Matematika III
Úvod do funkcionální analýzy

Miroslava Dubcová, Daniel Turzík, Drahoslava Janovská

Ústav matematiky

Přednášky ZS 2012-2013

Obsah

Definice 1. *Metrickým prostorem rozumíme každou množinu X opatřenou metrikou $\varrho : X \times X \to \mathbf{R}$, splňující požadavky*

1. $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$,
2. $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$,
3. $\varrho(x, y) \geq 0$, *přičemž* $\varrho(x, y) = 0$, *právě když* $x = y$,

pro každé $x, y, z \in X$.

Definice 2. *Necht X je metrický prostor a $\{x_n\}$ je posloupnost v X. Posloupnost $\{x_n\}$ nazveme cauchyovskou, jestliže $\varrho(x_n, x_m) \to 0$ pro $n, m \to \infty$ (tj. ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro každé $n \geq n_0, m \geq n_0$ je $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$).*

Zřejmě každá poslopnost, která má limitu v X je cauchyovská. Plyne to z vlastnosti metriky

$$\varrho(x_n, x_m) \leq \varrho(x_n, x) + \varrho(x_m, x).$$

Definice 3. *Metrický prostor X je úplný právě tehdy, když každá cauchyovská posloupnost má limitu v X.*

Příklady úplných metrických prostorů jsou např. prostory $\mathbb{R}^n$ s euklidovskou metrikou.

Definice 4. *Normovaným lineárním prostorem rozumíme každý vektorový prostor V nad tělesem* **F** *vybavený normou $\|.\| : V \to \mathbb{R}$, splňující požadavek*

1. $\|x\| \geq 0$, *přičemž* $\|x\| = 0$, *právě když* $x = o$ *(o je nulový prvek prostoru V),*
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

pro každé $x, y \in V$ a $\alpha \in$ **F***.*

Je-li $\mathbf{F} = \mathbb{R}$ nazýváme prostor V reálným normovaným prostorem, v případě $\mathbf{F} = \mathbb{C}$ nazýváme prostor V komplexním normovaným prostorem.

Příklad: Je-li X lineární normovaný prostor, potom

$$\varrho(x,y) = \|x-y\|\,, \quad \text{pro } x,y \in X$$

je metrika.

Definice 5. *Každý normovaný lineární prostor, který je v příslušné metrice úplný nazýváme* **Banachův prostor***.*

Věta 1. *Necht X je normovaný lineární prostor, potom norma $\|.\| : x \mapsto \|x\|$ je na X stejnoměrně spojitá funkce.*

Důkaz: Musíme dokázat, že platí

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x,y \in X\ \|x-y\| < \delta \Rightarrow |\|x\| - \|y\|| < \varepsilon\,.$$

Důkaz plyne z trojúhelníkové nerovnosti a z vztahu $x = (x-y)+y$ a $y = (y-x)+x$. Platí tedy

$$\begin{aligned} \|x\| \le \|x-y\| + \|y\| \quad &\Rightarrow \quad \|x\| - \|y\| \le \|x-y\| \\ \|y\| \le \|y-x\| + \|x\| \quad &\Rightarrow \quad \|y\| - \|x\| \le \|y-x\| = \|x-y\|. \end{aligned}$$

Zvolíme-li $\delta = \varepsilon$ plyne z předchozího

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| < \delta = \varepsilon.$$

■

Příklady prostorů a jejich norem:

1. $l_n^p = \{x = (x_1, \ldots, x_n);\ x_i \in \mathbb{R}(\text{ resp.}\mathbb{C})\},\ \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p \geq 1.$
2. $l_n^\infty = \{x = (x_1, \ldots, x_n);\ x_i \in \mathbb{R}(\text{ resp.}\mathbb{C})\},\ \|x\|_\infty = \max_{i \in \mathbb{N}}\{|x_i|\},$
3. $C([a, b]) = \{f,$ reálná (resp. komplexní) spojitá funkce na intervalu$[a, b]\},$ $\|f\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|,$
4. $C([a, b]) = \{f,$ reálná (resp. komplexní) spojitá funkce na intervalu$[a, b]\},$ $\|f\|_i = \int_a^b |f(t)| \mathrm{d}x,$
5. $c = \{\text{posloupnost },\ x = \{x_n\};\ \lim_{n\to\infty} x_n < \infty\},\ \|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|,$
6. $c_0 = \{\text{posloupnost } x = \{x_n\};\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0\},\ \|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|,$

Prostor l_2^2 znáte jako prostor $\mathbb{R}^2$ s euklidovskou normou.
Všechny tyto prostory s uvedenými normami, kromě prostoru $C([a, b])$ s integrální normou $\|f\|_i$, jsou úplné, tj. jsou to Banachovy prostory.

Příklady dalších prostorů a jejich norem:

Necht $\mathcal{L}^p(X),\ p \in [1, \infty)$ je množina všech μ-měřitelných funkcí na X, kde μ je (obvykle) Lebesgueova míra na $X \subset \mathbb{R}^n$, pro které $\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty$. Číslo

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

nazýváme L^p-normou. V příkladech, se kterými se setkáváme bude obvykle $X \subset \mathbb{R}$ interval (nebo $X \subset \mathbb{R}^2$ obdélník apod.) a f bude spojitá funkce na X, až na množinu míry 0. Lebesgueův integrál lze v těchto příkladech nahradit Riemannovým integrálem tak, jak je zavedeno ve skriptech MI a MII.

Necht $\mathcal{L}^\infty(X)$ je množina všech μ-měřitelných funkcí na X, pro které existuje konstanta K tak, že $|f(x)| \leq K$ pro μ-skoro všechna $x \in X$. Nejmenší takové číslo K označme

$$\sup_X{}^* |f| = \|f\|_\infty$$

a nazýváme ho L^∞-normou.

