T}} v_i = ||v_i||^2 = 1 \end{cases}$$

Příklad Přirozená báze $\mathbb{R}^n$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \ldots \; e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

$$e_1^{\mathrm{T}} e_2 = (1, 0, \ldots, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad e_3^{\mathrm{T}} e_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$\Longrightarrow$ přirozená báze je ortonormální .

Pozor na pořadí násobení!

$$e_1 \cdot e_2^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (0, 1, 0, \ldots, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{matice } n \times n$$

Poznámka Lineární prostor buď nemá bázi ($\mathcal{C}(\langle a, b\rangle)$) nebo má nekonečně mnoho bází ($\mathbb{R}^n$) .

Příklad Najděte bázi nulového prostoru matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\mathcal{N}(A) = \{x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3,\ Ax = 0\}.$$

$$h(A) = 2,\ n = 3 \quad \Longrightarrow \quad \dim V_H = \dim \mathcal{N}(\mathrm{A}) = 1\,.$$

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^3,\ x = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}\},$$

báze např.

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{nrbo} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \ldots \text{ nekonečně mnoho bází},$$

$\dim(\mathcal{N}(\mathrm{A})) = 1$, $\mathcal{N}(A)$ je lineární podprostor $\mathbb{R}^3$.

Ortogonální podprostory

Podprostory v $\mathbb{R}^3$:

triviální: $\mathbb{R}^3, \quad \dim(\mathbb{R}^3) = 3$
a podprostor obsahující pouze nulový prvek: $\{0\}, \quad \dim(\{0\}) = 0\,,$

netriviální:
přímky p procházející počátkem, $\dim(\mathrm{p}) = 1$ a roviny ϱ procházející počátkem, $\dim(\varrho) = 2\,.$

Přímka může být ortogonální (kolmá) k jiné přímce nebo k rovině, ale nemůže být kolmá k prostoru, neboť celý prostor $\mathbb{R}^3$ je kolmý jen k podprostoru $\{0\}\,.$

Definice Dva podprostory V a W prostoru $\mathbb{R}^n$ (téhož) jsou ortogonální

$$\Longleftrightarrow$$

$$v^{\mathrm{T}} w = 0 \quad \forall v \in V \quad \text{a} \quad \forall w \in W\,.$$

Příklad: Necht V je nadrovina v $\mathbb{R}^4$ generovaná vektory $v_1 = (1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ a $v_2 = (1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$ a necht W je přímka generovaná vektorem $w_1 = (0,0,4,5)^{\mathrm{T}}$. Jsou V a W ortogonální podprostory?

$$v_1^{\mathrm{T}} w_1 = (1,0,0,0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 0\,, \qquad v_2^{\mathrm{T}} w_1 = (1,1,0,0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad V \text{ a } W \quad \text{jsou ortogonální podprostory}\,.$$

Proč ?

$$v \in V, \quad v = \alpha v_1 + \beta v_2\,, \quad w \in W, \quad w = \gamma w_1\,, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\,.$$

$$v^{\mathrm{T}} w = \left[\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^{\mathrm{T}} \cdot \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$= [(\alpha, 0, 0, 0) + (\beta, \beta, 0, 0)] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4\gamma \\ 5\gamma \end{pmatrix} = 0\,.$$

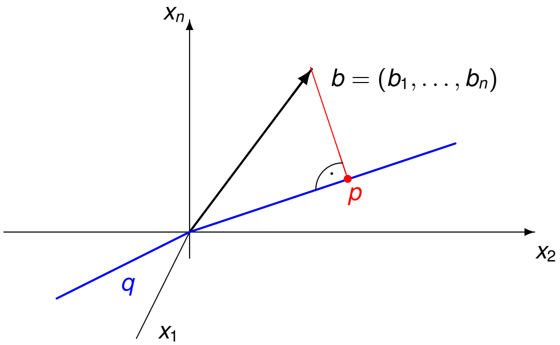
Tedy opravdu každý prvek $v \in V$ je kolmý na každý prvek v podprostoru W a podprostory jsou ortogonální . Píšeme

$$V \perp W$$

Existuje nějaký vektor, který leží ve V i W?

Proč je ortogonalita důležitá?

Příklad: Necht $b \in \mathbb{R}^n$ je dáno a hledáme vzdálenost b od dané přímky q, jejíž směrový vektor je a. Tedy hledáme na přímce q bod p, který je "nejblíže" k b (úsečka $bp \perp q$) .



Projekce

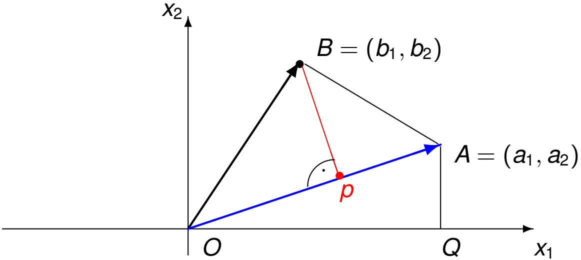
Kdybychom místo přímky měli rovinu nebo obecně libovolný podprostor S prostoru $\mathbb{R}^n$, zase můžeme hledat bod p v tomto podprostoru, který je nejblíž k b.

Bod p ... projekce bodu b na daný podprostor

Bod p je průsečík kolmé přímky procházející bodem b s daným podprostorem.

Toto je geometrický popis problému hledání řešení přeurčené soustavy rovnic, a to řešení ve smyslu nejmenších čtverců.

Idea - $\mathbb{R}^2$



Označme
$\alpha = \measuredangle\, AOQ\,,$
$\theta = \measuredangle\, BOA\,,$
$\beta = \alpha + \theta\,.$ Pak

$$\sin\alpha = \frac{a_2}{||a||}\,,\quad \cos\alpha = \frac{a_1}{||a||}\,,\qquad \sin\beta = \frac{b_2}{||b||}\,,\quad \cos\beta = \frac{b_1}{||b||}\,,$$

$$\theta = \beta - \alpha \quad\Longrightarrow\quad \cos\theta = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha \quad\Longrightarrow$$

$$\cos\theta = \frac{b_2}{||b||}\cdot\frac{a_2}{||a||} + \frac{b_1}{||b||}\cdot\frac{a_1}{||a||} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{||a||\cdot||b||} \quad \Longrightarrow$$

Kosinus úhlu libovolných dvou vektorů ... $\cos\theta = \dfrac{a^{\mathrm{T}} b}{||a||\cdot||b||}$

Jak tedy spočítáme projekci p bodu b do směru vektoru a?
Co víme

1. bod p leží na úsečce OA, tj. je nějakým násobkem vektoru a: $p = \tilde{x}a,\ \tilde{x}\in\mathbb{R}$
2. $(b-\tilde{x}a)\perp a \quad \Longrightarrow \quad a^{\mathrm{T}}(b-\tilde{x}a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a^{\mathrm{T}} b = \tilde{x}a^{\mathrm{T}} a$

$$\tilde{x} = \frac{a^{\mathrm{T}} b}{a^{\mathrm{T}} a} \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{a^{\mathrm{T}} b}{a^{\mathrm{T}} a}\cdot a \quad \ldots \quad \text{projekce bodu } b \text{ do směru vektoru } a$$

