Matematika III - Sbírka příkladů

Prof. RNDr. Drahoslava Janovská, CSc.
Doc. RNDr. Daniel Turzík, CSc.
RNDr. Miroslava Dubcová, Ph.D.
Mgr. Šimon Axmann, Ph.D.

Obsah

Kapitola 1

Číselné řady, konvergence a absolutní konvergence, kritéria konvergence.

1.1 Součet nekonečné řady

Příklad 1.1: Vypočtěme součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n .$$

Řešení: Řada je geometrická s kvocientem $q = \frac{2}{5} < 1$. Součet řady tedy je

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{2}{3}.$$

Příklad 1.2: Vypočtěme součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} .$$

Řešení: Rozložíme racionální výraz na parciální zlomky

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Nyní sečteme řadu

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Napíšeme si součet prvních m členů této řady

$$s_m = \frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m+1}\right) + \left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+2}\right)\right).$$

Některé zlomky se nám odečtou a dostaneme

$$s_m = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2}\right).$$

Součet řady tedy je

$$s = \lim_{m\to\infty} s_m \;=\; \frac{3}{4}.$$

Příklad 1.3: Vypočtěme součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}\,.$$

Řešení: Nejdříve si upravíme n-tý člen řady

$$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{n-(n-1)} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

Nyní sečteme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right).$$

Napíšeme si součet prvních m členů této řady

$$s_m = (\sqrt{1} - \sqrt{0}) + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + \cdots + (\sqrt{m-1} - \sqrt{m}) + (\sqrt{m} - \sqrt{m-1}).$$

Některé členy se nám odečtou a dostaneme

$$s_m = \sqrt{m} \;\;\Rightarrow\;\; \lim_{m\to\infty} s_m \;=\; \infty\,.$$

Součet řady tedy neexistuje.

Cvičení 1.1: V následujících cvičeních určete součet řady, pokud existuje.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{1-n}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{1-n}$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$,

f) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)}$,

g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$,

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3\,n+2}$.

1.2 Kritéria pro konvergenci číselných řady

Příklad 1.4: Pomocí integrálního kritéria vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}\,, \quad k \in \mathbb{R}\,.$$

Řešení: Pro $k \leq 0$ řada diverguje, protože není splněna nutná podmínka konvergence $(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} \neq 0)$. Vyšetříme nyní konvergenci pro $k > 0$. Na intervalu $\langle 1, \infty)$ je funkce $f(x) = \frac{1}{x^k}$ spojitá, klesající a kladná. Pro n-tý člen dané řady platí $a_n = f(n) = \frac{1}{n^k}$. Můžeme použít integrální kritérium. Pro $k > 1$ platí

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_1^{\infty} x^{-k}\mathrm{d}x \;=\; \left[\frac{x^{1-k}}{1-k}\right]_0^{\infty} \;=\; 0\,.$$

Pro $0 < k < 1$ platí

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k}\,\mathrm{d}x \;=\; \left[\frac{x^{1-k}}{1-k}\right]_0^{\infty} \;=\; \infty\,.$$

Pro $k = 1$ platí

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; [\ln|x|]_0^{\infty} \;=\; \infty\,.$$

Daná řada konverguje pro $k > 1$ a diverguje pro $k \leq 1$.

Příklad 1.5: Vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}\,.$$

Řešení: Použijeme-li pro řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ substituci $m = n + 2$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} \;=\; \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{m} \;=\; \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \,-\, 1 \,-\, \frac{1}{2} \;=\; \infty \,-\, \frac{3}{2} \;=\; \infty\,.$$

Podle příkladu 1.4 řada $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$ diverguje, diverguje proto i daná řada.

Příklad 1.6: Vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}\,.$$

Řešení: Použijeme srovnávací kritérium

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Našli jsme majorantní řadu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je geometrická řada s kvocientem $\frac{1}{2}$ a proto konverguje. Podle srovnávacího kritéria konverguje i řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}$.

Příklad 1.7: Vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}\,.$$

Řešení: Použijeme srovnávací kritérium

$$\frac{1}{n} = \frac{1+n}{n(n+1)} = \frac{1+n}{n+n^2} < \frac{1+n}{1+n^2}.$$

Našli jsme minorantní řadu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ podle příkladu 1.4 diverguje, tedy i řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$ diverguje.

Příklad 1.8: Vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n)!}\,.$$

Řešení: Použijeme podílové (D'Alembertovo) kritérium.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(3n+3)!}}{\frac{1}{(3n)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3n)!}{(3n+3)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\right| = 0 < 1\,.$$

Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n)!}$ podle podílového kritéria konverguje.

Příklad 1.9: Vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}\,.$$

Řešení: Funkce $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ je spojitá klesající a kladná na intervalu $\langle 1, \infty)$. Použijeme integrální kritérium.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; [\operatorname{arctg} x]_1^{\infty} \;=\; \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \;=\; \frac{\pi}{4} < \infty\,.$$

Integrál konverguje, konverguje tedy i daná řada.

Příklad 1.10: Vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}\,.$$

Řešení: Funkce $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ je spojitá klesající a kladná na intervalu $\langle 1, \infty)$. Použijeme integrální kritérium.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x \;=\; \left[2\sqrt{x+1}\right]_1^{\infty} \;=\; 2\left(\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{2}\right) \;=\; \infty\,.$$

Integrál diverguje, diverguje tedy i daná řada.

Příklad 1.11: Vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Řešení: Označme $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Platí $0 < a_{n+1} < a_n$ pro $n \geq 1$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Podle Leibnitzova kritéria řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ konverguje. Vyšetřeme ještě absolutní konvergenci, t.j. zda konverguje řada absolutních hodnot $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Tato řada podle příkladu 1.4 diverguje. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ konverguje tedy neabsolutně.

