Matematika III
Základy vektorové analýzy

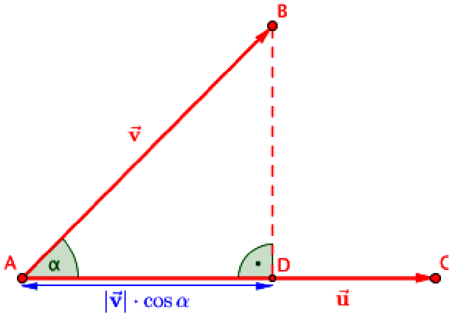
Miroslava Dubcová, Drahoslava Janovská, Daniel Turzík

Ústav matematiky VŠCHT Praha

Obsah

Skalární součin

Vektorový prostor $(V, +, \cdot)$ ... Množina V, na které jsou definovány dvě operace, a to sčítání $(+)$ a násobení reálným číslem $(\cdot)$, které splňují 8 axiomů (komutativita, asociativita, distributivita, nulový a opačný prvek vzhledem ke sčítání a jednotkový prvek vzhledem k násobení reálným číslem).



v $\mathbb{R}^2$

Skalární součin:

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\Longrightarrow \qquad u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \in \mathbb{R},$$

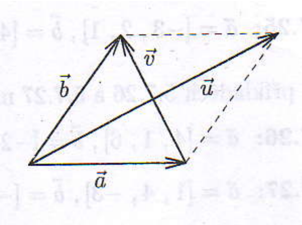
$||v|| \cdot \cos\alpha$ ... kolmý průmět vektoru v do směru vektoru u,

$u \cdot v = ||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos\alpha$

Vlastnosti skalárního součinu:
Necht V je vektorový prostor, $a, b \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$
\begin{aligned}
a \cdot a &\geq 0 \quad \forall a \in V, \quad a \cdot a = 0 \Leftrightarrow \; a = 0 \\
a \cdot b &= b \cdot a \\
a \cdot (b + c) &= a \cdot b + c \cdot d \\
(\alpha\, a) \cdot (\beta\, b) &= (\alpha\, \beta)\, a \cdot b \\
a \cdot b = 0 &\Leftrightarrow a = 0 \;\vee\; b = 0 \;\vee\; \underbrace{a \perp b}_{\cos\frac{\pi}{2} = 0}
\end{aligned}
$$

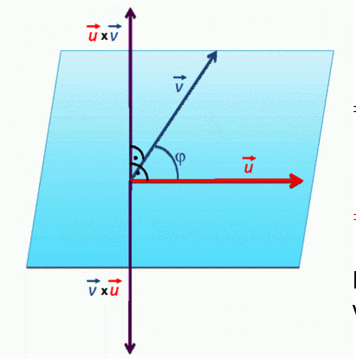
Příklad Dokažte, že úhlopříčky v kosočtverci jsou k sobě kolmé.



Dvě sousední strany v kosočtverci lze považovat za dva vektory a, b. Vektory a, b jsou lineárně nezávislé a $||a|| = ||b|| \neq 0$. Jestliže i úhlopříčky v kosočtverci uvažujeme jako vektory u a v, je $u = a + b$, $u \neq 0$, $v = b - a$, $v \neq 0$. Potom $u \cdot v = (a + b) \cdot (b - a) = -||a||^2 + ||b||^2 = 0$, a tedy vektory u a v jsou k sobě kolmé.

Vektorový součin

Vektorový součin jen pro vektory v $\mathbb{R}^3$, t.j. $u \in \mathbb{R}^3$, $v \in \mathbb{R}^3$. Necht
$\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$.



$$w = u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2, -u_1 v_3 + u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1) \in \mathbb{R}^3.$$

Plocha rovnoběžníka (φ je menší z úhlů, které vektory svírají)

$$\underbrace{||u \times v||} = ||u|| \cdot ||v|| \cdot \sin \varphi \,.$$

plocha rovnoběžníka určeného vektory u a v

Vlastnosti vektorového součinu

Cvičení Pro $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, $k \in \mathbb{R}$, dokažte:

$$
\begin{aligned}
a \times 0 &= 0, \quad a \times a = 0 \\
a \times b &= -(b \times a) = -b \times a = b \times (-a) \\
a, b \text{ lineárně závislé vektory} &\Rightarrow a \times b = 0 \\
a \times (b + c) &= a \times b + a \times c \\
(k\,a) \times b &= k\,(a \times b) = a \times (k\,b)
\end{aligned}
$$

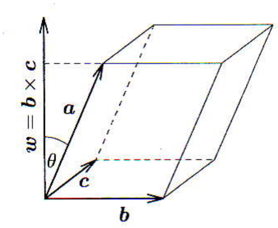
Cvičení Dokažte

$$
\begin{aligned}
&\vec{i} \times \vec{i} = 0, \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0, \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0 \\
&\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.
\end{aligned}
$$

Poznámka $a \times b = ||a|| \cdot ||b|| \cdot \sin\alpha \cdot \underbrace{n}_{\text{jednotkový normálový vektor}}, \quad \text{kde } \alpha \in \langle 0, \pi \rangle\,,$

Cvičení Dokažte, že vektor $u \times v$ je kolmý k oběma vektorům u a v.

Smíšený součin



Smíšený součin: $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, pak

$$a \cdot (b \times c) \in \mathbb{R}\,.$$

$V = |a \cdot (b \times c)|$ ... objem rovnoběžnostěnu, jehož tři hrany vycházejí z téhož vrcholu a jsou určeny vektory a, b, c.

Cvičení Dokažte, že pro vektory $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ platí

$$a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b)\,,$$

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\,.$$

Gradient

Definice Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, bod $X_0 \in \mathcal{D}(f)$. Vektor

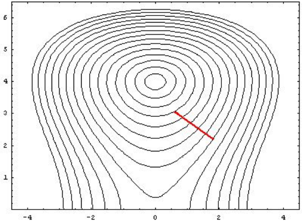
$$\operatorname{grad} f(X_0) \equiv \nabla f(X_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \right),$$

pokud všechny tyto parciální derivace existují, nazýváme gradientem funkce f v bodě X_0 .

Notace:

$$\nabla \ \dots \ \text{operátor nabla} \ \dots \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

Poznámka Gradient je vektor, který udává směr nejrychlejšího růstu funkčních hodnot. Ukažme si, že gradient funkce je vždy kolmý na vrstevnice této funkce.



★ Normálový vektor ke křivce

Věta Nechť je dána rovnice $F(x, y) = 0$ a bod (x_0, y_0), který ji splňuje, tj. $F(x_0, y_0) = 0$. Nechť $\operatorname{grad} F(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Pak body (x, y) z okolí bodu (x_0, y_0), které splňují rovnici $F(x, y) = 0$, tvoří jistou křivku procházející bodem (x_0, y_0), jejíž normálový vektor v tomto bodě je právě vektor $\operatorname{grad} F(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$.