Normy $\|.\|_p$ a$\|.\|_\infty$ mají všechny vlastnosti normy až na to, že nenulová funkce může mít normu 0. Pro $1 \leq p \leq \infty$ definujme proto třídu funkcí

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^p(X), g = f \mu - \text{skoro všude na } X\}.$$

Nyní můžeme definovat prostor

$$L^p(X) = \{[f],\ f \in \mathcal{L}^p(X)\}$$

a operace

$$[f+g]=[f]+[g], \quad [\alpha f]=\alpha[f].$$

Prostor $L^p(x)$ s danými operacemi je lineární prostor s normou $\|[f]\|_p=\|f\|_p$.
Zvolíme-li $X=\{1,2,3,\dots\}$ dostaneme prostory l^p a l^∞.
Vice o μ-měřitelných funkcích viz [**?**]

1. $L^p(X)=\{[f],\ f\in\mathcal{L}^p(X)\},\ \|f\|_p=\left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$,
2. $L^\infty(X)=\{[f],\ f\in\mathcal{L}^\infty(X)\},\ \|f\|_\infty=\sup_X{}^*|f|$,
3. $l^p=\{$posloupností $x=\{x_n\},\ x_n\in\mathbb{R}$(resp. $\mathbb{C}$); $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty\}$,

   $$\|x\|_p=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$
4. $l^\infty=\{$omezených posloupností $x=\{x_n\},\ x_n\in\mathbb{R}$(resp. $\mathbb{C}$), $\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|\}$,
   $\|x\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$,

Definice 6. *Řekneme, že normy $\|.\|_1$ a $\|.\|_2$ na lineárním prostoru X jsou ekvivalentní, existují-li takové konstanty $\alpha, \beta > 0$, že*

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1 \,.$$

Snadno se ukáže, že ekvivalentní normy dávají stejné topologie, tj. otevřené množiny jsou v příslušných metrikách stejné.
Příklad: Dokažme, že normy $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ a $\|.\|_\infty$ v $\mathbb{R}^2$ jsou ekvivalentní.

$$\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{aligned} \|\vec{x}\|_1 &= |x_1| + |x_2| \\ \|\vec{x}\|_2 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \|\vec{x}\|_\infty &= \max\{|x_1|, |x_2|\}. \end{aligned}$$

Nejdříve dokážeme ekvivalenci norem $\|.\|_1$, $\|.\|_2$:
$\|\vec{x}\|_1^2 \;=\; (|x_1| + |x_2|)^2 \;=\; |x_1|^2 + 2\,|x_1|\,|x_2| + |x_2|^2 \geq x_1^2 + x_2^2 \;=\; \|\vec{x}\|_2^2.$
Dostáváme $\|\vec{x}\|_1 \geq \|\vec{x}\|_2$.
Ze vztahu $(|x_1| - |x_2|)^2 \geq 0$ plyne $x_1^2 + x_2^2 \geq 2|x_1|\,|x_2|$. Použijeme tuto nerovnost
$\|\vec{x}\|_1^2 \;=\; (|x_1| + |x_2|)^2 \;=\; |x_1|^2 + 2\,|x_1|\,|x_2| + |x_2|^2 \leq 2(x_1^2 + x_2^2) \;=\; 2\|\vec{x}\|_2^2.$
Dostáváme $\|\vec{x}\|_1 \leq \sqrt{2}\|\vec{x}\|_2$.

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\|\vec{x}\|_1 \le \|\vec{x}\|_2 \le \|\vec{x}\|_1}.$$

Nyní dokážeme ekvivalenci norem $\|.\|_\infty$, $\|.\|_2$:
$\|\vec{x}\|_\infty^2 \;=\; \max\{x_1^2, x_2^2\} \le x_1^2 + x_2^2 \;=\; \|\vec{x}\|_2^2$.
Dostáváme $\|\vec{x}\|_\infty \le \|\vec{x}\|_2$.
$\|\vec{x}\|_2^2 \;=\; x_1^2 + x_2^2 \le 2\max\{x_1^2, x_2^2\}; = \; \|\vec{x}\|_\infty^2$.
Dostáváme $\|\vec{x}\|_2 \le \sqrt{2}\|\vec{x}\|_\infty$.

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\|\vec{x}\|_2 \le \|\vec{x}\|_\infty \le \|\vec{x}\|_2}.$$

□

Topologie generované těmito normami jsou stejné. Platí dokonce věta:

Věta 2. *Všechny normy na konečně rozměrném lineárním prostoru jsou navzájem ekvivalentní.*

Důkaz: viz [**?**] 1.7 ■

Důsledek 1. *Každý konečně rozměrný normovaný lineární prostor je Banachův. Každý konečně rozměrný podprostor normovaného lineárního prostoru je uzavřený.*

Důkaz: Označme tento prostor E a $\{e_1, \ldots, e_n\}$ jeho bázi. Z předchozí věty plyne, že si můžeme zvolit libovolnou normu. Zvolíme si tedy normu $\|.\|_\infty$. Pokud $x = \alpha_1\, e_1 + \cdots + \alpha_n\, e_n$ je $\|x\|_\infty = \max\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|\}$. Z předpokladu, že posloupnost $\{x_m\}$ je cauchyovská plyne, že posloupnosti koeficientů $\{(\alpha_i)_m\}$ pro $i = 1, \ldots, n$ jsou číselné cauchyovské posloupnosti a tudíž konvergentní ($(\alpha_i)_m \to \alpha_i$). Posloupnost $\{x_m\}$ je tedy konvergntní v E ($x_m \to (\alpha_1\, e_1 + \cdots + \alpha_n\, e_n)$) a prostor je úplný a tedy Banachův.
Pro důkaz druhé části věty předpokládejme, že E je podprostor prostoru V. Je-li $\{x_m\}$ posloupnost z E, která konverguje k x, je posloupnost cauchyovská $\{x_m\}$. Z úplnosti prostoru E plyne, že $x \in E$ a E je tedy uzavřený. $\blacksquare$

Definice 7. *Prostorem se skalárním součinem rozumíme každý lineární prostor H (nad $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$), v němž je pro každé dva body x, y definován skalární součin (x, y) jako prvek z $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$ splňující požadavky:*

(a) $(x, x) \geq 0$ *a* $(x, x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = o$ *(o je nulový prvek prostoru),*

(b) $(x, y) = \overline{(y, x)}$,

(c) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$, $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$,

(d) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

Definujeme-li zobrazení $\|.\| : x \mapsto \sqrt{(x, x)}$, má toto zobrazení vlastnosti normy. Obtížnější je pouze důkaz trojúhelníkové nerovností. Obvykle se dokazuje pomocí tzv. Schwartzovy nerovnosti.

