Matematika III
Řady

Miroslava Dubcová, Daniel Turzík, Drahoslava Janovská

Ústav matematiky

Přednášky ZS 2012-2013

Obsah

Nekonečnou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálných (případně komplexních) čísel zapsanou ve tvaru součtu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

nazýváme číselnou řadou.

Definice 1. *Součet prvních n členů řady, tj. součet*

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

*nazýváme n-***tým částečným součtem** *dané řady. Je-li limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ konečná, nazýváme číslo s* **součtem řady***, píšeme*

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

a říkáme, že tato řada **konverguje***. Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ nevlastní nebo tato limita neexistuje, součet řady nedefinujeme a říkáme, že řada* **diverguje***.*

Příklad: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se nazývá řada **harmonická**. Ukážeme, že tato řada je divergentní.

Zřejmě

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}) + \ldots$$

$$\cdots + (\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n}) \geq n.\frac{1}{2},$$

nebot každý výraz v závorce je větší než $\frac{1}{2}$. Odtud

$$\lim_{n\to\infty} s_{2^n} \geq \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{2} = +\infty,$$

a harmonická řada tedy diverguje.
Příklad: Uvažujme řadu

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots .$$

Zřejmě

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ sudé}, \\ 1 & \text{pro } n \text{ liché}. \end{cases}$$

Tedy $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje a tato řada diverguje.

Věta 1. *Je-li řada* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *konvergentní, pak* $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$.

Důkaz: Necht řada $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje a $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Pak ale též $s = \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$. Odtud

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

■

Věta 1 říká, že podmínka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ je nutnou podmínkou pro konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Větu nelze obrátit, tj. ze vztahu $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ neplyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, jak ukazuje příklad harmonické řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, kde $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, ale řada diverguje.

Velmi důležitou řadou je tzv. **geometrická** řada. Je to každá řada tvaru

$$a + aq + aq^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} aq^i, \quad \text{kde } a, q \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Číslo q nazýváme kvocientem geometrické řady.

Věta 2. *Geometrická řada* $\sum_{i=0}^{\infty} aq^i$ *je konvergentní právě tehdy, když* $|q| < 1$. *V tomto případě pro její součet platí vztah*

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = \frac{a}{1-q}.$$

Důkaz: Podle vzorce pro rozdíl n-tých mocnin

$$1 - q^n = (1-q)(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})$$

dostáváme

$$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Je-li $|q| < 1$, je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ a dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

Naopak je-li $|q| \geq 1$, pak $\lim\limits_{i\to\infty} aq^i$ není rovna nule a tedy podle věty 1 je daná řada divergentní. ∎

Definice 2. *Říkáme, že řada* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *konverguje* **absolutně**, *jestliže konverguje řada* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$.

Věta 3. *Jestliže řada* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *konverguje absolutně, pak tato řada konverguje. Jinak řečeno: konverguje-li řada* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$, *konverguje i řada* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

Tvrzení věty 3 nelze obrátit. Později ukážeme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje, ale jak víme, řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$ diverguje. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ je tedy příkladem konvergentní řady, která není absolutně konvergentní. Určit součet konvergentní řady je obvykle značně obtížná úloha, kterou umíme řešit pro geometrickou řadu a dále v některých jednoduchých případech. Jednodušší úlohou může být úloha zjistit, zda je daná řada konvergentní (aniž bychom určovali její součet). K tomu slouží tzv. **kritéria konvergence**. Těchto kritérií je celá řada, některá z nich si nyní ukážeme.

Věta 4 (Srovnávací kritérium). *Necht pro každé* $n \geq 1$*, příp.* $n \geq n_0$*, platí* $0 \leq a_n \leq b_n$*. Potom platí:*

$$\text{(i) konverguje-li řada } \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \text{ konverguje i řada } \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

nebo totéž ve negované formě

$$\text{(ii) diverguje-li řada } \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ diverguje i řada } \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Důkaz: Označme $s_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ a $S_n = (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$. zřejmě $s_n \leq S_n$ a obě posloupnosti $\{s_n\}$ i $\{S_n\}$ jsou neklesající. Je-li tedy $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ konečná, je nutně konečná i $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ a tím je tvrzení dokázáno. ■

Ve větě 4 je možno platnost předpokladu $0 \leq a_n \leq b_n$ požadovat pro všechna $n \geq n_0$, kde $n_0 \geq 1$ je nějaký pevný index. Konvergence nebo divergence řady totiž nezáleží na hodnotách konečného počtu sčítanců.