Důkaz Nechť například $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.Pak na okolí bodu (x_0, y_0) je rovnicí $F(x, y) = 0$ implicitně definovaná funkce $y = f(x)$. Derivace této funkce v bodě x_0, a tedy směrnice k tečny k dané křivce v bodě (x_0, y_0), je dána vztahem

$$k = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} .$$

Tedy vektor $\left(-\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \right)$ je směrovým vektorem tečny ke grafu f v bodě (x_0, y_0), a tedy k němu kolmý vektor

$$\operatorname{grad} F(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

je normálovým vektorem vrstevnice v bodě (x_0, y_0) .

Derivace ve směru

Necht $f = f(x, y)$, $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : \; ||a|| = 1$, $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}(f)$

Derivace f ve směru vektoru a v bodě (x_0, y_0):

$$D_a f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + ta_1, y_0 + ta_2) - f(x_0, y_0)}{t},$$

pokud limita existuje. Tedy derivace f ve směru jednotkového vektoru a popisuje rychlost stoupání nebo klesání hodnot funkce f ve směru tohoto vektoru.

Poznámka Pokud bychom uvažovali místo jednotkového vektoru a nějaký jeho α násobek, změní se hodnota limity právě $\alpha-$krát:

$$D_{\alpha a} f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \alpha \cdot \frac{f(x_0 + t\alpha a_1, y_0 + t\alpha a_2) - f(x_0, y_0)}{\alpha t} = \alpha D_a f(x_0, y_0).$$

Pokud budeme počítat derivaci ve směru libovolného vektoru v, budeme touto derivací rozumět derivaci ve směru jednotkového vektoru příslušného k v, tedy $a := \dfrac{v}{\|v\|}$.

Věta Nechť $f \in \mathcal{C}^1(G)$, kde $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $X_0 = (x_0, y_0) \in G$, $a \in \mathbb{R}^n$, $||a|| = 1$. Pak

$$D_a f(X_0) = \underbrace{\nabla f(X_0) \cdot a}_{\text{skalární součin}} = ||\nabla f(X_0)|| \cdot ||a|| \cdot \cos\varphi \,. \qquad (1)$$

Položíme-li $a := \dfrac{\nabla f(X_0)}{||\nabla f(X_0)||}$, je a jednotkový vektor, $||a|| = 1$, a

$$D_a f(X_0) = ||\nabla f(X_0)|| \;\Rightarrow\; \cos\varphi = 1 \;\Rightarrow\; \varphi = 0\,.$$

Tedy $D_a f(X_0)$ bude největší, pokud a bude jednotkový vektor příslušný gradientu f v bodě X_0.

Cvičení Ukažte, že pro funkci dvou proměnných je $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ derivací ve směru vektoru $e_1 = (1, 0)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ je derivací ve směru vektoru $e_2 = (0, 1)$.

Poznámka Obecně pro funkci n proměnných $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = D_{e_i} f(X_0)\,.$$

Příklad Vypočtěte derivaci funkce $f(x,y)=x^2y-xy^2$ ve směru vektoru a v bodě $(1,2)$; a je jednotkový vektor příslušný vektoru $v=(3,4)$.

Řešení $||v||=5 \;\Rightarrow\; a=\frac{1}{5}(3,4)$, f je spojitá, spojitě diferencovatelná,

$$\operatorname{grad} f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=(2xy-y^2,x^2-2xy)\,,$$

$$D_a f(1,2)=\nabla f(1,2)\cdot a=(0,-3)\cdot\frac{1}{5}(3,4)=-\frac{12}{5}\,.$$

Příklad $f(x,y,z)=x^2+x\ln z-y^3$. Vypočtěte $\nabla f(1,2,\mathrm{e})$ a derivaci ve směru gradientu v bodě $(1,2,\mathrm{e})$.

Řešení:

$$\nabla f(x,y,z)=(2x+\ln z,-3y^2,\frac{x}{z}),\quad \nabla f(1,2,\mathrm{e})=(3,-12,\frac{1}{\mathrm{e}})\,.$$

Derivace ve směru gradientu v bodě $(1,2,\mathrm{e})$ je

$$D_a f(1,2,\mathrm{e})=||\nabla f(1,2,\mathrm{e})||=\sqrt{9+144+\frac{1}{\mathrm{e}^2}}\doteq 12.37478627.$$

Příklad Vypočtěte derivaci funkce $f(x,y) = \sqrt[3]{x(y-1)^2}$ ve směru vektoru $a = \frac{1}{5}(3,-4)$ v bodě $X_0 = (0,1)$.

Řešení f je spojitá, není v bodě $(0,1)$ spojitě diferencovatelná, tedy počítám podle definice.

$$D_a f(0,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t\,\frac{3}{5}, 1-t\,\frac{4}{5}) - f(0,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{\frac{3}{5}\,t\cdot\frac{16}{25}\,t^2} - 0}{t} \doteq 0,726848$$

Poznámka ★ Gradient vektorového pole Mějme dáno vektorové pole

$$v(x,y,z) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z)),$$

které je spojité a spojitě diferencovatelné na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^3$. Pak gradient vektorového pole v definujeme jako tenzorový součin vektorů ∇ a v,

$$\mathrm{grad}\, v = \nabla \otimes v = (\nabla_j v_i) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right), \quad i,j = 1,2,3.$$

Gradient vektorového pole je tenzorové pole 2. řádu, jehož souřadnice tvoří prvky Jacobiovy matice funkcí $v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z)$. Tedy

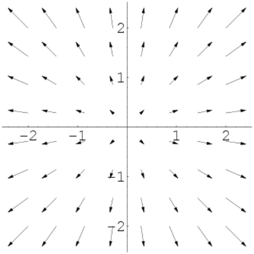
$$\mathrm{grad}\, v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

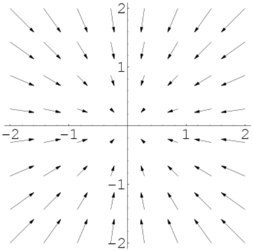
Divergence

Divergence a rotace jsou vektorové operátory, jejichž vlastnosti jsou odvozeny z pozorování chování vektorového pole tekutiny nebo plynu.

Divergenci vektorového pole si lze představit tak, že vektorové pole F udílí rychlost toku kapaliny. Jak se rychlost toku zvyšuje, kapalina expanduje pryč z počátku. V tomto případě je divergence vektorového pole kladná (obr. vlevo), $\mathrm{div}\, F > 0$.

Jestliže vektorové pole představuje tekutinu, která teče tak, že se stlačuje do počátku, divergence tohoto vektorového pole je záporná $\mathrm{div}\, F < 0$, dochází ke kompresi tekutiny (obr. vpravo).