Jaká je vzdálenost bodu b od přímky ve směru vektoru a?

$$\left\|b - \frac{a^{\mathrm{T}} b}{a^{\mathrm{T}} a}\right\|^2 = \left(b - \frac{a^{\mathrm{T}} b}{a^{\mathrm{T}} a}\right)^{\mathrm{T}} \left(b - \frac{a^{\mathrm{T}} b}{a^{\mathrm{T}} a}\right) =$$

$$b^{\mathrm{T}} b - 2\frac{(a^{\mathrm{T}} b)^2}{a^{\mathrm{T}} a} + \left(\frac{a^{\mathrm{T}} b}{a^{\mathrm{T}} a}\right)^2 a^{\mathrm{T}} a = \frac{(b^{\mathrm{T}} b)(a^{\mathrm{T}} a) - (a^{\mathrm{T}} b)^2}{a^{\mathrm{T}} a} \geq 0\,.$$

$$\Longrightarrow$$

Libovolné dva vektory splňují tzv. Schwarzovu nerovnost:

$$|a^{\mathrm{T}} b| \leq ||a||\,||b|| \tag{1}$$

Poznámka Rovnost ve Schwarzově nerovnosti (1) platí $\iff$ b je násobek a. V tom případě je $b \equiv p$ a vzdálenost je 0.

Řešení přeurčené soustavy ve smyslu nejmenších čtverců

Příklad Přeurčená soustava rovnic: 3 rovnice, 1 neznámá

$$\begin{aligned} 2x &= b_1 \\ 3x &= b_2 \\ 4x &= b_3 \end{aligned}$$

Tato přeurčená soustava bude řešitelná jen tehdy, budou-li pravé strany v poměru 2:3:4. Jinými slovy řešení bude existovat jen tehdy, bude-li $b = (b_1, b_2, b_3)^{\mathrm{T}}$ ležet na přímce generované vektorem $(2, 3, 4)^{\mathrm{T}}$.

V praxi se takovéto rovnice vyskytují a musíme je řešit. Jak?

Jedna možnost je určit x z některé rovnice a ignorovat zbytek rovnic $\Longrightarrow$ jedna rovnice by byla splněna přesně, ale v ostatních by byly velké chyby - to není nejleší řešení.

Rozumnější postup: vybereme x tak, abychom minimalizovali "průměrnou" chybu v m rovnicích, obvykle součet čtverců

$$E^2 = (2x - b_1)^2 + (3x - b_2)^2 + (4x - b_3)^2 .$$

Pro přesné řešení (b leží na přímce generované vektorem $(2,3,4)^{\mathrm{T}}$) bude $E = 0$, jinak je grafem E^2 parabola s minimem v bodě, kde má funkce E^2 minimum. Jde o nejmenší čtverce, stačí spočítat stacionární bod, tj.

$$\frac{\mathrm{d}E^2}{\mathrm{d}x} = 0 \implies \tilde{x} = \frac{2b_1 + 3b_2 + 4b_3}{29} \quad \ldots \text{ řešení ve smyslu nejmenších čtverců} .$$

Obecně

$$E = ||ax - b|| = \sqrt{(a_1x - b_1)^2 + \cdots + (a_mx - b_m)^2}\,, \quad \text{t.j.}$$

$$E^2(x) = (ax - b)^{\mathrm{T}}(ax - b) = a^{\mathrm{T}}ax^2 - b^{\mathrm{T}}ax - a^{\mathrm{T}}bx + b^{\mathrm{T}}b .$$

$$(E^2(x))' = 0 \iff x = \frac{a^{\mathrm{T}}b}{a^{\mathrm{T}}a} \implies$$

řešení ve smyslu nejmenších čtverců je identické s řešením $\tilde{x}$ získaným pomocí projekce p.

Více proměnných, tj. více dimenzí. Přeurčená soustava:

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ m > n\,, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m\,.$$

Chceme minimalizovat chybu $E = ||Ax - b||$. Platí

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \dots$$

lineární kombinace sloupců $A\ \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \Longrightarrow$ dostaneme lineární prostor generovaný sloupci matice A . . . tzv.

sloupcový prostor matice A, obvykle označujeme $\mathcal{R}(A)$ (range of A) .

Soustava normálních rovnic

Náš cíl: hledáme $\tilde{x}$ tak, aby chyba řešení byla minimální ve smyslu nejmenších čtverců.

Chyba $E = ||Ax - b||$ je vzdálenost bodu b od bodu $Ax \in \mathcal{R}(A)$. Tedy najít řešení $\tilde{x}$ ve smyslu nejmenších čtverců znamená najít bod $p = A\tilde{x}$, který je nejblíž b ze všech bodů sloupcového prostoru $\mathcal{R}(A)$, tedy p musí být projekce b na $\mathcal{R}(A)$ a vektor chyby $A\tilde{x} - b$ musí být kolmý na sloupcový prostor. Jinak řečeno, každý vektor $Ay \in \mathcal{R}(A)$ musí být kolmý na vektor chyby $A\tilde{x} - b$:

$$(Ay)^{\mathrm{T}}(A\tilde{x} - b) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A\tilde{x} - A^{\mathrm{T}}b) = 0 \;\forall y \quad \Longrightarrow$$

$$A^{\mathrm{T}}A\tilde{x} - A^{\mathrm{T}}b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A^{\mathrm{T}}A\tilde{x} = A^{\mathrm{T}}b\,.$$

Řešení libovolného přeurčeného systému rovnic $Ax = b,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ m > n$, splňuje soustavu normálních rovnic

$$A^{\mathrm{T}}A\tilde{x} = A^{\mathrm{T}}b\,.$$

Věta Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ je řešením soustavy $Ax = b$, $A \in R^{m\times n}$, $m > n$, ve smyslu nejmenších čtverců právě když x řeší normální rovnice.
Navíc problém nejmenších čtverců má jediné řešení právě když hodnost $\mathrm{h}(A)$ matice A je maximální, tj. $\mathrm{h}(A) = n$.

Poznámka Je-li $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, pak

$$\mathrm{h}(A) = n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det(A^{\mathrm{T}}A) \neq 0.$$

Soustava $Ax = b$ je tedy jednoznačně řešitelná ve smyslu nejmenších čtverců právě když matice $A^{\mathrm{T}}A$ je regulární.

Z normálních rovnic dostáváme

$$\tilde{x} = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}b$$

a má-li matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ortonormální sloupce, t.j. $A^{\mathrm{T}}A = E_n$, kde E_n je jednotková matice řádu n, pak

$$\tilde{x} = A^{\mathrm{T}}b\,.$$

Příklad Řešte soustavu $Ax = b$ ve smyslu nejmenších čtverců,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^2 .$$

Sloupcový prostor matice A:

$$\mathcal{R}(A) = \left\{ v \in \mathbb{R}^3, v = \alpha(1,1,0)^{\mathrm{T}} + \beta(2,5,0)^{\mathrm{T}},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

... dvoudimenzionální podprostor $\mathbb{R}^3$, $(0,0,0)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{R}(A)$.