Příklad 1.12: Vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{2\,n+1}\right)^n\,.$$

Řešení: Použijeme odmocninové (Cauchyovo) kritérium. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{2\,n+1} \;=\; \frac{1}{2} \;<\; 1\,.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+n}{2\,n+1}\right)^n$ tedy konverguje.

Cvičení 1.2: V následujících cvičeních vyšetřete konvergenci řady. Použijte srovnávací kritérium

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\,n-1}\,,$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\,n-1)^2}\,,$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,\sqrt{n+1}}\,,$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\,.$

Cvičení 1.3: V následujících cvičeních vyšetřete konvergenci řady. Použijte podílové kritérium

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\,n-1)!}\,,$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}\,,$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}\,,$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}\,,$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}\,,$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n)!}\,.$

Cvičení 1.4: V následujících cvičeních vyšetřete konvergenci řady. Použijte integrální kritérium

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)}\,,$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{\mathrm{e}}}{n^2}\,,$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,\ln\!\left(\frac{1}{n}+1\right),$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+\frac{1}{2}}\,.$

Cvičení 1.5: V následujících cvičeních vyšetřete konvergenci řady. Použijte odmocninové kritérium

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}\,,$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)^n\,,$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\,n+1}{n+3}\right)^n\,,$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^n n}{2^n}\,.$

Cvičení 1.6: V následujících cvičeních vyšetřete konvergenci řady. Použijte Leibnitzovo kritérium. V případě, že konverguje, vyšetřete, zda konverguje absolutně.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\,,$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2}\,,$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}\frac{\sqrt{n}}{n+1}\,,$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}\frac{1}{\ln(n+1)}\,.$

Cvičení 1.7: V následujících cvičeních vyšetřete konvergenci řady. Použijte vhodné kritérium.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\,2^n}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}$,

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{n}{2^n}$.

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n!}$,

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$,

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$.

Kapitola 2

Funkční řady, bodová, stejnoměrná konvergence, kritéria konvergence

2.1 Bodová konvergence, obor konvergence

Příklad 2.1: Vyšetřeme bodovou konvergenci a určeme součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n \,.$$

Řešení: Řada je geometrická s kvocientem $q = \ln x$. Řada tedy konverguje absolutně, jestliže $|\ln x| < 1$, t.j. pro $x \in \left(\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right)$. Součet řady je

$$s = \frac{\ln x}{1 - \ln x}\,, \quad x \in \left(\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right) \,.$$

Příklad 2.2: Vyšetřeme bodovou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, x^n}{1+n^2} \,.$$

Řešení: Použijeme podílové kritérium

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{1+(n+1)^2}}{\frac{2^n x^n}{1+n^2}} \right| = \lim_{n\to\infty} 2\,|x| \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = \lim_{n\to\infty} 2\,|x| \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} = 2\,|x| \,.$$

Řada konverguje absolutně, jestliže $2\,|x| < 1$, t.j. pro $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Pro $|x| = \frac{1}{2}$ dostaneme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1+n^2}$ (resp. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$). Tyto řady konvergují absolutně, (viz příklad 1.9).
Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, x^n}{1+n^2}$ konverguje absolutně na $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$.

Příklad 2.3: Vyšetřeme bodovou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, x^n}{n}\,.$$

Řešení: Použijeme podílové kritérium

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1} x^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n x^n}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} 2\,|x| \frac{n}{n+1} = 2\,|x|\,.$$

Řada konverguje, jestliže $2\,|x| < 1$, t.j. pro $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Pro $x = -\frac{1}{2}$ dostaneme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, tato řada konverguje (podle Leibnitzova kritéria). Pro $x = \frac{1}{2}$ dostaneme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, tato řada diverguje (viz příklad 1.4). Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, x^n}{n}$ konverguje na $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Cvičení 2.1: V následujících cvičeních vyšetřete bodovou konvergenci řady.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}\,, \quad x \in \mathbb{R}^+\,,$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\,x}{n^3}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R}\,,$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{3^n}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{n}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln x}{n}\,, \quad x \in (0,\infty)\,,$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos^n x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$

2.2 Stejnoměrná konvergence

Příklad 2.4: Určeme obor konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

a rozhodněme, kde řada konverguje stejnoměrně.

Řešení: Použijeme Weierstrassovo kritérium

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \le \frac{1}{n^2} \quad \text{pro} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, tedy daná řada konverguje stejnoměrně v $\mathbb{R}$.

Příklad 2.5: Určeme obor konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

a rozhodněme, kde řada konverguje stejnoměrně.

Řešení: Podle podílového kritéria

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+2}}{\frac{x^n}{n+1}} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = |x|$$

řada konverguje bodově pro $|x| < 1$. Pro $x = -1$ řada konverguje, pro $x = 1$ diverguje. Pro $|x| < 1$ řada konverguje absolutně. Nyní vyšetříme stejnoměrnou konvergenci. Řada nebude stejnoměrně konvergovat na celém intervalu $(-1, 1)$, protože na tomto intervalu platí

$$\sup_{x\in(-1,1)} \frac{|x|^n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty\,.$$

Zvolme $x_0 \in \langle 0, 1)$. Použijeme opět Weierstrassovo kritérium.

$$\left| \frac{x^n}{n+1} \right| \leq \frac{x_0^n}{n+1}\,,$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0^n}{n+1}$ konverguje například podle podílového kritéria. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ konverguje stejnoměrně na každém intervalu $\langle -x_0, x_0 \rangle$, kde $x_0 \in \langle 0, 1)$.

Příklad 2.6: Určeme obor konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx}$$

a rozhodněme, kde řada konverguje stejnoměrně.