Příklad: Uvažujme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n}$. Protože $0 \leq \frac{1}{n.2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ pro $n \geq 1$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je konvergentní (je to geometrická řada s kvocientem $q = 1/2$), je podle věty 4 konvergentní i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n}$.

Příklad: Řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ je divergentní, protože $\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$ pro $n \geq 2$ a řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní.

Věta 5 (Podílové kritérium). *Uvažujme řadu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \neq 0$.

1. *Je-li* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, *pak řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně.*
2. *Je-li* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, *pak řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Větu nebudeme dokazovat. Poznamenejme jen, že důkaz první části spočívá na porovnání dané řady s jistou geometrickou řadou. Pro druhou část lze ukázat, že řada nesplňuje nutnou podmínku pro konvergenci danou větou 1.

Je-li

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1,$$

podílové kritérium o konvergenci řady nerozhodne. Existují řady konvergentní (např. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$) i řady divergentní (např. harmonická řada), pro které platí, že limita podílu je 1).

Věta 6 (Odmocninové kritérium). *Uvažujme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, a necht existuje (konečná i nekonečná) limita $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$. Potom platí:*

1. *je-li $L < 1$, řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní,*
2. *je-li $L > 1$, řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.*

Důkaz: Je-li $L < 1$, zvolme $\varepsilon > 0$ tak, aby platilo $L + \varepsilon < 1$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ je $\sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon < 1$, odkud $a_n < (L+\varepsilon)^n$. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (L+\varepsilon)^n$ je konvergentní geometrická řada.

Podle srovnávacího kritéria (Věta 4) řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Je-li $L > 1$, potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$. Platí tedy $a_n \geq 1$ pro $n \geq n_0$, není tedy splněna nutná podmínka konvergence (Věta 1). Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. ■

Odmocninové kritérium selže v případě, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ neexistuje nebo je rovna jedné.

Příklad: Vyšetřeme konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$.

Použijeme odmocninové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1.$$

Řada tedy konverguje.

Zatím se uvedená kritéria týkala absolutní konvergence. Uveďme nyní jedno kritérium pro neabsolutní konvergenci, Leibnitzovo kritérium. Týká se tzv. alternujících řad, tj. řad, jejichž členy pravidelně mění znaménko.

Věta 7 (Leibnitzovo kritérium). *Necht pro posloupnost $\{a_n\}$ platí:*

$$a_n \geq a_{n+1} \geq 0 \textit{ pro každé } n \geq 1, \ \textit{ a současně } \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Potom řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

konverguje.

Příklad: Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \frac{1}{n}$ splňuje podmínky věty 7 (posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je klesající a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$) a tedy konverguje. (Později ukážeme, že její součet je $\ln 2$.) Jak již bylo řečeno, tato řada nekonverguje absolutně, srovnej s harmonickou řadou.

Věta 8 (Integrální kritérium). *Necht funkce $f(x)$ definovaná pro $x \geq 1$ je nerostoucí spojitá funkce splňující podmínku $f(x) \geq 0$ pro $x \geq 1$.*
Pak $\int\limits_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Příklad: Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, protože integrál

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = \lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{x}) - (-1) = 1$$

konverguje.
Příklad: Pomocí integrálního kritéria můžeme také dokázat divergenci harmonické řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Protože integrál

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

diverguje, diverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Definice 3. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a f_n je reálné funkce jedné reálné proměnné definované na intervalu I. Potom řadu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nazýváme* **funkční řadou** *v I. Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje bodově v množině $D \subset I$, jestliže pro každou hodnotu $x \in D$ konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Množinu D nazýváme oborem konvergence řady. Označíme-li $s_m(x) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x)$ částečný součet řady a platí-li $\lim_{m\to\infty} s_m(x) = s(x)$, pro $x \in D$, potom píšeme*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x), \quad pro\ x \in D.$$

Důležitou otázkou týkající se řad funkcí je to, zda se vlastnosti jednotlivých členů řady (spojitost, existence derivace, apod.) přenáší také na součet řady. Bodová konvergence nám k tomu nestačí, musíme proto zavést silnější typ konvergence.