Věta 3 (Schwartzova nerovnost). *Necht H je prostor se skalárním součinem, potom pro všechna $x, y \in H$ platí nerovnost*

$$|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

Důkaz: Nejdříve předpokládejme, že H je prostor nad reálnými čísly. Pro libovolné α platí s využitím vztahu (c) a (d)

$$0 \leq (x - \alpha\, y, x - \alpha\, y) = \|x\|^2 - 2\,\alpha(x, y) + \alpha^2\|y\|^2\,.$$

Protože výraz vpravo je nezáporný pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$, je nutně diskriminant $D \leq 0$. Ze vztahu $D = 4\,(x, y)^2 - 4\,\|x\|^2\,\|y\|^2 \leq 0$ plyne

$$|(x, y)| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

Necht H je prostor nad komplexními čísly. V tomto případě

$$0 \leq (x - \alpha\, y, x - \alpha\, y) = \|x\|^2 - (x, \alpha\, y) - \overline{(x, \alpha\, y)} + |\alpha|^2\|y\|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}(x, \alpha\, y) + |\alpha|^2\|y\|^2$$

Stačí pro $(x, y) \neq 0$ zvolit $t \in \mathbb{C}$, tak aby $|t| = 1$ a $|(x, y)| = (x, t\, y)$. Potom opět dostáváme pro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$0 \leq (x - t\,\alpha\, y, x - t\,\alpha\, y) = \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(x, t\,\alpha\, y) + \alpha^2\|y\|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - 2\,\alpha|(x, y)| + \alpha^2\|y\|^2.$$

Nyní důkaz můžeme dokončit stejně jako v reálném případě. ∎

Nyní můžeme dokázat trojúhelníkovou nerovnost z definice normy.

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2+(x,y)+(y,x)+\|y\|^2 = \|x\|^2+2\,\mathrm{Re}(x,y)+\|y\|^2 \leq$$
$$\leq \|x\|^2 + 2\,|(x,y)| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

V poslední nerovnosti jsme využili Schwartzovu nerovnost. Platí tedy

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Hilbertův prostor je každý prostor se skalárním součinem, který je v zavedené normě $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ úplný.
Každý Banachův prostor nad $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) tvoří Hilbertův prostor, jestliže příslušná norma splňuje pro všechna x, y tzv. rovnoběžníkové pravidlo

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|x\|^2).$$

Položíme-li v reálném případě

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2),$$

resp. v komplexním případě

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) + \mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2,$$

je norma již odvozena ze skalárního součinu (tj. $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$).

Příklad:

a) $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) s euklidovskou normou je Banachův. Je také Hilbertův?

Euklidovská norma je $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Platí tedy

$$P: \quad \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = (x_1+y_1)^2 + \cdots + (x_n+y_n)^2 + (x_1-y_1)^2, \ldots, (x_n - y$$

$$= 2\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_1^2 + \cdots + y_n^2\right)$$

$$L: \quad 2\left(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2\right) = 2\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_1^2 + \cdots + y_n^2\right)$$

$P = L \quad \Rightarrow$ norma splňuje rovnoběžníkové pravidlo.

Skalární součin tedy je:

$$\begin{aligned}
(\vec{x},\vec{y}) &= \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|\right) = \\
&= \frac{1}{4}\Big((x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2) + \cdots + (x_n^2 + 2x_ny_n + y_n^2) \\
&\quad -(x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2) - \cdots - (x_n^2 - 2x_ny_n + y_n^2)\Big) = \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} 4\, x_iy_i = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i\,.
\end{aligned}$$

$\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) s euklidovskou normou je Hilbertův.

Pokud uvažujeme $\mathbb{C}$:

$$(\vec{x}, \vec{y}) \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}\,.$$

b) $L^p(X)$ je Hilbertův pro $p = 2$.. Ověříme rovnoběžníkové pravidlo.
norma: $\|f\| = \left(\int_X f^2 \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
P: \;\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 \;&=\; \int_X (f-g)^2 \,\mathrm{d}\mu + \int_X (f-g)^2 \,\mathrm{d}\mu = \\
&=\; \int_X (f^2 + 2\,f\,g + g^2)\mathrm{d}\mu + \int_X (f^2 - 2\,f\,g + g^2)\mathrm{d}\mu = \\
&=\; \int_X (2\,f^2 + 2\,g^2)\mathrm{d}\mu = 2\int_X f^2 \,\mathrm{d}\mu + 2\int_X g^2 \,\mathrm{d}\mu \\
L: \quad 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right) \;&=\; 2\int_X f^2 \,\mathrm{d}\mu + 2\int_X g^2 \,\mathrm{d}\mu\,, \quad L \;=\; P
\end{aligned}$$

Platí rovnoběžníkové pravidlo a skalární součin je $(f, g) \;=\; \displaystyle\int_X f\,\bar{g}\,\mathrm{d}\mu$

c) Speciálně pro l^2 je Hilbertův a skalární součin je $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \;=\; \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n\,.$ $\square$

H je Hilbertův prostor a $S \subset H$. S nazýváme **ortonormální soustavou** jestliže platí $x, y \in S$, $\begin{array}{ll} (x, y) = 0 \text{ pro} & x \neq y \\ (x, x) = 1 & \end{array}$.

Každá konečná podmnožina ortonormální soustavy je lineárně nezávislá a tedy každá ortonormální soustava je lineárně nezávislá.
Ortogonální báze Hilbertova prostoru je každá maximální ortonormální soustava (tj. taková soustava, ke které již nelze přidat prvek tak, aby zůstala ortonormální).