Vypočteme projekci $p = A\tilde{x} = A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}b$

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 29 \end{pmatrix}, \quad (A^{\mathrm{T}}A)^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 29 & -7 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Poznámka Frobeniova věta
Soustava lineárních algebraických rovnic $Ax = b$ má řešení

$$\Longleftrightarrow$$

$$h(A) = h(A|b)\,.$$

Počet řešení:

- Regulární (nesingulární) případ:
  Je-li $h(A) = h(A|b) = n \implies$ soustava má právě jedno řešení
- Nedourčená soustava
  Je-li $h(A) = h(A|b) < n \implies \dim V_h = n - h(A) > 0 \implies$ soustava má nekonečně mnoho řešení.
- Přeurčená (nekonsistentní) soustava
  $h(A) < h(A|b) \implies$ Soustava nemá řešení, můžeme najít řešení jen ve smyslu nejmenších čtverců.

Cvičení

1. Pomocí soustavy normálních rovnic najděte řešení ve smyslu nejmenších čtverců pro náledující nekonsistentní soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. **(a)** Necht

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte chybu $E^2 = ||Ax - b||^2$ a její minimum. Výsledek porovnejte se soustavou normálních rovnic $A^{\mathrm{T}} A\tilde{x} = A^{\mathrm{T}} b$.

(b) Najděte řešení $\tilde{x}$ a projekci $p = A\tilde{x}$ vektoru b na sloupcový prostor $\mathcal{R}(A)$ matice A.

(c) Ověřte, že vektor $b - p$ je kolmý na sloupce matice A.

Ortogonální matice

Ortogonální matice = čtvercová matice s ortonormálními sloupci.
Tedy nechť Q je čtvercová matice se sloupci $q_1, q_2, \ldots, q_n$

$$Q \quad \text{je ortogonální} \quad \Longleftrightarrow \quad q_i^{\mathrm{T}} q_j = \delta_{ij} = \begin{cases} = 1 \text{ pro } i = j \\ = 0 \text{ pro } i \neq j \end{cases},$$

$$Q^{\mathrm{T}} Q = \begin{pmatrix} -- & q_1^{\mathrm{T}} & -- \\ -- & q_2^{\mathrm{T}} & -- \\ & \vdots & \\ -- & q_n^{\mathrm{T}} & -- \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \ldots & q_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = E\,.$$

Vlastnosti ortogonálních matic:

- $Q^{\mathrm{T}} Q = Q Q^{\mathrm{T}} = E$
- Q je regulární, $h(Q) = n \quad \Longrightarrow \quad \exists\, Q^{-1}$,

$$Q^{\mathrm{T}} Q = E, \quad \text{tuto maticovou rovnici vynásobím maticí } Q^{-1} \text{ zprava} \quad \Longrightarrow$$

$$Q^{\mathrm{T}} Q Q^{-1} = Q^{-1} \quad \Longrightarrow \quad Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}\,.$$

Permutační matice

Uveďme měkolik typických příkladů ortogonálních matic.

- Permutační matice ... v každém řádku i sloupci je právě jedna jednička, všude jinde jsou nuly, ortogonální matice. Např.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies P \cdot P^{\mathrm{T}} = P^{\mathrm{T}} P = E, \quad P^{-1} = P^{\mathrm{T}} .$$

Proč permutační? Přehodí (permutuje) řádky nebo sloupce dané matice, např.

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

$$AP^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{pmatrix}$$

Matice rotace v $\mathbb{R}^2$

- Matice rotace v $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{G}_{12} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \implies \mathbf{G}_{12}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi \\ -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Vhodnou volbou φ lze dosáhnout toho, že se jedna ze složek vektoru $\mathbf{x}$ vynuluje. Např. zvolíme φ tak, aby se druhá složka vynulovala:

$-x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi = 0$. Nyní využijeme rovnost $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}$.

Pak

$$x_1^2\sin^2\varphi = x_2^2(1-\sin^2\varphi) \implies \sin^2\varphi = \frac{x_2^2}{x_1^2+x_2^2} \quad \text{pro } (x_1,x_2) \neq (0,0).$$

Dostaneme: $\sin\varphi = \dfrac{|x_2|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$; obdobně $\cos\varphi = \dfrac{|x_1|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$.

(úhel φ znát nepotřebujeme, stačí znát $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$).

$\mathbf{G}_{1,2}$ ... elementární matice rotace.

$\mathbf{G}_{1,2}$ je ortogonální matice:

$$\mathbf{G}_{1,2}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}_{1,2} = \mathbf{G}_{1,2}\mathbf{G}_{1,2}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

Položme

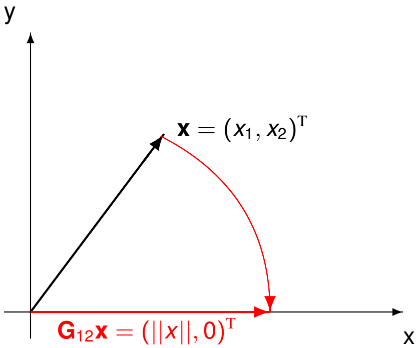
$$\sin\varphi = \frac{|x_2|}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad \text{a} \quad \cos\varphi = \frac{|x_1|}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Pak

$$\mathbf{G}_{12}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi \\ -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} + \dfrac{x_2^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \\ \dfrac{-x_1x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} + \dfrac{x_1x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{x}\| \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ortogonální matice

$$\mathbf{G}_{12}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} ||\mathbf{x}|| \\ 0 \end{pmatrix}$$



Příklad Nechť $\mathbf{x} = (3,4)^{\mathrm{T}}$. Položme $\sin\phi = \frac{4}{5}$, $\cos\phi = \frac{3}{5}$. Pak

$$\mathbf{G}_{12}\mathbf{x} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (5,0)^{\mathrm{T}}.$$

Vynásobíme-li vektor $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$ maticí $\mathbf{G}_{pq}^{\mathrm{T}}$ zprava:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}_{12}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{5}(\,3,\ 4\,)\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = (\,5,\ 0\,).$$

Položíme-li $\sin\phi = \frac{3}{5}$, $\cos\phi = -\frac{4}{5}$, dostaneme

$$\mathbf{G}_{12}\mathbf{x} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (0,-5)^{\mathrm{T}}.$$

Obdobně při násobení zprava:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}_{12}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{5}(\,3,\ 4\,)\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = (\,0,\ -5\,).$$

Householderova matice zrcadlení

- Householderova matice zrcadlení ... matice, která vynuluje více složek vektoru najednou.

$$\mathbf{H_v} = \mathbf{E} - 2\,\frac{\mathbf{v}\,\mathbf{v}^{\mathrm{T}}}{||\mathbf{v}||^2}\,, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\,.$$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{H}\,\mathbf{x} := \mathbf{H_v x}$ je vektor souměrný s vektorem $\mathbf{x}$ podle nadroviny ϱ, která je ortogonální k vektoru $\mathbf{v}$.