Řešení: Jedná se o geometrickou řadu s kvocientem e^{-x}, řada tedy konverguje bodově pro $x \in (0, \infty)$. Pro tato x řada konverguje absolutně. Nyní vyšetříme stejnoměrnou konvergenci. Řada nebude stejnoměrně konvergovat na celém intervalu $(0, \infty)$, protože na tomto intervalu platí $\sup_{x\in(0,\infty)} \mathrm{e}^{-nx} = 1$. Omezme se na $x \geq x_0 > 0$. Použijeme opět Weierstrassovo kritérium.

$$\left| \mathrm{e}^{-nx} \right| \leq \mathrm{e}^{-nx_0}\,,$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx_0}$ konverguje. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx}$ konverguje stejnoměrně na každém intervalu $\langle x_0, \infty)$, kde $x_0 > 0$.

Cvičení 2.2: V následujících cvičeních vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^{nx}}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \mathrm{e}^{n\,x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2 n^2}}{n^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\mathrm{e}^{n\,x}}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n\,x)}{n\,x^{n+1}}\,, \quad x \in (0,\infty)\,.$

Kapitola 3

Mocninné řady, poloměr konvergence. Taylorovy řady.

3.1 Mocninné řady, poloměr konvergence

Příklad 3.1: Vypočítejme poloměr konvergence a obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} 5^n x^n \,.$$

Řešení: Řada je geometrická s kvocientem $q = 5\,x$. Řada tedy konverguje, jestliže $|5\,x| < 1$, t.j. pro $|x| < \frac{1}{5}$ a diverguje pro $|x| \geq \frac{1}{5}$. Poloměr konvergence je $R = \frac{1}{5}$. Obor konvergence je otevřený interval $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$.

Příklad 3.2: Vypočítejme poloměr konvergence a obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n} \,.$$

Řešení: Použijeme substituci $y = x - 2$. Dostaneme řadu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{2^n}$. Tato řada je geometrická s kvocientem $q = \frac{y}{2}$. Řada tedy konverguje, jestliže $|\frac{y}{2}| < 1$, t.j. pro $|y| < 2$ a diverguje pro $|y| \geq 2$. Poloměr konvergence je $R = 2$. Poloměr konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}$ je tedy $R = 2$ a řada konverguje pro $|x-2| < 2$ a diverguje pro $|x-2| \geq 2$. Obor konvergence je otevřený interval $(0, 4)$.

Příklad 3.3: Vypočítejme poloměr konvergence a obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\,4^n} \,.$$

Řešení: Použijeme podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)\,4^{n+1}}}{\frac{x^n}{n\,4^n}} \right| = \frac{1}{4}\,|x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{4}\,|x|$$

Řada tedy konverguje, jestliže $\frac{1}{4}|x| < 1$, t.j. pro $|x| < 4$ a diverguje pro $|x| > 4$. Poloměr konvergence je $R = 4$. Pro $x = 4$ dostaneme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, tato řada diverguje (viz příklad 1.4). Pro $x = -4$ dostaneme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, tato řada konverguje podle Leibnitzova kritéria. Obor konvergence je polootevřený interval $\langle -4, 4)$.

Cvičení 3.1: V následujících cvičeních vypočítejte poloměr konvergence a obor konvergence mocninné řady.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\,3^n}\,,$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n+1}\,x^n\,,$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 7^n (x-1)^n\,,$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\,x^{(n+1)}\,,$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}\,x^n\,,$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\,x^n\,,$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,n+3}{n\,2^{(n-1)}} x^{(n-1)}\,,$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-3)^n}\,x^n\,.$

3.2 Taylorovy řady

Příklad 3.4: Najděme rozvoj funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ do Taylorovy řady v $a = 0$ a zjistěme konvergenci dané řady

Řešení: Vypočteme si několik derivací.

$$\begin{array}{ll} f(x) = \mathrm{e}^x & f(0) = 1 \\ f'(x) = \mathrm{e}^x & f'(0) = 1 \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x & f^{(n)}(0) = 1 \end{array}$$

Taylorova řada je

$$T_n(x) = 1 + \frac{1}{1!}\,x + \frac{1}{2!}\,x^2 + \frac{1}{3!}\,x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\,x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,x^n\,.$$

Nyní vyšetříme konvergenci řady. Použijeme podílové kritérium

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}\,x^{n+1}}{\frac{1}{n!}\,x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0\,.$$

Řada tedy konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 3.5: Najděme rozvoj funkce $f(x) = \ln(x+1)$ do Taylorovy řady v $a = 0$ a zjistěme konvergenci dané řady

Řešení: Vypočteme si několik derivací

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \ln(x+1) & f(0) = 0 \\
f'(x) = \frac{1}{x+1} & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} & f''(0) = -1 \\
f'''(x) = 2\frac{1}{(x+1)^3} & f'''(0) = 2 \\
\vdots & \vdots \\
f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(x+1)^n} & f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!
\end{array}$$

Taylorova řada je

$$T_n(x) = 0 + \frac{0!}{1!}\,x - \frac{1!}{2!}\,x^2 + \frac{2!}{3!}\,x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}\,x^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\,x^n\,.$$

Nyní vyšetříme konvergenci řady. Použijeme podílové kritérium

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)}\,x^{n+1}}{\frac{1}{n}\,x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x\,n}{n+1}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |x| < 1\,.$$

Řada tedy konverguje pro všechna $|x| < 1$ a diverguje pro $|x| > 1$. Pro $x = 1$ řada konverguje, pro $x = -1$ řada diverguje. Obor konvergence Taylorovy řady je polootevřený interval $(-1, 1\rangle$.

Cvičení 3.2: V následujících cvičeních najděte rozvoj funkce $f(x)$ do Taylorovy řady v a a zjistěte konvergenci dané řady.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}\,, \quad a = 0\,,$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}\,, \quad a = 2\,,$

c) $f(x) = \sin x\,, \quad a = 0\,,$

d) $f(x) = \cos x\,, \quad a = 0\,,$

e) $f(x) = \dfrac{1}{2-x}\,, \quad a = 1\,,$

f) $f(x) = \sin(2\,x)\,, \quad a = \dfrac{\pi}{4}\,,$

g) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}\,, \quad a = 0\,,$

h) $f(x) = 3^x\,, \quad a = 0\,.$

Příklad 3.6: Rozviňme funkci $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$ do mocninné řady s použitím rozvoje vhodné funkce.