Věta 4. *V každém Hilbertově prostoru existuje ortonormální báze.*

Důkaz: viz [**?**] 1.29 ■

Připomeňme pojem Hamelovy (algebraické) báze. Necht X je lineární prostor. Množina $H \subset X$ se nazývá **Hamelova báze** prostoru X, jestliže každá konečná podmnožina prvků z H je lineárně nezávislá a každý prvek z X lze zapsat jako konečná lineární kombinace prvků z H.
Pro konečně dimenzionální prostory je ortonormální báze rovna Hamelově bázi.
Pro nekonečně dimenzionální prostor to neplatí.

Věta 5. *Hilbertův prostor je separabilní, právě když v něm existuje spočetná ortonormální báze.*

Důkaz: Připomeňme, že separabilní prostor je každý prostor ve kterém existuje spočetná hustá podmnožina.
Má-li Hilbertův prostor H spočetnou ortonormální bázi, potom množina všech konečných lineárních kombinaci prvků této báze s racionálními koeficientami je hustá v H.
Naopak, má-li Hilbertův prostor H nespočetnou ortonormální bázi S, je pro $x,\ y \in S$ je

$$\begin{aligned} \|x-y\| &= \sqrt{(x-y, x-y)} = \\ &= \sqrt{(x,x)-(x,y)-(y,x)+(y,y)} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Tedy H není separabilní. ∎

Věta 6. *Necht X je úplný prostor necht $\{e_n\}$ je nekonečná spočetná ortogonální množina v X, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n e_n$ konverguje, právě když $\sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n|^2 < \infty$ a pro součet řady $x = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n e_n$ platí vztahy $\zeta_n = (x, e_n)$.*

Důkaz: Označme $s_n = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i e_i$ částečné součty. Pro $m < n$ pak z ortonormality plyne

$$\|s_n - s_m\|^2 = \|\sum_{i=m+1}^{n} \zeta_i e_i\|^2 = \sum_{i=m+1}^{n} |\zeta_i|^2.$$

Protože X je úplný je posloupnost $\{s_n\}$ konvergentní v X právě když $\sum_{i=1}^{\infty} |\zeta_i| < \infty$ ($\{s_n\}$ je cauchyovská). Je-li tato podmínka splněna, platí $\zeta_i = (s_n, e_i)$ pro $1 \leq i \leq n$. Protože $s_n \to x$ a skalární součin je spojitý, platí $(s_n, e_i) \to (x, e_i)$ pro $n \to \infty$. Tedy $\zeta_i = (x, e_i)$. ∎

a) Příklady ortonormálních soustav a bází:
System $\mathcal{E} = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx;\ n \in \mathbb{N}\}$ je ortogonální soustavou Hilbertova prostoru $L^2([0, 2\pi])$. Není těžké ukázat pomocí integrace per partes, že libovolné dvě různé funkce z $\mathcal{E}$ jsou na sebe kolné a že každá z nich má normu 1. Systém $\mathcal{E}$ tvoří dokonce ortonormální bázi. Nástin důkazu viz [**?**] 1.36.

Z předchozí věty 6 plyne věta z teorie Fourierových řad: Jsou-li a_i, $i = 0, 1, \dots$ a b_i, $i = 1, 2, \dots$ posloupnosti reálných čísel takových, že

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) < \infty,$$

pak existuje funkce f, $[f] \in L^2([0, 2\pi])$ jejíž Fourierovy koeficienty jsou

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos n\,x \,\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin n\,x \,\mathrm{d}x.$$

Pro funkci f platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

a koeficienty z věty 6 jsou

$$\zeta_1 = a_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}},\ \zeta_2 = a_1 \sqrt{\pi},\ a_3 = b_1 \sqrt{\pi}, \dots .$$

b) Soustava funkcí $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{inx};\ n \in \mathbb{N}\}$ je ortonormální báze komplexního Hilbertova prostoru $L^2([0, 2\pi])$.

c) Necht $e_n = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$ jsou "jednotkové"vektory l^2. Potom $\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je ortonormální bází l^2.

Věta 7 (Besselova nerovnost). *Je-li $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ortonormální soustava v Hilbertově prostoru H a $x \in H$, platí*

$$\sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2 \ \leq\ \|x\|^2.$$

Důkaz: Necht F je konečná podmnožina A a $x \in H$. Položme $x_F = x - \sum_{\alpha \in F}(x, e_\alpha)e_\alpha$. Je lehké ukázat, že x_F je kolmé na všechna $e_\alpha,\ \alpha \in F$. Potom platí

$$\begin{aligned}
\|x_F\|^2 &= (x_F, x_F) = (x_F, x - \sum_{\alpha \in F}(x, e_\alpha)e_\alpha) = (x_F, x) - \sum_{\alpha \in F} \overline{(x, e_\alpha)}(x_F, e_\alpha) = \\
&= (x_F, x) = (x - \sum_{\alpha \in F}(x, e_\alpha)e_\alpha, x) = (x, x) - \sum_{\alpha \in F}(x, e_\alpha)(e_\alpha, x) = \\
&= \|x\|^2 - \sum_{\alpha \in F} |(x, e_\alpha)|^2.
\end{aligned}$$

Odvozený vztah použijeme v další úpravě

$$\sum_{\alpha \in F} |(x, e_\alpha)|^2 \leq \sum_{\alpha \in F} |(x, e_\alpha)|^2 + \|x_F\|^2 = \|x\|^2.$$

Množina těch $\alpha \in A$ pro které $(e_\alpha, x) \neq 0;\ x \in H$ je buď konečná nebo spočetná. Ze vztahu

$$\sum_{\alpha=1}^{n} |(x, e_\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$$

totiž plyne, že počet těch $\alpha \in A$ pro která $|(x, e_\alpha)| \geq \frac{1}{n}$ není větší než $n^2 \|x\|^2$. Je-li $(x, e_\alpha) \neq 0$, je $|(x, u)| \geq \frac{1}{n}$ pro nějaké n. Z toho již plyne, že množina prvků $\alpha \in A$ s vlastností $(x, e_\alpha) \neq 0$ je spočetným sjednocením konečných množin a je to tedy konečná nebo spočetná množina. Platí tedy

$$\sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2 \ \leq \ \|x\|^2,$$

protože je to buď konečný součet nebo absolutně konvergentní nekonečná řada. $\blacksquare$

Zopakujme si definici lineárního zobrazení. Předpokládejme, že M, N jsou normované lineární prostory s normamy $\|.\|_M$, $\|.\|_N$.