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{E} - 2\,\frac{\mathbf{v}\,\mathbf{v}^{\mathrm{T}}}{||\mathbf{v}||^2})^{\mathrm{T}} = \mathbf{H} \Longrightarrow \mathbf{H} \text{ je symetrická}$$

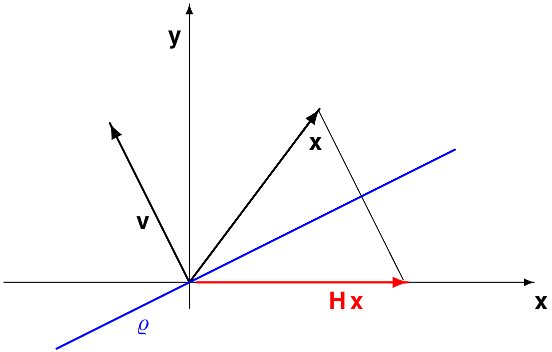
$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{H} = \mathbf{H}^2 = \mathbf{E} \Longrightarrow \mathbf{H} \text{ je ortogonální}\,.$$

Poznámka: $\mathbf{Hx} = \mathbf{x} - \mathbf{v} \quad \Longrightarrow \quad$ pro $\mathbf{v} = \mathbf{x} - ||\mathbf{x}||\mathbf{e}_1$ je $\mathbf{Hx} = ||\mathbf{x}||\mathbf{e}_1$ vektor, který má všechny složky až na první nulové.

Příklad

$$\mathbf{x} = (3,4)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{x} - ||\mathbf{x}||\mathbf{e}_1 = (-2,4)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}\,\mathbf{x} = (5,0)^{\mathrm{T}}.$$



Gram–Schmidtův ortogonalizační proces

Věta Gram–Schmidtův ortogonalizační proces

Každý lineárně nezávislý systém vektorů $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lze transformovat (převést) na systém ortogonálních vektorů pomocí tzv. Gram–Schmidtova ortogonalizačního procesu:

$v_1 := a_1$

a každé další v_i konstruuju tak, aby bylo ortogonální ke všem předchozím $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$:

$$v_i := a_i - \frac{v_1^{\mathrm{T}} a_i}{v_1^{\mathrm{T}} v_1} v_1 - \ldots - \frac{v_{i-1}^{\mathrm{T}} a_i}{v_{i-1}^{\mathrm{T}} v_{i-1}} v_{i-1},$$

a vektory $q_1, q_2, \ldots q_n, \ q_i := \dfrac{v_i}{||v_i||}$, jsou ortonormální.

Příklad

$$a_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad a_2 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}, \quad a_3 = (0,1,1)^{\mathrm{T}}, \quad v_1 := a_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$$

$$v_2 = a_2 - \frac{v_1^{\mathrm{T}} a_2}{v_1^{\mathrm{T}} v_1} v_1, \quad v_1^{\mathrm{T}} a_2 = 1, \quad ||v_1||^2 = v_1^{\mathrm{T}} v_1 = 2$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = a_3 2 - \frac{v_1^{\mathrm{T}} a_3}{v_1^{\mathrm{T}} v_1} v_1 - \frac{v_2^{\mathrm{T}} a_3}{v_2^{\mathrm{T}} v_2} v_2, \quad v_1^{\mathrm{T}} a_3 = 1, \; v_2^{\mathrm{T}} a_3 = \frac{1}{2}, \quad ||v_2||^2 = \frac{3}{2},$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Výsledné ortonormální vektory jsou

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)^{\mathrm{T}}, \quad q_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$$

LR rozklad matice

LR nebo také LU rozklad matice ilustrujme nejprve na příkladu (nalevo zápis pomocí rovnic, napravo maticový zápis):

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 + x_2 &= -2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Od 2. rovnice odečteme dvojnásobek 1. a ke 3. rovnici přičteme 1.:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 - x_2 - 2x_3 &= -4 \\ 0 + 3x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_2 - 2x_3 &= -4 \\ -4x_3 &= -8 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

Zpětný chod $\quad x_3 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_1 = 1\,.$

Vynechme pravou stranu a podívejme se, jaké operace jsme prováděli s maticí soustavy

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = R\,,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \widetilde{L} \qquad \Longrightarrow \qquad \widetilde{L} \cdot A = R\,.$$

$\widetilde{L}$ je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále, R je horní trojúhelníková matice. Matice $\widetilde{L}$ je regulární, $\det(\widetilde{\mathrm{L}}) = 1$, a tedy existuje matice $\widetilde{L}^{-1}$. Přesvědčte se, že je také dolní trojúhelníková. Dostali jsme tzv. LR–rozklad matice A:

$$A = \widetilde{L}^{-1} R \quad \Longrightarrow \quad A = LR\,,$$

kde L je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále, R je horní trojúhelníková.

Poznámka Je-li $A = L\,R$, L dolní trojúhelníková, $L_{ii} = 1$, R horní trojúhelníková, řešme soustavu

$$Ax = b \qquad \Longrightarrow \qquad L\,\underbrace{R\,x}_{y} = b\,,$$

Řešíme nejprve soustavu $Ly = b$ s trojúhelníkovou maticí a pak soustavu $Rx = y$ také s trojúhelníkovou maticí.

Pozor, LR–rozklad nemusí vždy existovat. Co uděláme, narazíme-li při Gaussově eliminaci na nulu na diagonále? Přehodíme (permutujeme) řádky nebo sloupce, to odpovídá vynásobení matice A permutační maticí P. Pak provádíme

$$P\,A = L\,R\,.$$

Toto lze, pokud původní matice není singulární. Pokud je A singulární, žádná permutace nepomůže a matice L má na diagonále jeden nebo více nulových prvků. Výsledný rozklad pak není jednoznačný.

Rozklad QR

QR–rozklad matice A je rozklad matice na součin ortogonální matice Q a horní trojúhelníkové matice R:

$$A = Q\,R\,, \qquad Q^{\mathrm{T}}Q = E, \quad R \text{ je horní trojúhelníková}$$

Řešení soustavy $Ax = b$:

$$QRx = b\,, \text{ vynásobíme } \quad Q^{\mathrm{T}} \text{ zleva} \quad \Longrightarrow$$

$$Q^{\mathrm{T}}Q\,Rx = Q^{\mathrm{T}}b\,, \qquad \Longrightarrow \qquad Rx = Q^{\mathrm{T}}b \;\ldots\; \text{soustava s trojúhelníkovou maticí}$$

Výhoda: tento rozklad vždy existuje a pro reálné matice je jednoznačný.

Nyní si ukážeme, jak lze pomocí ortogonálních matic transformovat danou matici na žádaný tvar.