$F := F(x, y)$ ... dvoudimenzionální vektorové pole rychlosti
$F := F(x, y, z)$ ... vektorové pole rychlosti v třídimenzionálním prostoru

Divergence vektorového pole měří expanzi nebo kompresi vektorového pole v daném bodě, neudává, ve kterém směru se expanze nebo komprese děje $\Longrightarrow$ divergence je skalár

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad F = (F_1, F_2, F_3), \quad \mathrm{div}\, F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Pak divergence je skalární součin vektorů ∇ a F,

$$\nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_1, F_2, F_3) = \frac{\partial}{\partial x} F_1 + \frac{\partial}{\partial y} F_2 + \frac{\partial}{\partial z} F_3$$

Příklady

Příklad 1. $F(x,y,z) = (-y, xy, z) \implies \operatorname{div} F = 0 + x + 1 = x + 1$

Příklad 2. $F(x,y,z) = (x,y,z) \implies \operatorname{div} F = 1 + 1 + 1 = 3 \ldots$ kladná konstanta. V tomto případě nezávisí divergence na volbě bodu (x,y,z). Tekutina expanduje.

Příklad 3. Vypočtěme divergenci vektorového pole

$$F(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \qquad (x,y,z) \neq (0,0,0).$$

Řešení $\operatorname{div} F(x,y,z) =$

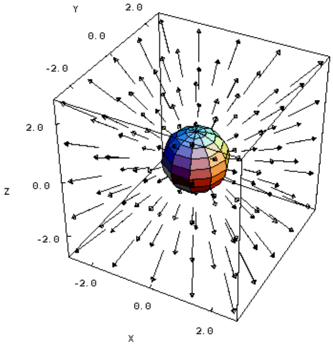
$$= \frac{\partial}{x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{\partial}{y}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{\partial}{z}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

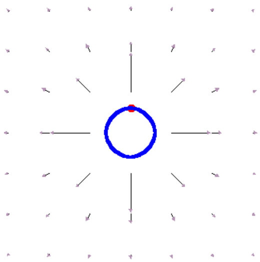
$$= \frac{(x^2+y^2+z^2) - 3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{(x^2+y^2+z^2) - 3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{(x^2+y^2+z^2) - 3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$= \frac{3(x^2+y^2+z^2) - 3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0$$

Tedy pokud nejsme v počátku, není tok ani expandující ani kontrahující, $\operatorname{div} F = 0$.

Ponořme do kapaliny kuličku upevněnou v počátku a uvažujme vektorové pole z Příkladu 2. Tekutina proudí pryč od kuličky. Protože má vektorové pole kladnou divergenci všude, bude tok vektorového pole pryč od kuličky, i když kuličku posuneme z počátku.
Vlevo na obr. je třídimenzionální vektorové pole z Příkladu 2, vpravo je dvoudimenzionální vektorové pole z Příkladu 4.





Závislost na dimenzi

Příklad 4. Dvoudimensionální verze vektorového pole z Příkladu 3.

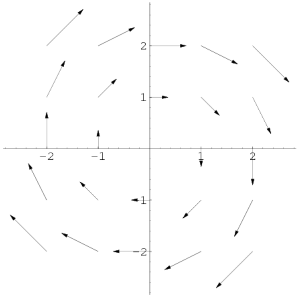
$$F(x,y) = \frac{(x,y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} F(x,y) &= \frac{\partial}{x}\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{\partial}{y}\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\
&= \frac{(x^2+y^2)-3x^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} + \frac{(x^2+y^2)-3y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} \\
&= \frac{2(x^2+y^2)-3(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}} = \frac{-1}{(x^2+y^2)^{3/2}} < 0
\end{aligned}$$

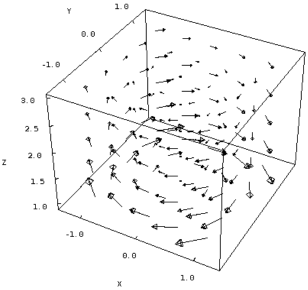
Všude kromě počátku je $\operatorname{div} F(x,y) < 0$. Tekutina se stlačuje, i když proudí "ven". Vložíme-li kruh do proudící tekutiny, proudí tekutina do kruhu rychleji, než z kruhu

Rotace

Představa vektorového operátoru rotace vychází z myšlenky, jak může kapalina nebo plyn rotovat (cirkulovat).



Rotace 2d vektorového pole



Rotace vektorového pole ve 3d

F ... vektorové pole, které reprezentuje tok tekutiny

Vložme do tekutiny malou kuličku a upevněme její střed $\implies$ kulička se může otáčet v libovolném směru kolem svého středu, ale nemůže se hýbat. Tato rotace měří rotaci $\mathrm{rot}\, F$ vektorového pole F v bodě ve středu (malé) kuličky ... mikroskopická rotace (cirkulace) vektorového pole F. Rotace je vektor, $\mathrm{rot}\, F \in \mathbb{R}^3$, který směřuje podél osy rotace a jeho orientaci určíme podle pravidla pravé ruky.

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (F_1, F_2, F_3) =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_2 & F_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k},$$

kde $\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

Příklady

Příklad $F(x,y,z) = (-y, xy, z)$. Vypočtěte $\operatorname{rot} F$.

$$\operatorname{rot} F == \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y & xy & y \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0-0) - \mathbf{j}(0-0) + \mathbf{k}(y+1) = (0,0,y+1)\,.$$

Příklad $F(x,y,z) = (y, x^2, -z)$. Vypočtěte $\operatorname{rot} F$.

$$\operatorname{rot} F == \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & x^2 & -z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0-0) - \mathbf{j}(0-0) + \mathbf{k}(2x-1) = (0,0,2x-1)\,.$$

Notace:

$$\operatorname{rot} F \equiv \operatorname{curl} F = \nabla \times F\,, \quad F = (F_1, F_2, F_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \operatorname{rot} F \in \mathbb{R}^3$$

Makroskopická rotace

Mikroskopická rotace – kulička vhozená do kapaliny, střed kuličky upevníme, takže kulička se může otáčet ve všech směrech kolem svého středu, ale nemůže se hýbat

Makroskopická rotace – uvolníme střed kuličky a kulička se začne otáčet v kruzích nesená tokem tekutiny. Nelze ji jednoduše spočítat jako $\mathrm{rot} F$.

Příklad $F(x, y, z) = (-y, x, 0) \quad \ldots$ rotace kolem osy z. V tomto případě si můžeme makroskopickou rotaci představit jako rotaci (volné) kuličky v tekutině v rovině $z = 0$. Pozor!!! Tato makroskopická rotace není $\mathrm{rot} F$ vektorového pole F. Abychom mohli měřit $\mathrm{rot} F$, musíme upevnit střed kuličky. Vypočtěte si, že $\mathrm{rot}\, F = (0, 0, 2)$.

Příklad $F(x, y, z) = \dfrac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}, \qquad (x, y) \neq (0.0).$

Rozlišíme 2 případy: Podél kružnic $x^2 + y^2 = konstanta \Longrightarrow$ dostaneme předchozí příklad, tedy makroskopickou rotaci kolem osy z.