Definice 8. *Nechť* $L : M \to N$ *a*

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y), \quad \textit{pro všechna } x, y \in M, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ (\textit{resp. } \mathbb{C})$$

pak L *nazýváme* **lineární zobrazení**. *Jestliže* $M = N$ *mluvíme o lineárním operátoru, je-li* $N = \mathbb{R}$ (*resp.* $\mathbb{C}$) *mluvíme o lineárním funkcionálu (lineární formě).*

Definice 9. *Říkáme, že lineární zobrazení* $L : M \to N$ *je* **omezené** *zobrazuje-li omezené množiny v* M *na omezené množiny v* N.

Platí, že lineární zobrazení je omezené, jestliže je omezené na jednotkové kouli, tj,

$$\exists\ K > 0, \text{ takové, že } \|Lx\|_N \leq K \text{ pro } \forall\ x \in M, \ \|x\|_M \leq 1.$$

Pro $a \in M$ a $\delta > 0$ označme $\mathcal{O}_\delta(a) = \{x \in M; \ \|x - a\|_M < \delta\}$ $\delta-$okolí v M a pro $b \in N$ a $\varepsilon > 0$ označme $\mathcal{O}_\varepsilon(b) = \{y \in N, \ \|y - b\|_N < \varepsilon\}$ $\varepsilon-$okolí v N.

Definice 10. *Lineární zobrazení* $L: M \to N$ *je spojité v* $a \in M$ *jestliže platí Pro všechna* $\mathcal{O}_\varepsilon(La)$ *existuje* $\mathcal{O}_\delta(a)$ *takové, že* $L(\mathcal{O}_\delta(a)) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(La)$, *tj.*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ takové, že pro } \forall\, x;\ \|x - a\|_M < \delta \text{ platí } \|Lx - La\|_N < \varepsilon.$$

Platí užitečná věta

Věta 8. *Necht* $L: M \to N$ *je lineární zobrazení, následující výroky jsou ekvivalentní*

- **(i)** *L je spojité*
- **(ii)** *L je spojité v o (o je nulový prvek)*
- **(iii)** *L je omezené*

Důkaz: (i) $\Rightarrow$ (ii) zřejmé.
Dokážeme, že z (ii) $\Rightarrow$ (iii):
Je-li L spojité v $o \Rightarrow$ pro $\varepsilon = 1\ \exists\, \delta$ takové, že pro $\|x\|_M \leq \delta$ je $\|Lx\|_N \leq 1$.
Označme jednotkovou kouli $B_M = \{z \in M;\ \|z\|_M \leq 1\}$. Ze spojitosti v o plyne:

$$z \in B_M \text{ potom } \|Lz\|_N = \frac{1}{\delta}\|L(\delta z)\|_N \leq \frac{1}{\delta}.$$

L je tedy omezené na jednotkové kouli, je tedy omezené.

Nyní dokážeme, že z (iii) $\Rightarrow$ (i):
Necht $\|Lz\|_N \leq K$ pro všechna $z \in B_M$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$.
Pak pro $\|x - y\|_M < \xi\delta$ platí

$$\|Lx - Ly\|_N = \|L(x - y)\|_N = \frac{\varepsilon}{K}\|L(\frac{K}{\varepsilon}(x - y))\|_N < \frac{\varepsilon}{K}K = \varepsilon.$$

Poslední nerovnost plyne z toho, že $z = \frac{K}{\varepsilon}(x - y)) \in B_M$ a L je omezené na jednotkové kouli. ■

Definice 11. *Nechť* $L: M \to N$ *je omezený lineární zobrazení. Číslo*

$$\|L\| = \sup_{\|x\|_M \le 1} \|Lx\|_N,$$

nazýváme **normou lineárního zobrazení** L.

Symbolem $\mathcal{L}(M, N)$ označme prostor všech omezených (spojitých) lineárních zobrazení z M do N.
Jestliže $M = N$ je $\mathcal{L}(M)$ prostor všech omezených lineárních operátorů na M.
Jestliže $N = \mathbb{R}(resp.\ \mathbb{C})$ je $\mathcal{L}(M, N) = M^*$ prostor všech omezených lineárních funkcionálů (duál prostoru M).

Věta 9. *Nechť M, N jsou normované lineární prostory, potom $\mathcal{L}(M, N)$ s normou z definice 11 je také normovaný lineární prostor. Je-li N Banachův je i prostor $\mathcal{L}(M, N)$ Banachův, spaciálně M^* je Banachův. Navíc pro $L \in \mathcal{L}(M, N)$ a $x \in M$ platí*

$$\|Lx\|_N \le \|L\|\ \|x\|_M.$$

Důkaz: Linearita je zřejmá. K důkazu, že $\|L\|$ je norma, dokážeme pouze trojúhelníkovou nerovnost (ostatní je zřejmé).

$$\begin{aligned}\|(L+T)x\|_N &= \|Lx + Tx\|_N \le \|Lx\|_N + \|Tx\|_N \le \|L\| + \|T\| \\ \sup_{\|x\|_M \le 1} \|(L+T)x\|_N &\le \|L\| + \|T\|.\end{aligned}$$

Platí tedy

$$\|L+T\| \ \le \ \|L\| + \|T\|$$

Dále dokážeme nerovnost $\|Lx\|_N \le \|L\|\,\|x\|_M$.

$$\|L\frac{x}{\|x\|_M}\|_N \le \|L\| \ \Rightarrow \ \|Lx\|_N \le \|L\|\,\|x\|_M.$$

Necht N je Banachův, tj. úplný a $\{L_n\}$ je cauchyovská posloupnost v $\mathcal{L}(M,N)$. Protože

$$\|L_n x - L_m x\|_N \le \|L_n - L_m\|\,\|x\|_M,$$

je posloupnost $\{L_n x\}$ cauchyovská v N, N je úplný, existuje tedy $z \in N$ takové, že $\lim\limits_{n\to\infty} L_n x = z$.
Označme pro každé $x \in M$, $Lx = z$, to nám definuje zobrazení L, které je lineární (důkaz je zřejmý). Stačí dokázat, že L je omezené. Posloupnost $\{L_n\}$ je cauchyovská, tedy je omezená, existuje tedy β takové, že

$$\|L_n x\|_N \le \|L_n\|\,\|x\|_M \le \beta\,\|x\|_M.$$

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n x\|_N = \|Lx\|_N \le \beta\,\|x\|_M \ \Rightarrow \ \|L\| \le \beta.$$

(První rovnost plyne ze spojitosti normy.)