Givensovy matice rovinné rotace

Matice $\mathbf{G}_{pq} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $p < q$, tvaru

$$\mathbf{G}_{p,q} = \begin{array}{cc}
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& c & \cdots & \cdots & \cdots & s &&& \\
&&& \vdots & 1 &&& \vdots &&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&& \vdots &&& 1 & \vdots &&& \\
&&& -s & \cdots & \cdots & \cdots & c &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right) &
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ \longleftarrow p \\ \\ \\ \\ \longleftarrow q \\ \\ \\ \\
\end{array} \\
\begin{array}{ccccccccccc}
&&& \uparrow &&&& \uparrow &&& \\
&&& p &&&& q &&&
\end{array} &
\end{array},$$

kde $s = \sin\phi$, $c = \cos\phi$, ϕ reálné, se nazývá Givensova matice rovinné rotace. Matice $\mathbf{G}_{pq}$ popisuje rotaci (otočení) $\mathbb{R}^n$ kolem počátku o úhel ϕ v rovině p-q.

Připomeňme: Elementární matice rotace v $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{G}_{12} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{G}_{12}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi \\ -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Vhodná volba φ $\Longrightarrow$ vynulujeme jednu ze složek vektoru $\mathbf{x}$.

Givensova matice rovinné rotace v $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{G}_{pq} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, je ortogonální matice

$$\mathbf{G}_{pq}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}_{pq} = \mathbf{G}_{pq}\mathbf{G}_{pq}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}\,.$$

Od jednotkové matice $\mathbf{E}$ se liší pouze prvky v pozicích

$$(p,p),\ (p,q),\ (q,p)\ \text{ a }\ (q,q)\,.$$

Vynásobíme-li libovolnou matici $\mathbf{A}$ maticí $\mathbf{G}_{pq}$ zleva, změní se pouze p-tý a q-tý řádek matice $\mathbf{A}$, vynásobíme-li matici $\mathbf{A}$ maticí $\mathbf{G}_{pq}$ zprava, změní se pouze p-tý a q-tý sloupec matice $\mathbf{A}$.

Matice rotace **G** pro vektor **x** $\in \mathbb{R}^3$?

Idea: vložíme matici $\mathbf{G}_{1,2}$ do jednotkové matice $\mathbf{E}_{3\times 3}$ - tři možnosti:

- Pro vhodnou volbu φ

$$\widetilde{\mathbf{G}}_{12} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \widetilde{\mathbf{G}}_{12} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- Pro vhodnou volbu φ

$$\widetilde{\mathbf{G}}_{13} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \implies \widetilde{\mathbf{G}}_{13} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Pro vhodnou volbu φ

$$\widetilde{\mathbf{G}}_{23} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \implies \widetilde{\mathbf{G}}_{23} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \widetilde{x}_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Givensovou maticí rovinné rotace lze vždy vynulovat jen jednu složku vektoru.

Nyní položme například:

$$\mathbf{G} := \widetilde{\mathbf{G}}_{13}\widetilde{\mathbf{G}}_{12} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{G}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \widetilde{\mathbf{G}}_{13}\begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\widetilde{x}}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Postupnou aplikací matic rotace se nám podařilo vynulovat dvě (všechny až na jednu) složky vektoru $\mathbf{x}$.

$\mathbf{G}_{12}$ je ortogonální matice $\Longrightarrow$ $\mathbf{G}_{12}^{-1} = \mathbf{G}_{12}^{\mathrm{T}}$

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}_{12}^{-1} = (x_1, x_2)\cdot\mathbf{G}_{12}^{-1} = (x_1, x_2)\cdot\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{(x_1)^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} + \frac{(x_2)^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, -\frac{x_1x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} + \frac{x_2x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right) = (||x||, 0)$$

Násobení vektoru $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$ zprava maticí $\mathbf{G}_{12}^{-1}$ vynuluje druhou složku vektoru $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$.

Pomocí vhodně zvolených Givensových matic lze postupně vynulovat v dané matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ prvky pod diagonálou a transformovat tak matici **A** na horní trojúhelníkový tvar. Podstatně záleží na pořadí, v němž prvky nulujeme, nebot chceme, abychom při nulování dalšího prvku dříve získané nuly nezničili.

Sestavme vždy matici $\mathbf{G}_{pq}$ $(p < q)$ tak, aby se vynulovala q-tá složka daného vektoru, a násobme postupně matici **A** zleva maticemi

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{G}_{12} & \mathbf{G}_{13} & \dots & \mathbf{G}_{1n} \\ & \mathbf{G}_{23} & \dots & \mathbf{G}_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{G}_{n-1,n} \end{array} .$$

Po provedení k násobení, $k \leq \frac{1}{2}n(n-1)$ (Givensovu rotaci neaplikujeme na prvek matice, který už nulový je), bude matice **A** v horním trojúhelníkovém tvaru **R** a matice

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_{n-1,n}\mathbf{G}_{n-2,n}\dots\mathbf{G}_{13}\mathbf{G}_{12}$$

bude ortogonální matice,

$$\mathbf{G}\,\mathbf{A} = \mathbf{R} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{G}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{R}.$$

Znázorněme si schématicky Givensovu metodu redukce matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ na horní trojúhelníkový tvar ($+$ značí prvky, které se transformací nemění, $*$ značí prvky, které se změní):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{pmatrix} \overset{\mathbf{G}_{12}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{pmatrix} \overset{\mathbf{G}_{13}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & + & + & + \\ 0 & * & * & * \\ + & + & + & + \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\overset{\mathbf{G}_{14}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & + & + & + \\ 0 & + & + & + \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix} \overset{\mathbf{G}_{23}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & + & + & + \end{pmatrix} \overset{\mathbf{G}_{24}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & + & + \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \overset{\mathbf{G}_{34}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ 0 & + & + & + \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} = \mathbf{R}.$$

Nevýhoda: Givensova matice vynuluje vždy jen jeden prvek v dané matici.

Výhoda (zejména pro práci s řídkými maticemi): Aplikujeme-li Givensovu rotaci na danou matici, pak se v této matici změní pouze dva řádky nebo sloupce. Ostatní prvky zůstanou nezměněny.

Připomeňme: Householderova matice zrcadlení

$$\mathbf{H}_{\mathbf{v}} = \mathbf{E} - 2\,\frac{\mathbf{v}\,\mathbf{v}^{\mathrm{T}}}{||\mathbf{v}||^2}\,, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\,,\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\,.$$

Je-li $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a položíme-li $\mathbf{v} = \mathbf{x} - ||\mathbf{x}||\mathbf{e}_1$, pak $\mathbf{Hx} = ||\mathbf{x}||\mathbf{e}_1$, tj. vektor $\mathbf{Hx}$ má všechny složky až na první nulové.

Cvičení Ukažte, že pro libovolné dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $||\mathbf{x}|| = ||\mathbf{y}||$, vede volba $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ na takovou Householderovu transformaci, že $\mathbf{Hx} = \mathbf{y}$ a $\mathbf{Hy} = \mathbf{x}$.