Pro obecný bod, který neleží na ose z dostaneme $\mathrm{rot}\, F = (0, 0, 0)$. Ověřte.

Greenova věta

$\mathcal{C}$ ...orientovaná,jednoduchá **uzavřená** křivka $\Longrightarrow$

křivkový integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}$ reprezentuje rotaci F "kolem"křivky $\mathcal{C}$.

Např. je-li F rychlostní pole toku vody, tento integrál ukazuje, jak

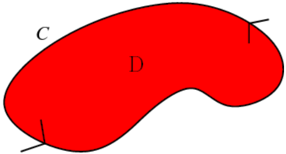
velkou tendenci má voda cirkulovat podél cesty ve směru orientace $\mathcal{C}$.

Greenova věta ... převádí výpočet

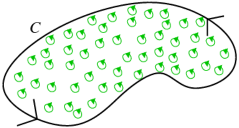
křivkového integrálu vektorovho pole přes uzavřenou křivku $\mathcal{C}$ na dvojný integrál přes vnitřek $\mathcal{C}$

Ale co budeme integrovat přes vnitřek $\mathcal{C}$, aby byl výsledek stejný, jako kdybychom integrovali po uzavřené křivce $\mathcal{C}$?

Greenova věta udává vztah mezi makroskopickou rotací podél uzavřené křivky $\mathcal{C}$ a součtem mikroskopických rotací uvnitř $\mathcal{C}$.



Makroskopická cirkulace vektorového pole F podél $\mathcal{C}$



Součet mikroskopických cirkulací vektorového pole F uvnitř $\mathcal{C}$

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F}\, \mathrm{d}\overrightarrow{r} = \iint_D \underbrace{\text{mikroskopická cirkulace } F}_{(\mathrm{rot}\, F)\cdot \mathbf{k}}\, \mathrm{d}A$$

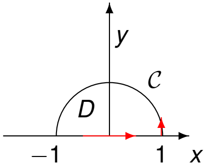
kde $D \subset \mathbb{R}^2$ je oblast ”uvnitř”uzavřené křivky $\mathcal{C}$, $\mathbf{k}$ je jednotkový vektor ve směru osy z, $(\mathrm{rot}\, F)\cdot \mathbf{k}$ je $z-$ová složka operátoru $\mathrm{rot}\, F$.

Poznámka Třírozměrnou analogií Greenovy věty je Gaussova věta, která vyjadřuje ekvivalenci ”objemového”(trojného) a plošného integrálu. Nebudeme se jí zabývat, protože plošný integrál přesahuje látku MIII.

Greenova věta Nechť $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ je kladně orientovaná jednoduchá uzavřená křivka, D je oblast "uvnitř"uzavřené křivky $\mathcal{C}$. Nechť $\vec{F}$ je vektorové pole, které je spojitě diferencovatelné v oblasti D. Pak

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \iint_D (\mathrm{rot}\,F)\cdot \mathbf{k}\,\mathrm{d}A = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}A\,.$$

Příklad Vypočtěte $\int_{\mathcal{C}} y^2\mathrm{d}x + 3xy\mathrm{d}y$, kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná hranice horního půlkruhu D.



$$F(x,y) = (y^2, 3xy)$$

Pomocí dvojného integrálu: integrand

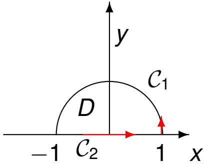
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3y - 2y = y$$

oblast D: $-1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$

$$\int_{\mathcal{C}} y^2 \mathrm{d}x + 3xy\mathrm{d}y = \iint_D (\mathrm{rot}\, F)\cdot \mathbf{k}\, \mathrm{d}A = \iint_D y\mathrm{d}A =$$
$$= \int_{-1}^{1}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^3}} y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\,.$$

Jiný způsob výpočtu: křivkový integrál:

$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{C}} y^2\mathrm{d}x + 3xy\mathrm{d}y\,,\quad \mathcal{C}$ je kladně orientovaná hranice horního půlkruhu D.



Parametrizace $\mathcal{C}_1$: $r = 1,\ t \in \langle 0, \pi\rangle\,,$
$x = \cos\, t,\ y = \sin\, t\,,\quad \mathrm{d}x = -\sin t\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}y = \cos t\mathrm{d}t$

Parametrizace $\mathcal{C}_2$: $t \in \langle -1, 1\rangle\,,$
$x = t,\ y = 0\,,\quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}t,\ \mathrm{d}y = 0$

$$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{C}_1} y^2 \mathrm{d}x + 3xy\mathrm{d}y + \int_{\mathcal{C}_2} y^2 \mathrm{d}x + 3xy\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} (-\sin^3 t + 3\cos t \sin t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} 0\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin t\,(-\sin^2 t + 3\cos t)\mathrm{d}t = -\int_0^{\pi} \sin t(1-\cos^3 t)\mathrm{d}t + 3\int_0^{\pi} \sin t \cos t\mathrm{d}t$$

$$-\int \sin t\,(1-\cos^2 t)\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{rcl} \cos t & = & u \\ -\sin t\mathrm{d}t & = & \mathrm{d}u \end{array} \right| = \int (1-u^2)\mathrm{d}u = 1 - \frac{1}{3}\cos^3 t$$

$$\int \sin t \cos t\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{rcl} \cos t & = & u \\ -\sin t\mathrm{d}t & = & \mathrm{d}u \end{array} \right| = -\int u\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\cos^2 t$$

$$\mathcal{I} = \left[1 - \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\left[\cos^2 t\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\,.$$

Cvičení Vypočtěte pomocí Greenovy věty (křivku nakreslete)

$$\int_{\mathcal{C}} (\sqrt{x} - y)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{1+y^2} + x\right)\,\mathrm{d}y\,,$$

kde křivka $\mathcal{C}$ je sjednocení části paraboly $y^2 = x$ mezi body $A = (0;0)$ a $B = (1;1)$ a úsečky AB. Křivka je probíhaná v kladném smyslu.

Poznámka Nezávislost křivkového integrálu na cestě:
Nechť $F = (F_1, F_2, F_3)$ je vektorové pole na j.s. oblasti $G \subset \mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uzavřená křivka. Pak křivkový integrál vektorového pole
$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}$ nezávisí na integrační cestě (tedy F je potenciální na G)

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y},$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathrm{rot}\, F = 0\,.$$

Poznámka Integrální definice divergence – integrálem se v tomto případě myslí plošný integrál, nebudeme se tím zabývat.

Poznámka Chemická interpretace divergence:
$\mathrm{div}\, v(P)$, kde vektorové pole v je gradientem koncentrace, znamená množství chemické látky, které v okolí bodu P přibude difúzí nebo vznikne chemickou reakcí ($\mathrm{div}\, v(P) < 0$) a nebo z okolí bodu P zmizí ($\mathrm{div}\, v(P) > 0$).