Řešení: Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\,.$$

Jednoduše dostaneme rozvoj naší funkce do mocninné řady

$$f(x) = x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 3.7: Rozviňme funkci $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ do mocninné řady s použitím rozvoje vhodné funkce.

Řešení: Pro všechna $x \neq 1$ platí

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{1+x}\,.$$

Protože funkce $F(x)$ je součtem geometrické řady s kvocientem $-x$, platí pro $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\,.$$

$((-1)^n x^n)' = n(-1)^n x^{(n-1)}$. Řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(-1)^n x^{(n-1)}$ je stejnoměrně konvergentní na $\langle -x_0, x_0\rangle$ pro $x_0 < 1$, můžeme tedy derivovat řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, x^n$ člen po členu a platí

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x)^2} &= -\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)' = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n\, x^{n-1} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1) x^n\,, \quad \text{pro } x \in \langle -x_0, x_0\rangle\,.\end{aligned}$$

Dostali jsme rozvoj naší funkce do mocninné řady

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1) x^n \quad \text{pro } |x| < 1\,.$$

Příklad 3.8: Rozviňme funkci $f(x) = \operatorname{arctg} x$ do mocninné řady s použitím rozvoje vhodné funkce.

Řešení: Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Protože funkce $f'(x)$ je součtem geometrické řady s kvocientem $(-x^2)$, platí pro $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\,.$$

Řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ je stejnoměrně konvergentní na $\langle -x_0, x_0\rangle$ pro $x_0 < 1$, můžeme tedy integrovat řadu člen po členu a platí

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,, \quad \text{pro } x \in \langle -x_0, x_0\rangle\,.$$

Dostali jsme rozvoj naší funkce do mocninné řady

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{pro } |x| < 1\,.$$

Protože řada $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $\langle -1, 1\rangle$, platí

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{na } \langle -1, 1\rangle\,.$$

Cvičení 3.3: V následujících cvičeních najděte rozvoj funkce $f(x)$ do mocninné řady s použitím rozvoje vhodné funkce.

a) e^{x^2}, **b)** $x \sin x$, **c)** $\ln(1+x)$, **d)** $\dfrac{1}{(1+x)^3}$.

3.3 Aplikace mocninných řad*

Příklad 3.9: Pomocí rozvoje hledané funkce do mocninné řady řešte počáteční úlohu

$$y'' - 2xy' - 2y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \tag{3.1}$$

Řešení: Z teorie obyčejných diferenciálních rovnic víme, že daná počáteční úloha má právě jedno řešení. Předpokládejme, že jej lze zapsat ve tvaru mocninné řady

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{3.2}$$

Potom lze za předpokladu stejnoměrné konvergence následujících řad derivovat řadu člen po členu

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \tag{3.3}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}. \tag{3.4}$$

Z počátečních podmínek vyplývá $a_0 = y(0) = 1$ a $a_1 = y'(0) = 0$. Naším cílem je určit zbývající koeficienty mocninné řady a_n tak, aby byla splněna diferenciální rovnice. Dosazením vztahů (3.2)-(3.4) do rovnice (3.1) dostáváme

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \tag{3.5}$$

Roznásobíme a posuneme index v nekonečné sumě, abychom mohli porovnat koeficienty u jednotlivých mocnin x^n

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2na_n x^n - 2a_n x^n = 0,$$

tedy $(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n - 2a_n = 0$ pro všechna $n \geq 0$, odkud

$$a_{n+2} = \frac{2a_n}{n+2}.$$

Postupným dosazováním s využitím počátečních podmínek dostáváme

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad a_{2k+1} = 0 \quad \forall k, \\ a_2 &= 1, \qquad a_4 = \frac{1}{2}, \qquad a_6 = \frac{1}{6}, \qquad a_{2k} = \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Celkem tedy

$$y(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \mathrm{e}^{x^2}.$$

Funkce $y(x) = \mathrm{e}^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ je řešením dané počáteční úlohy, o oprávněnosti derivování řady člen po členu se lze snadno přesvědčit použitím Weierstrassova kritéria.

Příklad 3.10: Spočtěte

$$\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) \mathrm{d}x.$$

Řešení: Vyjádření primitivní funkce pomocí elementárních funkcí v tomto případě není možné. Použijeme známý rozvoj

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \tag{3.6}$$

Potom (alespoň formálně[1])

$$\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) \mathrm{d}x = -\int_0^1 \ln x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \ln x \cdot x^n \mathrm{d}x$$

[1] Řada (3.6) nekonverguje na intervalu $(0,1)$ stejnoměrně. Další výpočet lze ospravedlnit uvažováním $\int_0^{1-\epsilon} \ln x \cdot \ln(1-x) \mathrm{d}x$ a $\epsilon \to 0^+$. Rozmyslete podrobněji.

Na jednotlivé sčítance použijeme integraci per partes

$$\int_0^1 \ln x \cdot x^n \mathrm{d}x = \Big[\ln x \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_{x=0}^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$
$$= -\int_0^1 \frac{x^n}{n+1} \mathrm{d}x = -\frac{1}{n+1} \Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_{x=0}^1 = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Tedy

$$\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Výslednou číselnou řadu rozložíme na ,,parciální zlomky" $\frac{1}{n} \frac{1}{(n+1)^2} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{(n+1)^2}$, kde první členy vytvoří teleskopickou řadu, zatímco $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ má známý součet. Celkem

$$\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + 1 - \frac{\pi^2}{6} = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

Cvičení 3.4: Pomocí rozvoje integrované funkce do mocninné řady spočtěte

$$\int_0^1 \ln(1-x) \mathrm{d}x.$$

Kapitola 4

Ortogonální matice, ortogonální transformace

4.1 Ortogonální projekce, přeurčené soustavy

Příklad 4.1: Popište sloupcový prostor následujících matic:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

1. Sloupcový prostor matice I je celý prostor $\mathbb{R}^2$, protože libovolný prvek $\mathbb{R}^2$ je lineární kombinací vektorů $e_1 = (1,0)^{\mathrm{T}}$ a $e_2 = (0,1)^{\mathrm{T}}$. Tedy $\mathcal{R}(I) = \mathbb{R}^2$.