Řešení $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$,

$$\mathbf{Hx} = \mathbf{x} - 2\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})(\mathbf{x}-\mathbf{y})^{\mathrm{T}}}{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x} - (\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\frac{2(\mathbf{x}-\mathbf{y})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} = \mathbf{x} - \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y}\,,$$

protože $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$ a $\dfrac{2(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - 2\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}} = 1\,.$

Dokažte, že $\mathbf{Hy} = \mathbf{x}$.

Householderova metoda pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}\,, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}\,.$$

Najdeme $n-1$ Householderových matic $\mathbf{H}_1,\ \mathbf{H}_2,\ \dots\ ,\mathbf{H}_{n-1}$, takových, že

$$\mathbf{H\,A} := \mathbf{H}_{n-1}\cdot\dots\cdot\mathbf{H}_2\cdot\mathbf{H}_1\cdot\mathbf{A} = \mathbf{R}\,,$$

$\mathbf{R}$ je horní trojúhelníková matice, a pak řešíme soustavu s trojúhelníkovou maticí:

$$\mathbf{H\,A} = \mathbf{R}\,, \quad \mathbf{H} \quad \text{je ortogonální, tedy} \quad \mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \mathbf{H}^{-1} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{R}\,.$$

$$\mathbf{H\,Ax} = \mathbf{Hb} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{Rx} = \mathbf{Hb}$$

Opět si schématicky znázorněme Householderovu metodu redukce matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ na horní trojúhelníkový tvar ($+$ značí prvky, které se transformací nemění, $*$ značí prvky, které se změní):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{H}_1} \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1} \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{H}_3\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1} \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ 0 & + & + & + \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} = \mathbf{R}.$$

$$\mathbf{H} := \mathbf{H}_3\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1\,, \qquad \mathbf{HA} = \mathbf{R}\,.$$

Výhoda: Householderova matice vynuluje vždy celý sloupec matice až na jeden prvek.

Nevýhoda (zejména pro práci s řídkými maticemi): Aplikujeme-li Householderovu metodu na danou matici, pak se v této matici všechny prvky, kromě právě vynulovaných, zaplní nebo změní.

Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Definice Vlastním číslem matice **A** (reálné nebo komplexní) se nazývá každé (obecně komplexní) číslo λ, splňující pro některý nenulový vektor **x** rovnici

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}\,,$$

$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ... vlastní vektor matice **A** příslušný k vlastnímu číslu λ
Množina všech vlastních čísel matice **A** ... spektrum matice **A**

$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ... maticová rovnice pro neznámý vektor **x**

$\mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ musí být singulární $\Longrightarrow$

$\underbrace{\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})} = 0$ ... charakteristická rovnice matice **A**

charakteristický polynom matice **A** = polynom stupně n:

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = (-1)^n(\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \cdots + p_n)\,, \quad \text{kde}$$

$$\begin{aligned} -p_1 &= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \text{stopa matice } \mathbf{A} \\ p_n &= (-1)^n \det \mathbf{A} \end{aligned}$$

Pozor! Vlastní čísla reálné matice mohou být imaginární .

Příklad: Vypočtěte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -5 & -\lambda \end{pmatrix} \implies \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

Charakteristická rovnice: $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \implies \lambda_1 = 1 + 2\mathrm{i}\,, \quad \lambda_2 = 1 - 2\mathrm{i}\,,$
vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou navzájem komplexně sdružená.

Vypočteme vlastní vektor $\mathbf{x}_1$ příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1 + 2\mathrm{i}$, tj. řešíme soustavu se singulární maticí :

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}\,,\ \mathbf{x}_1 = (h_1, h_2) \neq \mathbf{0}\,, \quad \text{tedy soustavu}$$

$$\begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} & 1 \\ -5 & -1-2\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení, ale my chceme jen jeden vlastní vektor. Zvolme např. $h_1 = 1$, pak $h_2 = -1 + 2\mathrm{i}$. Jsou-li vlastní čísla komplexně sdružená, jsou také komplexně sdružené vlastní vektory.
Dostáváme

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Odhad spektrálního poloměru

Odhad spektrálního poloměru – Geršgorinova věta
Necht $\mathbf{A} = (a_{jk})$ je čtvercová matice $n \times n$. Necht

$$K_j = \{\mu \in \mathbb{C},\ |\mu - a_{jj}| \le \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{n} |a_{jk}|\}$$ je kruh se středem S_j a poloměrem r_j,

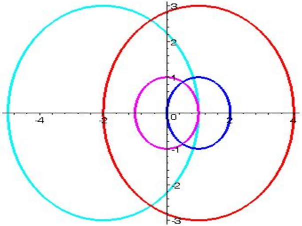
$$S_j = a_{jj}\,,\ r_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{n} |a_{jk}|\,,$$ t.j poloměr r_j kruhu K_j je roven součtu absolutních hodnot mimodiagonálních prvků v $j-$tém řádku.

Pak všechna vlastní čísla matice **A** leží ve sjednocení kruhů $\bigcup_{j=1}^{n} K_j$.

Numerické metody výpočtu vlastních čísel a vlastních vektorů jsou založeny na LU nebo QR rozkladu matice **A**.

Příklad

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{rclrcl} S_1 & = & 1 & r_1 & = & 3 \\ S_2 & = & 1 & r_2 & = & 1 \\ S_3 & = & 0 & r_3 & = & 2 \\ S_4 & = & -2 & r_4 & = & 3 \end{array}$$



Vlastní čísla jsou

$$1.126575852 \pm 0.7768133722\,\mathrm{i}, \quad -1.126575852 \pm 1.391009448\,\mathrm{i}\,.$$

Všechna leží v množině $M = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$.

Singulární hodnoty matice

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \neq n$ ... libovolná obdélníková matice

Pro obdélníkovou matici není pojem vlastního čísla definován, ale ...

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \text{ je čtvercová}$$

$$\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \text{ je symetrická}$$

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 \geq 0 \; \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \text{ je pozitivně semidefinitní}$$

Vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ matice $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ jsou reálná, nezáporná. Zapišme je ve tvaru $\lambda_k = \sigma_k^2$, $\sigma_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, n$. Čísla

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$ se nazývají singulární hodnoty matice $\mathbf{A}$.

Pro nejmenší a největší singulární hodnotu matice $\mathbf{A}$ platí:

$$\sigma_1 = \max_{\mathbf{0}\neq\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}, \qquad \sigma_n = \min_{\mathbf{0}\neq\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Věta Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ libovolná matice. Pak

- existují ortogonální matice **U** typu $m \times m$ a ortogonální matice **V** typu $n \times n$ takové, že matice $\mathbf{S} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{V}$ typu $m \times n$ má "diagonální"tvar

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r), \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0,$$

  kde $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ jsou nenulové singulární hodnoty matice **A** a r je hodnost matice **A**;
- nenulové singulární hodnoty matice $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ jsou rovněž čísla $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$.

Rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}$ ... singulární rozklad matice **A**.