Definice Bod P, ve kterém je $\operatorname{div} v(P) > 0$ (expanze) se nazývá zdrojem nebo zřídlem vektorového pole v. Bod P, ve kterém $\operatorname{div} v(P) < 0$ (komprese) se nazývá propadem .

Poznámka Vektorové pole v na oblasti G se nazývá nezřídlové neboli solenoidální, jestliže

$$\operatorname{div} v(P) = 0 \quad \forall P \in G,$$

t.j. žádný bod G není ani zřídlem, ani propadem.

Poznámka Je-li $v(x, y, z)$ rychlostní pole v kapalině, pak se podmínka

$$\operatorname{div} v = 0$$

nazývá v hydrodynamice rovnicí kontinuity nestlačitelné kapaliny.

Definice Vektorové pole $v(x, y, z)$, pro které platí

$$\operatorname{rot} v(x, y, z) = 0,$$

se nazývá nevírové.

Orientace plochy

Víme, že křivku lze orientovat pomocí tečných vektorů. Podobně je tomu u plochy, jen místo tečných vektorů používáme vektory normálové.

Definice Plochu S nazýváme orientovanou, jestliže na ní existuje (resp. lze na ní definovat) spojité vektorové pole jednotkových normálových vektorů.

Úmluva Všechny plochy, se kterými budeme pracovat, budou orientovatelné.

Poznámka Je-li parametrizace Φ plochy S definovaná na uzavřené oblasti Ω v rovině uv, pak obraz hranice $H(\Omega)$ při parametrizaci Φ je obvykle křivka, popřípadě několik křivek, kterou nazýváme krajem plochy nebo prostě hranicí plochy S.

Definice Říkáme, že orientace křivky $\mathcal{K}$ = hranice plochy S je koherentní s orientací plochy S, jestliže pozorovatel pohybující se po křivce $\mathcal{K}$ ve směru její orientace a s hlavou směřující ve směru kladné normály k ploše S, má plochu S po své levé ruce.

Poznámka Některé plochy nemají žádný kraj, tedy jejich hranice je prázdná množina (např. sféra). Takové plochy nazýváme uzavřené.

Stokesova věta

Stokesova věta udává vztah mezi plošným integrálem přes orientovanou plochu v prostoru $\mathbb{R}^3$ a křivkovým integrálem přes jejl koherentně orientovanou hranici.

Stokesova věta   Necht v oblasti $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$ je zadáno vektorové pole

$$\vec{v}(x,y,z) = v_1(x,y,z)\mathbf{i} + v_2(x,y,z)\mathbf{j} + v_3(x,y,z)\mathbf{k}\,,$$

jehož souřadnicové funkce mají na $\mathcal{G}$ spojité parciální derivace 1. řádu. Necht S je plocha v $\mathcal{G}$ s hranicí ∂S tak, že S a ∂S jsou koherentně orientovány. Pak platí

$$\int_{\partial S} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s} = \iint_S (\mathrm{rot}\,\vec{v})\,\mathrm{d}\vec{S}\,.$$

Poznámka   Aplikujeme-li Stokesovu větu na rovinné vektorové pole, dostaneme Greenovu větu.

Diferenciální operace 2. řádu

Diferenciální operace 2. řádu jsou výsledkem dvojnásobné aplikace operátoru nabla ∇ na skalární nebo vektorové pole.

Necht $f(x, y, z)$ je skalární pole třídy $C^2(G)$, t.j. funkce $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(G)$, $a(x, y, z)$ je vektorové pole třídy $C^2(G)$.

- div grad f

$$\mathrm{div\ grad}\, f = \nabla \cdot \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Položme

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$\triangle$ ... Laplaceův diferenciální operátor, Laplacián

Někdy se používá označení

$$\triangle = \underbrace{\nabla \cdot \nabla} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

skalární součin operátoru nabla se sebou samým.

Poznámka Laplaceova a Poissonova rovmice

$$\triangle u = g \ \text{ na } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad u = u_0 \ \text{ na } \Gamma = \partial\Omega, \ \ldots$$

... parciální diferenciální rovnice 2. řádu eliptického typu

$g = 0$	Laplaceova rovnice
$g \neq 0$	Poissonova rovnice
funkce splňující $\triangle u = 0$	harmonické funkce

- $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, a$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, a = \nabla \cdot (\nabla \times a) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}, \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}, \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) =$$

$$\frac{\partial^2 a_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a_1}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, a = 0\,.$$

Cvičení Upravte $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\, a)$.

- rot grad f, $\quad f \in C^2(G)$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$\mathbf{i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) = 0.$$

Tedy

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0\,.$$

Poznámka Kdybychom uvažovali $(\nabla \times \nabla) f \ldots$

$$\nabla \times \nabla = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{a tedy} \quad (\nabla \times \nabla) f = 0 \cdot f = 0$$

Gaussova–Ostrogradského věta

Věta Gaussova–Ostrogradského
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s Lipschitzovskou hranicí Γ, $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Pak

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \mathrm{d}x = \int_\Gamma u\, n_i \mathrm{d}S\,, \quad i = 1, 2,$$

kde $n = (n_1, n_2)$ je jednotková vnější normála ke Γ.

Věta říká, že dvojný integrál přes Ω (= vnitřek $\mathcal{C}$) je roven křivkovému integrálu přes hranici Γ oblasti Ω, kde $\Gamma = \mathcal{C}$ je uzavřená křivka kladně orientovaná.

Položme ve větě $u := v \cdot w$. Dostaneme

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} w + \frac{\partial w}{\partial x_i} v \right) \mathrm{d}x = \int_\Gamma v \cdot w \cdot n_i \mathrm{d}S\,, \quad i = 1, 2, \quad v, w \in C^1(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^2 .$$

1. Greenova formule

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} w \mathrm{d}x = \int_\Gamma v \cdot w \cdot n_i\, \mathrm{d}S - \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i} v \mathrm{d}x\,, \quad i = 1, 2, \quad v, w \in C^1(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^2 .$$

Rozepišme 1. Greenovu formuli do složek:

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_1} w \mathrm{d}x = \int_\Gamma v \cdot w \cdot n_1 \, \mathrm{d}S - \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_1} v \mathrm{d}x \tag{2}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_2} w \mathrm{d}x = \int_\Gamma v \cdot w \cdot n_2 \, \mathrm{d}S - \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_2} v \mathrm{d}x \tag{3}$$

Nyní v rovnici (2) dosadíme $w := \dfrac{\partial w}{\partial x_1}$ a v rovnici (3) dosadíme $w := \dfrac{\partial w}{\partial x_2}$. Tedy

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \mathrm{d}x = \int_\Gamma v \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} \cdot n_1 \, \mathrm{d}S - \int_\Omega \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} v \mathrm{d}x \tag{4}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \mathrm{d}x = \int_\Gamma v \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \cdot n_2 \, \mathrm{d}S - \int_\Omega \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} v \mathrm{d}x \tag{5}$$

Rovnice (4) a (5) sečteme:

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \mathrm{d}x =$$

$$\int_\Gamma v \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \cdot n_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \cdot n_2 \right) \mathrm{d}S - \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) v \mathrm{d}x,$$

tedy

$$\int_\Omega \mathrm{grad}\ v \cdot \mathrm{grad}\ w \mathrm{d}x = \int_\Gamma v\ \mathrm{grad}\ w \cdot n \mathrm{d}S - \int_\Omega \triangle\ w \cdot v \mathrm{d}x$$

neboli

$$\int_\Omega \nabla v\ \nabla w \mathrm{d}x = \int_\Gamma v \frac{\partial w}{\partial n} \mathrm{d}S - \int_\Omega \triangle w\ v \mathrm{d}x\,.$$

2. Greenova formule

$$-\int_\Omega \triangle w\ v \mathrm{d}x = -\int_\Gamma v \frac{\partial w}{\partial n} \mathrm{d}S + \int_\Omega \nabla v\ \nabla w \mathrm{d}x$$

Divergenční věta

Věta o divergenci Necht $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená souvislá otevřená množina v $\mathbb{R}^n$, její hranice Γ je konečným sjednocením hladkých ploch, křivek a bodů, vektorové pole $\vec{T} : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, je spojité se všemi potřebnými derivacemi souřadnicových funkcí spojitými na $\overline{\Omega}$. Pak

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{T} \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \vec{T} \cdot \vec{\nu} \mathrm{d}S .$$

Poznámka Integrace per partes vektorově

$$\int_{\Omega} u \nabla v \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u v \vec{\nu} \mathrm{d}S - \int_{\Omega} v \nabla u \mathrm{d}x .$$

Ortogonální transformace

Poznámka Einsteinova sumační konvence
Přes index, který se ve výrazu vyskytuje dvakrát, se automaticky sčítá (od 1 do n), aniž se píše výraz $\sum$. Například

$$\tau_{ii} = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = \sum_{i=1}^{3} \tau_{ii}, \ \alpha_{ij}\alpha_{ik} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij}\alpha_{ik}, \ u_i v_i = \sum_{i=1}^{n} = u \cdot v$$

Poznámka Připomeňme si geometrickou interpretaci skalárního součinu:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (v\widehat{\mathbf{v}}) \cdot (w\widehat{\mathbf{w}}) = v(\widehat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w}) = w(\mathbf{v} \cdot \widehat{\mathbf{w}}) = vw \cos\theta\,,$$

kde $\widehat{\mathbf{v}} = \dfrac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}$, $\quad \widehat{\mathbf{w}} = \dfrac{\mathbf{w}}{||\mathbf{w}||}$ jsou jednotkové vektory, které nesou informaci o směru. Uvědomme si tedy, že skalární součin jednotkových vektorů definuje úhel mezi nimi:

$$\widehat{\mathbf{v}} \cdot \widehat{\mathbf{w}} = \cos\theta\,.$$

Uvědomme si také, že je-li vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, pak pro jeho složky platí

$$v_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1\,, \quad v_2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2\,, \quad v_3 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3\,,$$

kde $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ jsou jednotkové bázové vektory ve směru souřadnicových os daného souřadnicového systému.

Označme $\{e_1, e_2, e_3\}$ nějakou ortonormální bázi $\mathbb{R}^3$, $\{e_1', e_2', e_3'\}$ ortonormální bázi, která vznikne z původní báze ortogonální transformací,

$$\|e_i\| = \|e_i'\| = 1\,, \quad e_i \cdot e_j = e_i' \cdot e_j' = \delta_{ij}\,.$$

Vyjádříme si novou bázi pomocí báze původní:

$$\begin{aligned}
e_1' &= \alpha_{11} e_1 + \alpha_{12} e_2 + \alpha_{13} e_3\,, \quad \text{t.}j.\ e_1' = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{1j} e_j \\
e_2' &= \alpha_{21} e_1 + \alpha_{22} e_2 + \alpha_{23} e_3\,, \quad \text{t.}j.\ e_2' = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{2j} e_j \\
e_3' &= \alpha_{31} e_1 + \alpha_{32} e_2 + \alpha_{33} e_3\,, \quad \text{t.}j.\ e_3' = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{3j} e_j\,.
\end{aligned}$$

Maticově
$$\begin{bmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix},$$

ortogonální matice A je matice přechodu od staré báze k nové. Je tedy (s využitím Einsteinovy sumační konvence)

$$e_i' = \alpha_{ij} e_j\,, \; i = 1, 2, 3\,. \tag{6}$$

Jaký je význam koeficientů α_{ij} v matici A?

Rovnici $e_i' = \alpha_{ij} e_j$ vynásobíme skalárně vektorem e_j:

$$e_i' \cdot e_j = \alpha_{ij} \;\Rightarrow\; \alpha_{ij} = \|e_i'\| \cdot \|e_j\| \cdot \cos(\widehat{x_i' x_j}) = \cos(\widehat{x_i' x_j}) \;\Rightarrow$$

tedy koeficient α_{ij} představuje úhel, který svírá $i-$tá nová osa s $j-$tou původní osou.

Zpětná transformace

Zpětná transformace z nové báze do staré má obdobný tvar:

$$e_j = \sum_{i=1}^{3} \beta_{ji} e'_i = \beta_{ji} e'_i\,, \quad j = 1, 2, 3\,,$$

kde $\beta_{ji} = e_j \cdot e'_i = \cos(\widehat{x_j x'_i})$ jsou prvky matice přechodu B od nové báze ke staré. Protože $\cos(\widehat{x_j x'_i}) = \cos(\widehat{x'_i x_j})$, musí být $\alpha_{ij} = \beta_{ji}$, tj. $B = A^{\mathrm{T}}$. Složenou transformací obdržíme opět původní bázi, tedy

$$A \cdot B = AA^{\mathrm{T}} = E, \quad \text{kde } E \text{ je jednotková matice}\,.$$

Tedy $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$, matice A je ortogonální. Její determinant je roven ± 1 a platí

$$\sum_i \alpha_{ik}\beta_{kj} = \sum_i \alpha_{ik}\alpha_{jk} = \delta_{ij}\,.$$

Analogicky (za použití sumační konvence) $\alpha_{ij}\alpha_{ik} = \delta_{jk}$.
Rotace kartézského souřadného systému kolem počátku je tedy ortogonální transformace.