2. V matici A je druhý sloupec násobkem prvního, tedy sloupcový prostor matice A je přímka procházející počátkem se směrovým vektorem $(1,2)^{\mathrm{T}}$. Tedy $\mathcal{R}(A) = \{x \in \mathbb{R}^2,\ x = \alpha(1,2)^{\mathrm{T}},\ \alpha \in \mathbb{R}\}$. Rovnice $Ax = b$ má řešení jen, leží-li b na této přímce.

3. Pro matici B je sloupcový prostor $\mathcal{R}(B)$ také celé $\mathbb{R}^2$ protože ze tří sloupců matice B jsou dva lineárně nezávislé v $\mathbb{R}^2$, a tedy tvoří bázi $\mathbb{R}^2$. Na rozdíl od prvního případu dává vektor b více kombinací sloupců matice B.

Příklad 4.2: Nechť b_1, b_2, b_3 jsou tři různé vektory. Zkonstruujte matici A tak, aby rovnice $Ax = b_1$ a rovnice $Ax = b_2$ byly řešitelné, ale rovnice $Ax = b_3$ neměla řešení. Je to možné? Jak byste zkonstruovali matici A?

Řešení: Vektory b_1, b_2 musí ležet ve sloupcovém prostoru matice A, nejjednodušší tedy je, aby vektory b_1 a b_2 byly sloupce matice A. Pak řešením rovnice $Ax = b_1$ je $x = (1,0)$ a rovnice $Ax = b_2$ je vektor $x = (0,1)$. Protože nechceme aby rovnice $Ax = b_3$ byla řešitelná, nezvětšíme sloupcový prostor. Dostaneme rovnici

$$Ax = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = b_3 .$$

Je b_3 kombinací vektorů b_1 a b_2? Jestliže ne, máme hledanou matici A. Pokud ano, nelze zkonstruovat požadovanou matici A, protože sloupcový prostor $\mathcal{R}(A)$ bude obsahovat b_3.

Příklad 4.3: Nechť ρ je rovina zadaná rovnicí $x + y - 2z = 4$. Tato rovina neprochází počátkem. Najděte dva vektory, které leží v ρ, a ukažte, že jejich součet v ρ neleží.
Nyní napište rovnici roviny ρ_0, která je rovnoběžná s rovinou ρ a prochází počátkem. Nejděte dva vektory, které leží v ρ_0, a ukažte, že jejich součet v ρ_0 leží.

Řešení: Rovnice roviny ρ je nehomogenní soustava jedné rovnice o třech neznámých. Hodnost matice soustavy je jedna, počet neznámých 3, soustava má nekonečně mnoho řešení. Volíme dvě neznámé jako parametry, konkrétně $z = t, y = s$. Pak pro x dostaneme $x = -s + 2t + 4$. Tedy všechna řešení jsou

$$u = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R}\,.$$

Volíme např. $s = t = 1$ a dostaneme $u_1 = (5, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, pro $s = 1, t = 0$ dostaneme $u_2 = (3, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ a $u_1 + u_2 = (8, 2, 1)^{\mathrm{T}}$. Získané hodnoty dosadíme do rovnice roviny a dostaneme $8 + 2 - 2 = 8 \neq 4$, tedy součet v rovině ρ neleží, rovina ρ není podprostor $\mathbb{R}^3$.
Rovina ρ_0 má rovnici $x + y - 2z = 0$. Zase vypočteme všechna řešení. Mají tvar

$$u = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\,.$$

Při stejné volbě s, t dostaneme $u_1 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ a $u_2 = (-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$. Jejich součet je $u_1 + u_2 = (0, 2, 1)^{\mathrm{T}}$, Dosadíme do obecné rovnice roviny ρ_0 a dostaneme $2 - 2 = 0$, tedy součet leží v rovině ρ_0 . Rovina ρ_0 je podprostor $\mathbb{R}^3$.

Příklad 4.4: Nechť $A = [1\ 2\ 3]$ je matice 1×3. Určete a popište její nulový prostor.

Řešení: Nulový prostor $\mathcal{N}(A)$ matice $A^{m \times n}$ je množina $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ Ax = 0\}$. V našem případě je $h(A) = 1,\ n = 3$. Dimenze nulového prostoru je 2. Řešíme soustavu $Ax = 0$, tedy

$$[1\ 2\ 3] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2y + 3z = 0\,.$$

Poslední rovnice je obecná rovnice roviny procházející počátkem. Tato rovina je podprostor $\mathbb{R}^3$ a je to nulový prostor matice A.

Příklad 4.5: Popište nulové prostory následujících matic:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A \\ 2A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ 2 & 4 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}, \quad C = [A\ \ 2A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

1.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad h(A) = 2,\ n = 2\,,$$

soustava má právě jedno řešení $x = (0,0)^{\mathrm{T}}$, tedy $\mathcal{N}(A) = \{x = 0 \ \in \mathbb{R}^2\}$. $\mathcal{N}(A)$ je triviální podprostor $\mathbb{R}^2$. Jeho dimenze je 0.
Poznamenejme, že $\det(A) = 2$, matice A je tedy invertovatelná,

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.
$$B = \begin{bmatrix} A \\ 2A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ 2 & 4 \\ 6 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 8 \\ 6 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$h(B) = 2,\ n = 2 \ \Rightarrow$ soustava má právě jedno řešení $x = (0,0)^{\mathrm{T}}$, je tedy také $\mathcal{N}(B) = \{x = 0 \ \in \mathbb{R}^2\}$. $\mathcal{N}(B)$ je také triviální podprostor $\mathbb{R}^2$. Jeho dimenze je 0.