Definice 4. *Říkáme, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **konverguje stejnoměrně** *k součtu* $s(x)$ *na intervalu* I*, jestliže posloupnost* $\{s_m(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *jejich částečných součtů konverguje stejnoměrně k funkci* $s(x)$ *na* I *(píšeme* $s_m \rightrightarrows s$*), tj.*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ takové, že } \forall x \in I \text{ a } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \text{ platí } |s_m(x) - s(x)| < \varepsilon.$$

Je třeba si uvědomit, že slabší vlastnost bodové konvergence znamená

$$\forall x \in I\, \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ takové, že a } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \text{ platí } |s_m(x) - s(x)| < \varepsilon.$$

Věta 9 (Weierstrassovo kriterium). *Necht* $a_n \geq 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje. Necht pro všechna* $x \in I$ *a všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $|f_n(x)| \leq a_n$*. Potom řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na* I*.*

Příklad: Rozhodněme, kde řada konverguje stejnoměrně

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4}.$$

Použijeme Weierstrassovo kritérium

$$\left|\frac{\cos nx}{n^4}\right| \leq \frac{1}{n^4} \quad \text{pro} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ konverguje, tedy daná řada konverguje stejnoměrně v $\mathbb{R}$.

Věta 10. *Nechť řada funkcí* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na* I *a má na* I *součet* $s(x)$*. Jsou-li všechny funkce* $f_n(x)$ *na* I *spojité, pak je na* I *spojitá také funkce* $s(x)$.

Věta 11. *Nechť řada funkcí* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na* $I = [a, b]$ *a má na* I *součet* $s(x)$*. Jsou-li všechny funkce* $f_n(x)$ *na* I *integrovatelné, pak je na* I *integrovatelná také funkce* $s(x)$ *a platí*

$$\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x, \quad \textit{tj.} \quad \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad: Vypočtěte $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} \right)\, \mathrm{d}x$.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1}$ konverguje stejnoměrně na $[0, \frac{1}{2}]$ (podle Weierstrassova kritéria). Platí proto

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} \right)\, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} n\,x^{n-1}\, \mathrm{d}x \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[x^n \right]_0^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Věta 12. *Necht řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje na otevřeném intervalu $I = (a, b)$ a má na I součet $s(x)$. Necht řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ konverguje stejnoměrně na I. Mají-li všechny funkce $f_n(x)$ na otevřeném intervalu I derivaci pro všechna $n \in \mathbb{N}$, potom má také funkce $s(x)$ derivaci na I a platí*

$$s'(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)\,\mathrm{d}x, \quad \textit{tj.} \; \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Definice 5. *Řadu tvaru*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \ ,$$

kde $x_0, a_0, a_1, \dots$ jsou reálná čísla, x je proměnná, nazýváme **mocninnou řadou**. *Čísla $a_0, a_1, \dots$ nazýváme* **koeficienty** *a číslo x_0* **střed** *mocninné řady.*

Pro zvolenou hodnotu proměnné x je mocninná řada číselnou řadou. Součet mocninné řady představuje jistou funkci, definovanou právě pro ty hodnoty proměnné x, pro které odpovídající číselná řada konverguje.

Příklad: Mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ (se středem $x_0 = 0$) je geometrickou řadou s kvocientem x, a tedy konverguje právě pro $x \in (-1, 1)$. Podle věty 2 pro její součet platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x} \quad \text{pro } x \in (-1, 1) \ .$$

Věta 13. *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *je mocninná řada. Pak existuje číslo* $R \in \langle 0, +\infty\rangle$ *(tj.* $R \in \langle 0, +\infty)$ *nebo* $R = +\infty$*), takové, že:*

1. *Je-li* $R = 0$*, pak daná mocninná řada konverguje pouze pro* $x = x_0$ *a pro ostatní* $x \neq x_0$ *diverguje.*
2. *Je-li* $R \in (0, +\infty)$*, pak daná mocninná řada konverguje absolutně pro každé* $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ *a diverguje pro každé* $x \in (-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, +\infty)$*.*
3. *Je-li* $R = +\infty$*, pak daná mocninná řada konverguje absolutně pro každé* $x \in \mathbb{R}$*.*

Číslo R nazýváme **poloměrem konvergence** *mocninné řady.*

Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je možno určit pomocí podílového kritéria. Označme

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| .$$

Ukážeme, že R je poloměr konvergence dané mocninné řady. Platí

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)}{a_n}\right| = |x-x_0|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| .$$

Odtud okamžitě plyne, že pro $|x-x_0|<R$ mocninná řada konverguje absolutně a naopak pro $|x-x_0|>R$ diverguje. Tedy R je poloměrem konvergence dané mocninné řady. V případě 2. věty 13, tj. v případě $R\in(0,+\infty)$, nelze říci obecně nic o konvergenci mocninné řady pro $x=x_0-R$ a $x=x_0+R$. Existují příklady, kdy mocninná řada konverguje jak pro $x=x_0-R$ tak pro $x=x_0+R$, příklady kdy konverguje pouze pro jednu z těchto hodnot, i příklady, kdy pro obě z těchto hodnot diverguje.