Poznámka $\mathbf{S} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{V}$

- sloupce matice **U** ... m ortonormálních vlastních vektorů symetrické matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ typu $m \times m$,
- sloupce matice **V** ... n ortonormálních vlastních vektorů symetrické matice $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ typu $n \times n$.

Numerický výpočet

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad m \geq n \text{ (w.l.o.g.)}$$

Golubova-Reinschova (Golubova-Kahanova) metoda: dva kroky

- bidiagonalizace matice **A** pomocí Householderových matic zrcadlení:

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{J}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_0 = \begin{pmatrix} x & x & & & 0 \\ & x & x & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & x \\ 0 & & & & x \end{pmatrix}.$$

Po n redukčních krocích dostaneme (horní) dvoudiagonální matici $\mathbf{J}^{(0)}$ typu $m \times n$

$$\mathbf{J}^{(0)} = \mathbf{P}_n \mathbf{P}_{n-1} \dots \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \dots \mathbf{Q}_{n-2},$$

$\mathbf{P}_k$, $\mathbf{Q}_k$ jsou Householderovy matice zrcadlení.

$$\mathbf{Q} := \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_{n-2}\,,\quad \mathbf{P} := \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\cdots\mathbf{P}_n\,,\quad \mathbf{P} \text{ a } \mathbf{Q} \;\ldots\; \text{ortogonální}\,,$$

$$\mathbf{J}^{(0)} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q},\quad (\mathbf{J}^{(0)})^{\mathrm{T}}\mathbf{J}^{(0)} = \mathbf{J}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_0 = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q}\,.$$

Matice $\mathbf{J}_0$ a $\mathbf{A}$ jsou podobné a mají tedy tytéž singulární hodnoty. Zbývá provést singulární rozklad dvoudiagonální matice $\mathbf{J}_0$.

- singulární rozklad dvoudiagonální matice $\mathbf{J}_0$, tj. iterační diagonalizace pomocí jisté varianty QR metody s posuny spektra s využitím vhodných Givensových matic rovinné rotace

$$\mathbf{J}_0 \longrightarrow \mathbf{J}_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathbf{D}\,,\quad \text{kde}\quad \mathbf{D}\ \text{je diagonální}\,,\ \mathbf{J}_{k+1} = \mathbf{S}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_k\mathbf{T}_k\,,$$

$\mathbf{S}_k$ a $\mathbf{T}_k$ jsou ortogonální matice. Matice $\mathbf{T}_k$ vybíráme tak, že posloupnost třídiagonálních matic $\mathbf{M}_k = \mathbf{J}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_k$ konverguje k diagonální matici, kdežto matice $\mathbf{S}_k$ vybíráme tak, aby všechny matice $\mathbf{J}_k$ byly ve dvoudiagonálním tvaru.

Metoda je rychlá a numericky stabilní. Podrobnostmi se nebudeme zabývat.

Řešení soustavy lineárních rovnic ve smyslu nejmenších čtverců

Připomeňme

Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je řešením soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ve smyslu nejmenších čtverců právě když $\mathbf{x}$ řeší normální rovnice

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}x = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}\,.$$

Víme také, že soustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je jednoznačně řešitelná ve smyslu nejmenších čtverců právě když matice $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ je regulární.

Z normálních rovnic dostáváme

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}\,.$$

Řešení normálních rovnic - teorie

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}, \quad \mathbf{c} := \mathbf{A}^T\mathbf{b}, \quad \mathbf{A}^T\mathbf{A} \quad \text{regulární} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{c}$$

Spektrální analýza matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

vlastní čísla $\lambda_i > 0$, vlastní vektory $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$, $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \dots$ báze $\mathbb{R}^n$ $\Longrightarrow$

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i, \qquad \mathbf{c} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{v}_i$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}^T\mathbf{A}\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i\Big) &= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{v}_i \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \mathbf{v}_i &= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{v}_i \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \alpha_i = \frac{1}{\lambda_i}\gamma_i\,, \quad i = 1, \dots, n.$$

Co se skrývá za poslední rovností?

Nechť vlastní čísla $\lambda_i > 0,\ i = 1, \dots, n$, matice $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ jsou taková, že λ_n je řádově několikrát menší než ostatní vlastní čísla:

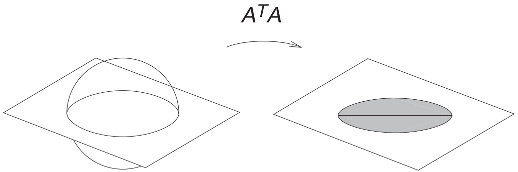
$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{n-1} >> \lambda_n > 0.$$

Matice $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ zobrazí jednotkovou sféru v $\mathbb{R}^n$ na elipsoid s osami ve směrech vlastních vektorů $\mathbf{v}_i$. Délka poloosy ve směru $\mathbf{v}_n$ je mnohem menší, než ostatní délky poloos, což znamená, že při zobrazení $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ je n–tá složka libovolného vektoru jednotkové délky zanedbatelná a elipsoid tedy leží v podstatě v $\mathbb{R}^{n-1}$.

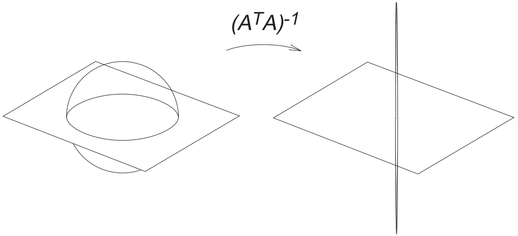
Při řešení normálních rovnic nás zajímá inverzní zobrazení $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}$. To má stejné vlastní vektory, ale vlastní čísla mají převrácenou hodnotu:

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{v}_i = \frac{1}{\lambda_i}\mathbf{v}_i.$$

Protože $\dfrac{1}{\lambda_n}$ je mnohem větší než ostatní $\dfrac{1}{\lambda_i}$, je příslušný elipsoid v podstatě jednodimenzionální.



Zobrazení jednotkové sféry maticí $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$; $\quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{n-1} >> \lambda_n > 0$



Zobrazení jednotkové sféry maticí $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}$; $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{n-1} >> \lambda_n > 0$

Numerické řešení normálních rovnic

Jaká je v tomto případě chyba výpočtu $E = \|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}\|$?

V konečné počítačové aritmetice může být vektor $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ libovolně nepřesný, protože jednou ztracené cifry nelze získat zpět, a tedy všechny složky kromě poslední jsou zničené nebo úplně ztracené.

Numerické řešení $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$:

- pomocí Choleského rozkladu symetrické, pozitivně definitní matice $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$. Nevýhoda: museli bychom nejprve explicitně vyčíslit matici $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$, tj. vyčíslit mnoho skalárních součinů, čímž již matice $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ může být zatížena značnou chybou. Vyplatí se tedy použít nějakou metodu, která nevyžaduje vytvoření matice $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$, ale pracuje přímo s maticí $\mathbf{A}$.
- iterační metody.