Zobrazení L je tedy omezené, $L \in \mathcal{L}(M, N)$. Prostor $\mathcal{L}(M, N)$ je tedy úplný. ■

Příklad: Necht $T: C([-1,1]) \to \mathbb{R}$ a pro $f \in C([-1,1])$ je

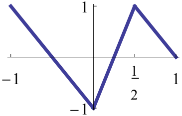
$$\|f\| = \max_{t\in[-1,1]} |f(t)|.$$

Funkcionál T je definován vztahem $Tf = 7f(-1) - 2f(0) + f(\frac{1}{2})$. Zjistěte, zda je funkcionál spojitý. V případě, že je spojitý, vypočtěte normu funkcionálu T. Předpokládejme $f \in C([-1,1])$, $\|f\| \leq 1$.

$$|Tf| = |7f(-1) - 2f(0) + f(\frac{1}{2})| \leq 7|f(-1)| + 2|f(0)| + |f(\frac{1}{2})| \leq 10,$$

$$\sup_{\|f\|\leq 1} |Tf| \leq 10 \Rightarrow \boxed{\|T\| \leq 10}.$$

T je tedy spojitý. Vypočteme normu operátoru T. Zvolme funkci $g \in C([-1,1])$, $\|g\| = 1$ viz obr.



$$|Tg| = 7\cdot 1 - 2\cdot(-1) + 1 = 10 \Rightarrow \|T\| \geq |Tg| = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\|T\| \geq 10}.$$

Platí tedy $\|T\| = 10$. $\square$

Příklad: Necht $T: L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ a pro $f \in L^2([0,1])$ je

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f|^2 \, \mathrm{d}\mu}.$$

Operátor T je definován vztahem

$$Tf(t) \; = \; t \int_0^1 f \, \mathrm{d}\mu \text{ pro } t \in [0,1].$$

Zjistěte, zda je operátor spojitý. V případě, že je spojitý, vypočtěte normu operátoru T. Předpokládejme $f \in L^2([0,1])$, $\|f\| \leq 1$. Normu funkce Tf (přesněji třídy funkcí $[Tf]$) počítáme

$$\|Tf\|^2 = \int_0^1 t^2 \Big(\int_0^1 f(s)\,\mathrm{d}s\Big)^2 \mathrm{d}t = \Big(\int_0^1 f(s)\,\mathrm{d}s\Big)^2 \int_0^1 t^2 \,\mathrm{d}t = \Big(\int_0^1 f(s)\,\mathrm{d}s\Big)^2 \frac{1}{3} = (f,1)^2 \frac{1}{3}.$$

Prostor $L^2([0,1])$ je Hilbertův, použijeme Schwartzovu nerovnost proskalární součin $|(f,g)| \leq \|f\| \, \|g\|$.

$$\|Tf\|^2 \; = \; (f,1)^2 \frac{1}{3} \; \leq \; \|f\|^2 \, \|1\|^2 \frac{1}{3} \; = \; \frac{\|f\|^2}{3}.$$

$$\sup_{\|f\| \leq 1} \|Tf\| \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \; \Rightarrow \; \boxed{\|T\| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

T je tedy spojitý. Vypočtěme normu operátoru T. Zvolme funkci $g \in L^2([0,1]),\ g(t) = 1$ pro všechna $t \in [0,1]$. Platí $\|g\| = 1$.

$$\|Tg\| = \sqrt{\int_0^1 t^2 \int_0^1 g \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}t} = \sqrt{\int_0^1 t^2 \int_0^1 1 \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t} = \sqrt{\int_0^1 t^2 \,\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\|T\| \geq \|Tg\| = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{\|T\| \geq \tfrac{\sqrt{3}}{3}}.$$

Platí tedy $\|T\| = \frac{\sqrt{3}}{3}$. □

V této kapitole budeme uvažovat komplexní Banachův prostor X a Banachův prostor $\mathcal{L}(X)$.
Je-li T operátor na Banachově prostoru X, množinu

$$\mathcal{R}(T) = \{y = Tx;\ x \in X\}$$

nazýváme **obor hodnot** operátoru T. $\mathcal{R}(T)$ je lineární podprostor prostoru X. Je-li X konečně dimenzionální, potom je $\mathcal{R}(T)$ uzavřený. Je-li X nekonečně dimenzionální, potom nemusí být $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.

Věta 10. *Necht X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Existuje-li $\beta > 0$ tak, že $\|Tx\| \geq \beta\|x\|$ pro všechna $x \in X$, potom $\mathcal{R}(T)$ je uzavřená množina.*

Důkaz: Necht $y_n \in \mathcal{R}(T)$, $y_n \to y$. Volme $x_n \in X$ tak, že $Tx_n = y_n$, pak

$$\|x_n - x_m\| \leq \beta^{-1}\|Tx_n - Tx_m\| = \beta^{-1} \underbrace{\|y_n - y_m\|}_{\text{cauchyovská}} \ ,$$

tedy $\{x_n\}$ je cauchyovská a X je Banachův $\Rightarrow\ \exists\, x \in X;\ \lim x_n = x$. Protože T je spojitý, platí

$$y = \lim y_n = \lim Tx_n = T(\lim x_n) = Tx.$$

Platí tedy $y \in \mathcal{R}(T)$ a $\mathcal{R}(T)$ je tedy uzavřený. ∎

Definice 12. *Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývá* **vlastní hodnota** *operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$ existuje-li $x \neq o$, pro něž $Tx = \lambda x$. Každé $x \neq o$, které splňuje rovnici $Tx = \lambda x$ se nazývá* **vlastní vektor (funkce)** *příslušející vlastní hodnotě λ. Množinu všech vlastních hodnot značíme $\sigma_p(T)$ a nazýváme* **bodové spektrum** *operátoru T.*

Platí: λ je vlastní hodnota operátoru T, jestliže operátor $T - \lambda I$ není prostý, tj. inverzní operátor $(T - \lambda I)^{-1}$ neexistuje.