3.
$$C = [A \ \ 2A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$h(C) = 2, n = 4 \ \Rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho řešení, volím dvě neznámé jako parametry: $x_3 := s, x_4 := t,\ s,t \in \mathbb{R}$. Zpětným chodem Gaussovy eliminace dopočteme: $x_2 = -2t,\ x_1 = -2s$, tedy

$$x = s\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}\,,$$

$$\mathcal{N}(c) = \{x \in \mathbb{R}^4,\ x = \alpha\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}.$$

Nulový prostor matice C je rovina v $\mathbb{R}^4$ procházející počátkem.

Příklad 4.6: Najděte bázi a určete dimenzi prostoru 3×3 symetrických matic.

Řešení: Bázi tvoří symetrické matice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dimenze tohoto prostoru je 6.

Příklad 4.7: Jsou dány dva vektory $u_1 = (1,2,0)$ a $u_2 = (2,3,0)$.

a) Jsou u_1, u_2 lineárně nezávislé?

b) Tvoří bázi nějakého prostoru?

c) Jaký prostor V generují?

d) Jaká je dimenze V?

e) Pro jaké matice A je V sloupcový prostor?

f) Pro jaké matice B je V nulový prostor?

Řešení: Řešení:

a)
$$\alpha u_1 + \beta u_2 = (\alpha + 2\beta, 2\alpha + 3\beta, 0) = (0, 0, 0) \;\Leftrightarrow\; \alpha = 0 \wedge \beta = 0\,.$$
Jediná lineární kombinace těchto vektorů, která dává nulový vektor je triviální, tedy vektory jsou lineárně nezávislé.

b) Jsou to dva lineárně nezávislé vektory v $\mathbb{R}^3$, tvoří bázi podprostoru $\mathbb{R}^3$.

c) Prostor V obsahuje všechny vektory $(x, y, 0)$, což je rovina $z = 0$ v $\mathbb{R}^3$.

d) Dimenze V je 2, protože báze obsahuje dva prvky.

e) V je sloupcovým prostorem libovolné $3 \times n$ matice A, která má hodnost 2 a jejíž třetí řádek je nulový. Např. může být
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

f)
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Volím $z = t$, pak $x = 0$ a $y = 0$,
$$\mathcal{N}(M) = \{x \in \mathbb{R}^3, x = (0, 0, t), t \in \mathbb{R}\}.$$
Tedy matice B jsou $m \times 3$ matice hodnosti 1. Například
$$B = [0\ 0\ 1], \quad \text{pak} \quad Bu_1 = 0\,, Bu_2 = 0.$$

Příklad 4.8: Určete ortogonální projekci vektoru $\boldsymbol{b} = [2, 1, 3]^T$ do podprostoru $\mathbb{R}^3$ generovaného vektory $\boldsymbol{v_1} = [1, 2, 0]^T$ a $\boldsymbol{v_2} = [-1, 1, 1]^T$.

Řešení: Hledejme projekci $\boldsymbol{p}$ ve tvaru lineární kombinace $\boldsymbol{p} = \alpha \boldsymbol{v_1} + \beta \boldsymbol{v_2}$. Z podmínek ortogonality vyplývá $(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{b})^T \boldsymbol{v_1} = 0$ a $(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{b})^T \boldsymbol{v_2} = 0$, to jest

$$\alpha({\boldsymbol{v_1}}^T \boldsymbol{v_1}) + \beta({\boldsymbol{v_2}}^T \boldsymbol{v_1}) = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{v_1}$$
$$\alpha({\boldsymbol{v_1}}^T \boldsymbol{v_2}) + \beta({\boldsymbol{v_2}}^T \boldsymbol{v_2}) = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{v_2}$$

neboli po vyčíslení skalárních součinů[1]

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Soustavu můžeme řešit například Cramerovým pravidlem:

$$|A| = 14, \quad |A_1| = 10, \quad |A_2| = 6,$$

tedy $\alpha = \frac{5}{7}$, $\beta = \frac{3}{7}$ a

$$\boldsymbol{p} = \frac{5}{7}[1, 2, 0]^T + \frac{3}{7}[-1, 1, 1]^T = \left[\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, \frac{3}{7}\right]^T.$$

Ortogonální projekcí vektoru $\boldsymbol{b}$ do dané roviny je vektor $\left[\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, \frac{3}{7}\right]^T$.

Příklad 4.9: Určete ortogonální projekci funkce $\sqrt{x}$ do prostoru $\mathcal{P}_1(0, 1)$ (polynomy stupně nejvýše 1 na intervalu $(0, 1)$). Uvažujte skalární součin $\langle f,\, g\rangle = \int_0^1 f g \,\mathrm{d}x$.

Řešení: Prostor $\mathcal{P}_1(0, 1)$ je generován například funkcemi $1, x$. Podobně jako v předchozím příkladu hledejme projekci ve tvaru lineární kombinace $p(x) = \alpha + \beta x$. Z podmínek ortogonality pak vyplývá

$$\alpha(1, 1) + \beta(x, 1) = (\sqrt{x}, 1)$$
$$\alpha(1, x) + \beta(x, x) = (\sqrt{x}, x)$$

Snadno spočteme $(\sqrt{x}, x) = \int_0^1 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{3/2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{5/2}}{5/2}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$ atp... Celkem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/5 \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

odkud $\alpha = \frac{4}{15}$, $\beta = \frac{4}{5}$. Ortogonální projekcí dané funkce je $p(x) = \frac{4}{15}(1 + 3x)$.