Definice Transformace jednoho kartézského systému na druhý se nazývá ortogonální, je-li matice přechodu $A = (\alpha_{ij})$ ortogonální a platí-li

$$\alpha_{ij}\alpha_{ik} = \delta_{jk} \,.$$

Remark Ortogonální transformace vektoru:
V původním souřadném systému je

$$u = (u_1, u_2, u_3) = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 = u_j e_j = u_j \alpha_{ji} e'_i \,.$$

V novém souřadném systému $u = (u'_1, u'_2, u'_3) = u'_i e'_i$. Porovnáme a dostaneme $u'_i = u_j \alpha_{ji} = \alpha_{ij} u_j$. Maticově

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \,.$$

Příklad Dokažte, že při ortogonální transformaci v prostoru libovolné dimenze se nemění (je invariantní) skalární součin vektorů .

$$u' \cdot v' = u'_i \cdot v'_i = \alpha_{ij} u_j \cdot \alpha_{ik} v_k = \delta_{jk} u_j v_k = u_j v_j = u \cdot v \,.$$

Tenzory 1. a 2. řádu

Uvažujme pouze ortogonální transformace v kartézských souřadných systémech.

Definice Uspořádaná $n-$tice $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, která při ortogonální transformaci splňuje

$$v_i' = \alpha_{ij} v_j$$

se nazývá tenzor 1. řádu neboli vektor.

Definice Matice $T = (T_{ij}),\ i, j = 1, \dots, n$, se nazývá kartézský tenzor 2. řádu, mění-li se její prvky při ortogonální transformaci podle vztahu

$$T_{ij}' = a_{ik} a_{jl} T_{kl}\,. \tag{7}$$

Poznámka Skalár považujeme za tenzor nultého řádu.

Několik poznámek:

- Víme, že skalár je vyjádřen jedním reálným číslem. Na tento fakt můžeme pohlížet jako že skaláry nemají žádné komponenty na třech souřadnicových osách. Pro jejich úplné učení je tedy potřeba 3^0 reálných čísel. Je to tenzor 0-tého řádu.
- Vektor $\mathbf{v}$ má tři složky, které jsou jeho projekcemi do tří souřadnicových os, každá z nich je $v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$. Proto pro určení $\mathbf{v}$ potřebujeme 3^1 skalárů. Vektor je tenzor 1.řádu.
- Jak je to s tenzory 2. řádu? Tři projekce tenzoru druhého řádu $\mathbf{A}$ na souřadnicové osy získáme jako skalární součin $\mathbf{A}$ s bázovými vektory: $\mathbf{A}_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i$. Tyto projekce jsou vektory (ne skaláry). Protože každý vektor je určen třemi skaláry - jeho složkami - tenzor druhého řádu vyžaduje $3 \times 3 = 3^2$ reálných čísel, která musí být určena. V matici tvoří tři složky tenzoru $\mathbf{A}$ vektory $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3)$, kde každý vektor $\mathbf{A}_i$ má tři komponenty

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \\ A_{3i} \end{bmatrix}, \quad \text{tedy maticově} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Kartézské tenzory 2. řádu

Kartézským tenzorem 2. řádu je každá čtvercová matice, jejímiž prvky jsou čísla nebo funkce, tj.

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \dots & T_{nn} \end{bmatrix} .$$

Typickými tenzorovými veličinami 2. řádu jsou například: napětí a deformace v mechanice, dyadický součin vektorů, materiálové vlastnosti anisotropního prostředí, atd.

Poznámka Připomeňme, že pro $u = (u_x, u_y, u_z),\ v = (v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$ je

$$\text{dyadický součin} \quad u \otimes v = \begin{bmatrix} u_x v_x & u_x v_y & u_x v_z \\ u_y v_x & u_y v_y & u_y v_z \\ u_z v_x & u_z v_y & u_z v_z \end{bmatrix} .$$

Například pro $u = (1, 2, 3),\ v = (1, -1, 1)$ je

$$u \otimes v = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad v \otimes u = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = (u \otimes v)^{\mathrm{T}} .$$

Dyadický součin

Dyadický součin dvou vektorů **v** a **w** je tenzor **A** takový, že

$$A_{ij} = v_i w_j \,.$$

Vlastnosti dyadického součinu:

- $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \neq \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}$
- $\mathbf{u} \otimes (\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = \alpha\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} + \beta\mathbf{u} \otimes \mathbf{w}$
  $(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} \otimes \mathbf{w} + \beta\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$
- $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$
  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$

Analogicky s vektorovou notací $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$ můžeme tenzor zapsat jako

$$\mathbf{A} = A_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \quad \text{nebo} \quad \mathbf{A} = A_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \,.$$

Z této rovnice s využitím uvedených vlastností tenzorového součinu dostaneme pro komponenty

$$A_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j \,.$$

Dyády

Dyády $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ jsou bázové tenzory, které maticově zapíšeme jako

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Poznámka Ne každý tenzor 2. řádu lze vyjádřit jako dyadický součin dvou vektorů, ale každý tensor 2. řádu může být zapsán jako lineární kombinace dyadických součinů vektorů ve tvaru $\mathbf{A} = A_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$.

Tenzory $M-$tého řádu

Soubor veličin $T = (T_{i_1 i_2 \dots i_M})$, $i_m = 1, \dots, n$, neboli $M-$rozměrná matice se nazývá kartézský tenzor $M-$tého řádu v prostoru $\mathbb{R}^n$, mění-li se jeho prvky při ortogonální transformaci podle vztahu

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_M} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_M j_M} T_{j_1 j_2 \dots j_M} \, . \tag{8}$$

Tedy počet složek tenzoru $M-$tého řádu v $\mathbb{R}^n$ je roven n^M.

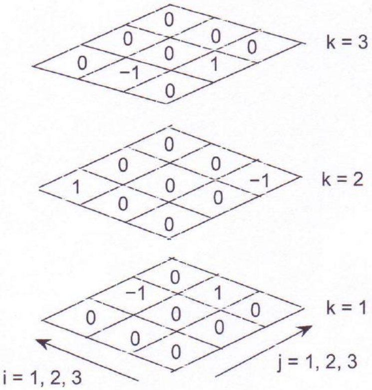
Příklad Tenzor Levi-Civitův třetího řádu je definován vztahem

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{pro sudou permutaci indexů} \\ -1 & \text{pro lichou permutaci indexů} \\ 0 & \text{pro } i = j \text{ nebo } j = k \text{ nebo } k = 1 \, . \end{cases}$$

Tento tenzor má celkem $3^3 = 27$ prvků, z nichž jen 6 je nenulových. Ukážeme jeho transformaci podle (8):

$$\varepsilon'_{ijk} = a_{i\ell} a_{jm} a_{kn} \varepsilon_{\ell mn} = a_{i1} \cdot (a_{j2} a_{k3} - a_{j3} a_{k2}) + a_{i2} \cdot (a_{j3} a_{k1} - a_{j1} a_{k3}) + a_{i3} \cdot (a_{j1} a_{k2} - a_{j2} a_{k1}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix} = \begin{cases} 1, & ijk = 123, 231, 312, \\ -1 & ijk = 321, 213, 132, \\ 0 & \text{v ostatních případech} \end{cases} = \varepsilon_{ijk} \, .$$



Cvičení Zkontrolujte Levi-Civitův tenzor třetího řádu

Speciální tenzory

- Izotropní tenzory – Tenzory, jejichž složky se při transformaci nemění. Příklad: Levi–Civitův tenzor, Kroneckerův tenzor

$$\delta'_{ij} = a_{ik} a_{jl} \delta_{kl} = a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} \, .$$

- Symetrické a antisymetrické tenzory
  Symetrický tenzor 2. řádu: $T_{ij} = T_{ji}$,
  antisymetrický tenzor 2. řádu: $T_{ij} = -T_{ji}$.
- U tenzorů vyšších řádů se symetrie (antisymetrie) týká pouze vybrané dvojice indexů. Například Levi–Civitův tenzor je antisymetrický, a proto $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$.