Věta 11. *Následující výroky jsou ekvivalentní pro operátory na konečně dimenzionálním lineárním prostoru X*

(i) *λ není vlastní hodnota operátoru T*

(ii) *$\mathcal{R}(T - \lambda I) = X$, tj. operátor $T - \lambda I$ je na.*

Věta říká, že rovnice $Tx - \lambda x = y$ má řešení právě tehdy, když homogenní rovnice $Tx - \lambda x = 0$ má pouze triviální řešení.
V prostorech nekonečné dimenze to neplatí, existují v nich operátory, které jsou prosté a nejsou na, nebo naopak.

Definice 13. *Říkáme, že komplexní číslo λ leží ve* **spektru** *operátoru T, značíme $\sigma(T)$, jestliže buď operátor $T - \lambda I$ není prostý, nebo $\mathcal{R}(T - \lambda I) \neq X$.*

Platí $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

Definice 14. *Operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je* **invertibilní** *právě tehdy, když existuje operátor $L \in \mathcal{L}(X)$ takový, že $L\,T = T\,L = I$, kde I je identický operátor na X (tj. $Tx = x$ pro všechna $x \in X$).*

Platí $\lambda \notin \sigma(T) \Leftrightarrow (T - \lambda I)$ je invertibilní.

Věta 12. *Operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertibilní právě tehdy, když je prostý a na.*

Důkaz:
a) Necht T je invertibilní, potom $\exists\, L \in \mathcal{L}(X)$ takový, že $L\,T = T\,L = I$.
Necht $T\,x = 0 \Rightarrow L\,T\,x = 0 \Rightarrow I\,x = 0 \Rightarrow x = 0$. T je prostý.
Necht $y \in X$, položme $x = L\,y \Rightarrow T\,x = T\,L\,y = I\,y = y$. Operátor T je na.
b) Předpokládejme, že T je prostý a na, pak $T \in \mathcal{L}(X)$ a $\mathcal{R}(T) = X$.
Z důsledku Banachovy věty (viz [**?**] 4.16) plyne,že T^{-1} je spojitý, tedy $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ a platí $T^{-1}T = T\,T^{-1} = I$. Operátor T je invertibilní. ∎

Příklad: Operátor $T : l^2 \to l^2$ je definovaný vztahem

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_1 + x_1, x_2 + \frac{x_1}{2}, x_3 + \frac{x_1}{3}, x_4 + \frac{x_1}{4}, \dots)$$

je invertibilní operátor, protože existuje operátor $L : l^2 \to l^2$ definovaný vztahem

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_1 - \frac{x_1}{2}, x_2 - \frac{x_1}{4}, x_3 - \frac{x_1}{6}, x_4 - \frac{x_1}{8}, \dots)$$

pro který platí $L\,T = T\,L = I$. Dá se ukázat, že operátory T i L jsou spojité. Platí

$$\|T\| \leq \sqrt{(1 + 2\frac{\pi}{\sqrt{6}} + \frac{\pi^2}{6})} \text{ a } \|L\| \leq \sqrt{(1 + \frac{\pi}{\sqrt{6}} + \frac{\pi^2}{24})}$$

□

Věta 13. *Necht X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Potom $\sigma(T)$ je uzavřená množina a*

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leq \|T\|\}.$$

Důkaz: viz [**?**] 5.8 ■

Příklad: $X = l^2$ je Banachův (dokonce Hilbertův) prostor,

$$\|\{x_n\}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}.$$

Definujme operátor $R: \; l^2 \; \to \; l^2$

$$R(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Určete spektrum operátoru R.

Platí: $\|R\{x_n\}\|^2 = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|\{x_n\}\|^2 \; \Rightarrow \; \|R\| = 1 \; \Rightarrow$

$$\sigma(R) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; \; |\lambda| \leq 1\}.$$

Stačí vyšetřovat jen $|\lambda| \leq 1$. Nejdříve vyšetříme bodové spektrum.

$$\text{Je-li } \lambda \neq 0;\; R\{x_n\} = \lambda\{x_n\} \;\Leftrightarrow\; \begin{array}{rcl} 0 = \lambda x_1 & \Rightarrow & x_1 = 0 \\ x_1 = \lambda x_2 & \Rightarrow & x_2 = 0 \\ x_2 = \lambda x_3 & \Rightarrow & x_3 = 0 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

$$\text{Je-li } \lambda = 0, \text{ pak } R\{x_n\} = \lambda\{x_n\} \;\Leftrightarrow\; \{x_n\} = \{0\}.$$

$(R - \lambda I)$ je prosté pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$, tedy

$$\sigma_p(R) = \emptyset.$$

Nyní vyšetříme pro která λ platí $\mathcal{R}(R - \lambda I) \neq l^2$. Vezmeme $\{y_n\}$ a hledáme $\{x_n\} \in l^2$ takové, že $\mathcal{R}(R - \lambda I)\{x_n\} = \{y_n\}$. Zvolme $\{y_n\} = \{1, 0, 0, 0, \dots\}$. Je-li $\lambda \neq 0$ najdeme $\{x_n\} = \{-1/\lambda^n\}$. Tato posloupnost není pro $|\lambda| \leq 1$ v l^2. Je-li $\lambda = 0$ neexistuje $\{x_n\}$ tak, aby $R\{x_n\} = \{1, 0, 0, 0, \dots\}$. Platí tedy

$$\sigma(R) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leq 1\}.$$

$\square$

Příklad: $X = L^2([0,1])$ je Banachův (dokonce Hilbertův) prostor,

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f|^2}.$$

Definujme operátor $L:\ L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$

$$Lf(t) = t\,f(t).$$

Určete spektrum operátoru L.