Ztrátu platných cifer numerického výpočtu charakterizuje tzv. číslo podmíněnosti matice, které je v tomto případě rovno

$$\kappa(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_n}.$$

Příklad

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = (1, 1, 1, 1)^T$$

$\mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}} = \widehat{\mathbf{b}}$

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32,1 \\ 22,9 \\ 33,1 \\ 30,9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = (9,2; -12,6; 4,5; -1,1)^T$$

$\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8,1 & 7,2 \\ 7,08 & 5,04 & 6 & 5 \\ 8 & 5,98 & 9,98 & 9 \\ 6,99 & 4,99 & 9 & 9,98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = (-5,79; 12,02; -1.57, 2.57)^T$$

Relativní chyba:

$$\varepsilon_{rel}(\widehat{\mathbf{b}}) = \frac{\|\widehat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} = 0,003, \qquad \varepsilon_{rel}(\widehat{\mathbf{x}}) = 8,2$$

$$\varepsilon_{rel}(\widetilde{\mathbf{A}}) = \frac{\|\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} = 0,009, \qquad \varepsilon_{rel}(\widetilde{\mathbf{x}}) = 6,64$$

Matice $\mathbf{A}$ je symetrická, $\det(\mathbf{A}) = 1$, ale $\kappa(\mathbf{A}) = 4488$

Řešení normálních rovnic s využitím singulárního rozkladu

Necht $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^{\mathrm{T}}$, $\quad \mathbf{x} = \arg\min_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n} ||\mathbf{Ay} - \mathbf{b}|| \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{SV}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$, kde $\mathbf{S} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_p)$, $p = \min(m, n)$. Necht hodnost matice $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = r < p$. Pak $\sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_p = 0$, matice S je singulární a inverzní matice neexistuje. Vynásobíme-li však druhou rovnici maticí $\mathbf{S}^+$ zleva,

$$\mathbf{S}^+ = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sigma_r} \end{pmatrix},$$

dostaneme pro $\mathbf{x}$ soustavu $\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{S}^+\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$ s ortogonální maticí soustavy $\mathbf{V}^{\mathrm{T}}$. Matice $\mathbf{S}^+$ je tzv. Mooreova-Penroseova pseudoinverzní matice k matici $\mathbf{S}$. Pseudoinverzemi v obecném případě se zde nebudeme zabývat. Srovnání:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}, \quad \kappa(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_r} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_r}\right)^2 = (\kappa(\mathbf{A}))^2 \quad \Longrightarrow$$

přímým řešením normálních rovnic ztratíme dvakrát více platných cifer než při aplikaci SVD.

Rovnici $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^{\mathrm{T}}$ lze přepsat ve tvaru tzv. singulárního rozvoje matice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^{\mathrm{T}}, \quad \mathrm{h}(\mathbf{A}) = r, \quad \mathrm{h}(\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^{\mathrm{T}}) = 1 \quad \Longrightarrow$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \mathbf{Ax} = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} (\mathbf{v}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{x} \sigma_i) \mathbf{u}_i \ \ldots$$

lineární kombinace vektorů $\mathbf{u}_i$, $i = 1, \ldots, r$.

Aplikace : Komprese dat

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ... obsahuje naměřená data. Hledáme aproximaci této matice maticí $\mathbf{B}$ takovou, že $h(\mathbf{B}) = k < \min(m, n)$ a matice $\mathbf{B}$ zachytí nejdůležitější informace obsažené v datech, tj. v matici $\mathbf{A}$. Kdybychom například chtěli, aby hodnost matice $\mathbf{B}$ byla rovna jedné, položíme $\mathbf{B} = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^{\mathrm{T}}$.

Pozor! Různá volba k ovlivní kvalitu získaných výsledků.

Příklad Chceme digitalizovat fotografii tak, že obraz nahradíme maticí 24×24 pixelů. Prvky matice jsou buď 0 (černá buňka) nebo 1 (bílá buňka). S přesností na 4 desetinná místa získáme 16 nenulových singulárních hodnot, všechny ostatní jsou s touto přesností 0:

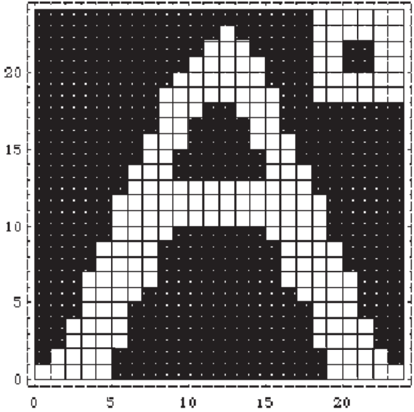
$9,5403$	$6,6288$	$5,6369$	$3,4756$	$2,7385$	$2,2023$	$1,5835$	$1,5566$
$1,4207$	$1,2006$	$0,9905$	$0,9258$	$0,7479$	$0,6744$	$0,6122$	$0,4698$

Hledáme k tak, aby relativní chyba obrazu nebyla větší než 10%, relativní chyba

$$e(k) = 1 - \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{16} \sigma_i^2}}$$

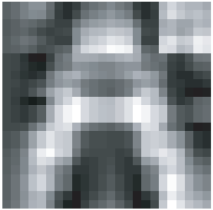
Konkrétně: $e(2) = 0,18$, $e(3) = 0,09 \Longrightarrow$ tři členy singulárního rozvoje matice $\mathbf{A}$, $\Longrightarrow$

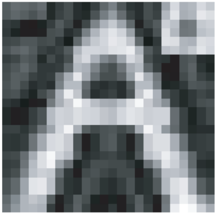
$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^{\mathrm{T}}, \quad \mathrm{h}(\mathbf{B}) = 3$$

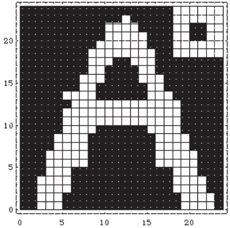


Originální fotografie

Řešení normálních rovnic s využitím singulárního rozkladu







$k = 3$; $k = 5$; $k = 5$, ale prvky $\mathbf{B}$ jsou zaokrouhleny na 0 nebo 1

Literatura

- Turzík D. et all: Matematika II, VŠCHT Praha, 2002.
- Kubíček M., Dubcová M., Janovská D.: Numerické metody a algoritmy, VŠCHT Praha, 2005 (second edition).
- Fiedler M.: Speciální matice a jejich použití v numerické matematice, SNTL, Praha, 1981 .
- Golub G., Van Loan Ch: Matrix computations, The Johns Hopkins University press, Baltimore, 1996 (third edition) .
- Horn R. A. , Johnson Ch. R.: Matrix analysis, Cambridge University Press, 1985 .
- Wilkinson J. H. and Reinsch C.: Linear Algebra, volume II of Handbook for Automatic Computation, SIAM Review 14, 658 (1972).
- Wilkinson J. H., Reinsch C.: Handbook for Automatic Computation, Volume II, Linear Algebra, Part 2, Springer, 1971, ISBN: 0387054146.