Příklad: Určete, pro které hodnoty proměnné x konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

Protože

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|x\cdot\frac{n}{n+1}\right| = |x| ,$$

je podle podílového kritéria daná řada absolutně konvergentní pro $x\in(-1,1)$ a divergentní pro $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. Poloměr konvergence dané mocninné řady je tedy roven 1.

Pro $x = 1$ je daná řada harmonickou řadou, a tedy řadou divergentní, pro $x = -1$ je daná řada řadou $\sum_{n-1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$, u které jsme již určili, že konverguje.

Definice 6. *Necht funkce f má v bodě x_0 derivace všech řádů.* **Taylorovou řadou** *funkce f se středem v x_0 rozumíme řadu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \,.$$

Příklad: Odvoďte Taylorovu řadu funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ se středem v bodě $x_0 = 0$ a určete, pro která x tato řada konverguje. Pro $f(x) = \mathrm{e}^x$ je $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$, a tedy $f^{(n)}(x_0) = 1$. Taylorova řada je tedy řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \,.$$

Vyšetřeme konvergenci této řady podílovým kritériem:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 \ \text{ pro každé } \ x \in \mathbb{R} \,.$$

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ tedy konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$. Součet Taylorovy řady, pokud existuje, budeme značit symbolem $T(x)$.

Protože **Taylorův polynom** $T_n(x)$ n-tého stupně funkce f v bodě x_0 je právě n-tým **částečným součtem Taylorovy řady** této funkce, je podle definice

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)\ .$$

V dalším se budeme zabývat otázkou, kdy $f(x) = T(x)$. Z Taylorova vzorce $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ dostaneme limitním přechodem pro $n \to \infty$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} R_n(x) = T(x) + \lim_{n\to\infty} R_n(x)\ .$$

Z této rovnosti plyne, že $f(x) = T(x)$ právě pro ta x, pro která je $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.
Tím jsme dokázali následující větu:

Věta 14. *Pro součet $T(x)$ Taylorovy řady funkce f se středem v x_0 platí*

$$T(x) = f(x) \quad \textit{právě tehdy, když} \quad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0\ .$$

Je důležité poznamenat, že existují funkce, které mají v bodě x_0 všechny derivace, a tedy mají Taylorovu řadu, jejíž součet se dané funkci v okolí x_0 nerovná.

Pro tyto funkce zřejmě $\lim_{n\to\infty} R_n(x) \neq 0$. Příkladem takové funkce je funkce

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \,. \end{cases}$$

Lze ukázat, že $T(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Ilustrujme si použití věty 14.
Příklad: Ukážeme, že

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}\,.$$

Z předchozího příkladu víme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ je Taylorovou řadou funkce e^x se středem v $x_0 = 0$ a že tato řada konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pro pevně zvolené $x \in \mathbb{R}$ platí prodle věty o zbytku v Taylorově formuli.

$$R_n(x) = \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!} x^{n+1}\,, \quad \text{kde } c \text{ leží mezi } x \text{ a } x_0.$$

Zřejmě

$$|R_n(x)| = \left| \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \left| \mathrm{e}^{|x|} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \,.$$

Ukážeme-li, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, pak nutně i $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Ale řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ je řadou konvergentní, a tedy podle věty 1 je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0\,.$$

Na závěr tohoto odstavce uveďme Taylorovy řady některých funkcí, spolu s intervaly, kde se těmto funkcím rovnají:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,, \quad x \in \mathbb{R} \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \quad x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,, \quad x \in \mathbb{R} \\
\ln(x+1) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \frac{x^n}{n}\,, \quad x \in (-1, 1\rangle \\
\operatorname{arctg} x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,, \quad x \in \langle -1, 1\rangle
\end{aligned}$$