Nejdříve zjistíme, zda $L \in \mathcal{L}(L^2([0,1]))$, tj. zda L je spojitý:

$$\|Lf\|^2 = \int_0^1 (t|f(t)|)^2 \mathrm{d}t \leq \int_0^1 1 \cdot |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \|f\|^2 \;\Rightarrow\; \|L\| \leq 1.$$

Zvolme $f_n(t) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & t \in [0, 1-\frac{1}{n}] \\ \sqrt{n} & t \in (1-\frac{1}{n}, 1] \end{array} \right.$. Platí, že $\|f_n\| = \sqrt{\int_{1-\frac{1}{n}}^1 n \,\mathrm{d}t} = 1$.

Pro $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\|Lf_n\|^2 = \int_0^1 t^2 f_n^2(t) \mathrm{d}t = \int_{(1-\frac{1}{n})}^1 t^2\, n \,\mathrm{d}t \geq (1-\frac{1}{n})^2 \int_{(1-\frac{1}{n})}^1 n \,\mathrm{d}t = (1-\frac{1}{n})^2 \;\Rightarrow$$

$$\|L\| \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|Lf_n\|^2 = \sup_{n\in\mathbb{N}} (1-\frac{1}{n})^2 = 1 \;\Rightarrow\; \|L\| \geq 1.$$

Platí tedy $\|L\| = 1$. Toto jsme nemuseli určovat, zde nám stačí nerovnost $\|L\| \leq 1$.

Nyní určíme vlastní hodnoty operátoru.

$$Lf = \lambda f \;\Rightarrow\; 0 = \|Lf - \lambda f\|^2 = \int_0^1 |t-\lambda|^2 |f(t)|^2 \mathrm{d}t \;\Rightarrow\; |t-\lambda||f(t)| = 0$$

pro skoro všechna t $\;\Rightarrow\;$ $f(t) = 0$ pro skoro všechna t.
$L - \lambda I$ je prostý pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$, platí tedy

$$\sigma_p(L) = \emptyset.$$

Nyní zjistíme pro která λ platí $\mathcal{R}(L - \lambda I) = L^2([0,1])$. Předpokládejme $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0,1]$. Zvolme $g \in L^2([0,1])$

$$t\, f(t) - \lambda\, f(t) = g(t) \;\Rightarrow\; (t-\lambda) f(t) = g(t) \;\Rightarrow\; f(t) = \frac{g(t)}{t-\lambda} \;\Rightarrow\; f \in L^2([0,1]).$$

Platí tedy, že je-li $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0,1]$ potom $\lambda \notin \sigma(L)$.
Necht nyní $\lambda \in [0,1]$, operátor $L - \lambda I$ není na, protože

$$g(t) = 1 \;\Rightarrow\; (t-\lambda) f(t) = 1 \text{ pro všechna } t \in [0,1]$$

takové $f \in L^2([0,1])$ neexistuje.

$$\sigma(L) = [0,1].$$

$\square$

Nechť $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory, potom existuje právě jedno zobrazení $T^* : H_2 \to H_1$ tak, že

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \text{ pro } \forall\, x \in H_1, y \in H_2$$

přitom $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.

Definice 15. *Zobrazení T^* se nazývá adjungované zobrazení k zobrazení T.*

Definice 16. *Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ se nazývá* **hermitovský (samoadjungovaný)** *jestliže $T^* = T$. Pokud $TT^* = T^*T$ říkame, že T je normální.*

Platí, že vlastní hodnoty hermitovského operátoru jsou reálné. Pro každé $\lambda \in \sigma_p(T)$ a $x \neq o$ vlastní vektor platí totiž

$$\lambda(x,x) = (\lambda x, x) = (Tx, x) = (x, Tx) = \bar{\lambda}(x,x) \ \Rightarrow\ \lambda\|x\|^2 = \bar{\lambda}\|x\|^2 \ \Rightarrow$$

$$\lambda = \bar{\lambda}.$$

Věta 14. *Necht H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je hermitovský, označme*

$$m_T = \inf_{\|x\|=1} \{(Tx, x)\} \qquad M_T = \sup_{\|x\|=1} \{(Tx, x)\},$$

potom

$$\sigma(T) \subset [m_T, M_T], \ \text{přičemž} \ m_T, M_T \in \sigma(T).$$

Důkaz: viz [**?**] 8.12. ∎

Definice 17. *Relné číslo $r(T) = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} \{|\lambda|\}$ nazýváme* **spaktrální poloměr***.*

Věta 15. *Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$ hermitovský je $r(T) = \|T\|$.*

Důkaz: viz [**?**] 8.13. ∎

Příklad:
$H = \{f \in L^2([0,1]);\ f(0) = f(1) = 0$ a f má nekonečně derivací na $[0,1]\}$.
Definujme operátor $D = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$. Dokažte, že D je hermitovský operátor.

Platí

$$(Df,g)=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} g(t)\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{ll} u=g(t) & u'=\dfrac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} \\ v'=\dfrac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} & v=\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \end{array} \right| =$$

$$= \underbrace{\left[g(t)\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{ll} u=\dfrac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}) & u'=\dfrac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2} \\ v'=\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} & v=f(t) \end{array} \right| =$$

$$= -\underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t})f(t) \right]_0^1}_{=0} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2} f(t)\mathrm{d}t = (f,Dg).$$

Operátor D je hermitovský.
Vlastní hodnoty operátoru D jsou $-n^2\pi^2$ a vlastní funkce $\sin(n\pi)$, $n\in\mathbb{N}$.
Poznamenejme, že tento operátor není spojitý, jinak by nutně bylo jeho spektrum omezené. $\square$