Poznámka U tenzorů 2. řádu je zřejmá analogie se symetrickými resp. antisymetrickými maticemi. Platí například:
Každý tenzor 2. řádu lze rozložit na součet symerického a antisymetrického tenzoru 2. řádu:

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = \underbrace{S_{ij}}_{\text{symetrický}} + \underbrace{A_{ij}}_{\text{antisymetrický}} \, .$$

Operace s tenzory

- Slučování tenzorů (sčítání, odčítání)
  Slučujeme odpovídající složky tenzorů téhož řádu:
  $$P_{ijk} + Q_{ijk} = R_{ijk} \,, \quad \text{apod.}$$
  Příkladem je součet symetrického a antisymetrického tenzoru.
- Úžení tenzorů
  Ze složek tenzoru vybereme ty, které mají dva indexy stejné, a algebraicky je sečteme. Výsledkem je tenzor řádu o dva nižšího, než byl řád původního tenzoru.
  Příklad: (použití sumační konvence)
  $$B_{iikl} = B_{11kl} + B_{22kl} + B_{33kl} = B_{kl} \,.$$
  Úžením tenzoru 2. řádu vznikne skalár: $T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$ je stopa matice T.

Násobení tenzorů

Rozlišujeme vnější a vnitřní součin tenzorů.

Vnější součin tenzorů

Násobíme každou složku prvního tenzoru postupně každou složkou druhého tenzoru. Výsledkem je tenzor, jehož řád je roven součtu řádů násobených tenzorů. Např. $P_{ijk} \cdot Q_{lm} = R_{ijklm}$ apod.

Příklad Dyadický součin dvou vektorů:

$$W = u \otimes v = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix}, \quad \text{t.j. } W_{ij} = u_i v_j \,.$$

Vnitřní součin tenzorů

Vnitřní součin tenzorů vznikne úžením vnějšího součinu.

Jako příklad uvažujme vnější součin matice a vektoru, kterým je tenzor 3. řádu

$$A_{ij} u_k = T_{ijk} \, .$$

Chceme-li zapsat tenzorově vnitřní součin $A \cdot u = v$ bude výsledkem vektor

$$A_{ij} u_j = v_{ijj} = v_i \, ,$$

tedy tenzor 3. řádu zúžený přes index j.

Příklady

- Zúžením dyadického součinu vektorů obdržíme skalární součin, neboť

$$u \cdot v = u_i v_i = \mathrm{Tr}(u \otimes v)\,.$$

- $\delta_{ij}\delta_{ik} = \delta_{jk}$, úžíme tenzor 4. řádu.
- Dokažte, že pro vektorový součin platí

$$u \times v = \varepsilon_{ijk} e_i u_j v_k\,.$$

Využijeme definice Levi–Civitova tenzoru:

$$\varepsilon_{ijk}\, e_i u_j v_k = e_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + e_2(-u_1 v_3 + u_3 v_1) + e_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) =$$

$$= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = u \times v\,.$$

Tenzor napětí, tenzor deformace a Hookův zákon

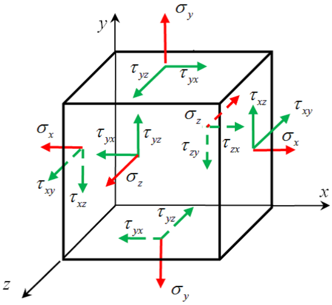
Slovo tenzor pochází z latinského tenze, neboli napětí. Poprvé byly totiž tenzory zavedeny v souvislosti s popisem napětí a deformace pevných těles.

Nejjednodušši případ jednorozměrného Hookeova zákona má tvar

$$\sigma = \varepsilon E\,, \tag{9}$$

kde σ je normálové napětí, $\varepsilon = \frac{\triangle \ell}{\ell}$ je relativní prodloužení a E je modul pružnosti v tahu.
Na trojrozměrné těleso mohou působit síly ve třech směrech, je zapotřebí uvažovat celkem tři napětí o třech složkách.

Napětí v bodě tělesa - elementární krychle



Na každé rovině působí obecně normálové a smykové napětí, tzn. 9 složek napětí, přičemž jen šest je nezávislých

$$\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z, \tau_{xy},\ \tau_{xz},\ \tau_{yz}\ .$$

Stav napjatosti je dán veličinou zvanou tenzor napětí .

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} ,$$

kde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ jsou hlavní (normálová) napětí a $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ jsou napětí smyková , σ_{ij} je tenzor 2. řádu.

Tenzor (malé) deformace

Při deformaci těles existují i tečná napětí. U anizortropních těles navíc platí, že se deformují v různých směrech různě. Je zapotřebí zavést i tenzor deformace ,

$$\varepsilon_{k\ell} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} .$$

Rovnice (9) pro jednorozměrný případ pak přejde ze skalární rovnice na rovnici tenzorovou ve tvaru

$$\sigma_{ij} = C_{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell} ,$$

která vyjadřuje zobecněný Hookeův zákon pro anizotropní těleso. Tenzor $C_{ijk\ell}$ je tenzorem elastických koeficientů, který převádí napětí na deformace. Tento tenzor má obecně $3^4 = 81$ složek, jejichž počet se však vzhledem k symetriím při záměnách souřadnic i, j a k, ℓ redukuje na 21. Pro izotropní tělesa existují pouze dva nezávislé elastické koeficienty, Laméovy koeficienty λ a μ. Ty lze převést na obvyklé mechanické veličiny E (Youngův modul pružnosti v tahu) a G (modul pružnosti ve smyku) pomocí vztahů

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} , \quad G = \mu .$$

Literatura ke studiu

- A. Klíč, M. Dubcová: Základy tenzorového počtu s aplikacemi, VŠCHT Praha, 1998.
- K. Hackl, M. Goodarzi: A Small Compendium on Vector and Tensors Algebra and Calculus. Ruhr-University Bochum, 2010. `http://web.iitd.ac.in/~pmvs/courses/mcl702/tensors.pdf`
- J. Šlégr: Tenzory a tenzorový počet. Katedra fyziky PřF UHK, 2012.
- J. Vlček: Vektorová a tenzorová analýza. Studijní text, VŠB–TU Ostrava, 2015 .
- H.F.Davis, A. D. Snider: Introduction to Vector Analysis, 4. vydání, Allyn and Bacon, Inc., 1979.