Příklad 4.10: Řešte následující přeurčenou soustavu $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ve smyslu nejmenších čtverců, určete velikost rezidua $A\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}$

$$2x - y = 0$$
$$x - 2y = 0$$
$$x + y = 3.$$

[1] Povšimněte si, že výsledná soustava je zcela ekvivalentní soustavě normálních rovnic odpovídající přeurčené soustavě $\alpha \boldsymbol{v_1} + \beta \boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{b}$.

Řešení: Sestavme soustavu normálních rovnic

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^T \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

tedy

$$\begin{aligned} 6\tilde{x} - 3\tilde{y} &= 3 \\ -3\tilde{x} - 6\tilde{y} &= 3 \quad \Rightarrow \quad \tilde{x} = 1,\ \tilde{y} = 1. \end{aligned}$$

Vektor $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (1, 1)$ je řešením dané soustavy ve smyslu nejmenších čtverců. Reziduum $A\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b} = [1, -1, -1]^T$ má velikost $\|A\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\| = \sqrt{3}$.

Cvičení 4.1: Řešte následující soustavy ve smyslu nejmenších čtverců, určete velikost rezidua

a)

$$\begin{aligned} x - y &= -2 \\ x + y &= 2 \\ y &= -1, \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - y &= 2 \\ 2x + y &= -1, \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 2 \\ x \phantom{{}+y} + z &= 2 \\ y - z &= 2 \\ x + y + z &= 0, \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ -x + 2z &= 1 \\ 2x + y &= -1 \\ y - 2z &= 1. \end{aligned}$$

4.2 Ortogonální matice, ortogonální transformace

Příklad 4.11: Ukažme, že matice

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

je ortogonální matice pro všechny $\theta \in \mathbb{R}$.

Řešení: Musíme ověřit, že platí $G(\theta)^T\, G(\theta) \;=\; E$.

$$\begin{aligned} G(\theta)^T\, G(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta + \cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta + \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Příklad 4.12: Pomocí vhodné Givensovy matice vynulujme prvek na 4. pozici vektoru $\boldsymbol{v} = [1, 2, 3, 4, 5]^T$ pomocí prvku na 2. pozici.

Řešení: K vynulování použijeme matici

$$G \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vynásobíme-li vektor $\boldsymbol{v}$ maticí G, dostaneme

$$G\,\boldsymbol{v} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 1 \\ 2\,\cos\theta - 4\,\sin\theta \\ 3 \\ 2\,\sin\theta + 4\,\cos\theta \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Pro vynulování 4. pozice vektoru musí platit

$$2\,\sin\theta + 4\,\cos\theta \;=\; 0 \;\Rightarrow\; \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \;=\; -\frac{4}{2} \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\theta \;=\; -2\,.$$

Ze vzorečků

$$\sin\theta \;=\; \frac{\pm\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta + 1}}\,, \quad \cos\theta \;=\; \frac{\pm 1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta + 1}}$$

dostaneme

$$\sin\theta \;=\; \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \;\;(\text{zvolíme } \frac{2\sqrt{5}}{5})\,, \quad \cos\theta \;=\; \mp\frac{1}{\sqrt{5}} \;\;(\text{zvolíme } -\frac{\sqrt{5}}{5})\,.$$

Můžeme zvolit Givensovu matici

$$G \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Příklad 4.13: Pomocí vhodných Givensových matic vynulujme prvky pod hlavní diagonálou matice

$$A \;=\; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Stejně jako v předchozím příkladě zvolíme Givensovu matici G_{12} pro vynulování prvku a_{21}. Dostaneme $\sin\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. Platí

$$G_{12}\cdot A = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & -\sqrt{5} & -\frac{4\sqrt{5}}{5} \\ 0 & -\sqrt{5} & \frac{3\sqrt{5}}{5} \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} = A_{12}\,.$$

Zvolíme Givensovu matici G_{13} pro vynulování prvku a_{31} ($\sin\theta = \frac{3\sqrt{14}}{14}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}\sqrt{14}}{14}$).

$$G_{13}\cdot A_{12} = \frac{\sqrt{14}}{14}\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & -3 \\ 0 & \sqrt{14} & 0 \\ 3 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & -\sqrt{5} & -\frac{4\sqrt{5}}{5} \\ 0 & -\sqrt{5} & \frac{3\sqrt{5}}{5} \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{14}\begin{bmatrix} -14 & -17 & -1 \\ 0 & -\sqrt{70} & 3\frac{\sqrt{70}}{5} \\ 0 & \sqrt{5} & -\frac{17\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} = A_{13}\,.$$

Zvolíme Givensovu matici G_{23} pro vynulování prvku a_{32} ($\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{15}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{210}}{15}$).

$$G_{23}\cdot A_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{210}}{15} & -\frac{\sqrt{15}}{15} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{15} & \frac{\sqrt{210}}{15} \end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{14}}{14}\begin{bmatrix} -14 & -17 & -1 \\ 0 & -\sqrt{70} & 3\frac{\sqrt{70}}{5} \\ 0 & \sqrt{5} & -\frac{17\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{14}\begin{bmatrix} -14 & -17 & -1 \\ 0 & -5\sqrt{3} & \frac{59\sqrt{3}}{15} \\ 0 & 0 & -\frac{14\sqrt{42}}{15} \end{bmatrix}.$$

Příklad 4.14: Pomocí Householderových matic zrcadlení vynulujme prvky pod hlavní diagonálou matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Řešení: K vynulování prvního sloupce použijeme Householderovou matici

$$H_1 = E - 2\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T}{||\boldsymbol{v}||^2} \text{ kde } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a_1} \pm ||\boldsymbol{a_1}||\,\boldsymbol{e_1}\,.$$

Symbolem $\boldsymbol{a_i}$ označujeme $i-$tý sloupec matice A. Protože norma $||\boldsymbol{a_1}|| = \sqrt{3}$, můžeme psát

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \sqrt{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$
\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T = \begin{bmatrix} \left(1+\sqrt{3}\right)^2 & 1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1 \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ a } ||\boldsymbol{v}||^2 = 2+(1+\sqrt{3})^2 ,
$$

$$
H_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{6}\left(3+\sqrt{3}\right) & \frac{1}{6}\left(-3+\sqrt{3}\right) \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{6}\left(-3+\sqrt{3}\right) & \frac{1}{6}\left(3+\sqrt{3}\right) \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right) & \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\right) \\ -1 & \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\right) & \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right) \end{bmatrix} .
$$

$$
\tilde{A}_1 = H_1 A = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -1-\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 1-\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} .
$$

Nyní postup zopakujeme pro matici

$$
A_1 = \begin{bmatrix} -1-\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ 1-\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} .
$$

$$
\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{6}}{3}-1 \\ 1-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \qquad ||\boldsymbol{v}_1|| = \frac{4}{3}(4-\sqrt{2}-\sqrt{6}) .
$$

Dostaneme Householderovu matici

$$
H_2 = \begin{bmatrix} \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{-4+\sqrt{2}+\sqrt{6}} & \frac{-1-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-4+\sqrt{2}+\sqrt{6}} \\ \frac{-1-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-4+\sqrt{2}+\sqrt{6}} & \frac{-2+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{-4+\sqrt{2}+\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right) & \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right) \\ \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right) & \frac{1}{4}\left(-\sqrt{2}-\sqrt{6}\right) \end{bmatrix} .
$$

Potom platí

$$
\tilde{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \quad 0 \\ 0 & \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} .
$$

Horní tojúhelníková matice bude mít tvar

$$
R = \tilde{H}_2 H_1 A = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -2\frac{\sqrt{6}}{3} & 2\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix} .
$$

Cvičení 4.2: Pomocí vhodných Givensových matic vynulujte prvky pod hlavní diagonálou matice

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} .
$$

Cvičení 4.3: Pomocí Householderových matic vynulujte prvky pod hlavní diagonálou matice

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .
$$

Příklad 4.15: Najděte ortogonální bázi podprostoru $\mathbb{R}^4$ generovaného vektory $\boldsymbol{a_1} = [1,0,1,1]^T$, $\boldsymbol{a_2} = [0,1,1,2]^T$ a $\boldsymbol{a_3} = [0,1,0,1]^T$.

Řešení: Použijeme Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces. Volme $\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{a_1} = [1,0,1,1]^T$, dále

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v_2} &= \boldsymbol{a_2} - \frac{\boldsymbol{v_1}^T\boldsymbol{a_2}}{\boldsymbol{v_1}^T\boldsymbol{v_1}}\boldsymbol{v_1} = [0,1,1,2]^T - \frac{3}{3}[1,0,1,1]^T = [-1,1,0,1]^T,\\
\boldsymbol{v_3} &= \boldsymbol{a_3} - \frac{\boldsymbol{v_1}^T\boldsymbol{a_3}}{\boldsymbol{v_1}^T\boldsymbol{v_1}}\boldsymbol{v_1} - \frac{\boldsymbol{v_2}^T\boldsymbol{a_3}}{\boldsymbol{v_2}^T\boldsymbol{v_2}}\boldsymbol{v_2} = [0,1,0,1]^T - \frac{1}{3}[1,0,1,1]^T - \frac{2}{3}[-1,1,0,1]^T\\
&= \left[\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},0\right]^T.
\end{aligned}$$

Vektory $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$ tvoří ortogonální bázi daného podprostoru. Příslušnou ortonormální bázi bychom dostali nanormováním těchto vektorů.

Cvičení 4.4: Najděte ortonormální bázi podprostoru generovaného vektory

a) $\boldsymbol{a_1} = [2,1,0]^T$, $\boldsymbol{a_2} = [0,1,2]^T$,

b) $\boldsymbol{a_1} = [1,2,1,0]^T$, $\boldsymbol{a_2} = [0,1,1,2]^T$ a $\boldsymbol{a_3} = [1,1,-2,0]^T$.

Kapitola 5

Maticové rozklady LU, QR.

Příklad 5.1: Proveďme LU-rozklad matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Provedeme Gaussovu eliminaci na matici A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Abychom získali nový druhý řádek, vynásobili jsme prvý řádek (-1) a přičetli k druhému řádku. Pak jsme k třetímu řádku přičetli opět (-1)-násobek prvého řádku. Vynásobili jsme tedy matici A maticí

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ t.j. } E_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Potom jsme prohodili druhý a třetí řádek, t.j. vynásobili jsme matici $E_1 \cdot A$ permutační maticí

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ t.j. } P \cdot E_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Označme horní trojúhelníkovou matici $P \cdot E_1 \cdot A$ jako matici U. Potom platí

$$P \cdot E_1 \cdot A \Rightarrow A = E_1^{-1} \cdot P^{-1} \cdot U = E_1^{-1} \cdot P \cdot U \Rightarrow P \cdot A = P \cdot E_1^{-1} \cdot P \cdot U = L \cdot U,$$

kde L je dolní trojúhelníková matice a U je horní trojúhelniková matice.

$$P \cdot A = L \cdot U, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Příklad 5.2: Proveďte QR-rozklad matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Řešení: V příkladu 4.14 jsme použili Houssholderovu matici k vytvoření trojúhelníkové matice R,

$$R = \tilde{H}_2\, H_1\, A = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -2\frac{\sqrt{6}}{3} & 2\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Platí tedy

$$A = H_1^T \cdot \tilde{H}_2^{\,T} \cdot R\,.$$

Označme $Q = H_1^T \cdot \tilde{H}_2^{\,T}$ a dostáváme

$$A = Q \cdot R\,, \quad \text{kde } Q = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad R = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -2\frac{\sqrt{6}}{3} & 2\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Příklad 5.3: Pomocí vhodného software proveďte LU-rozklad matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

Mathematica:

Nejdříve definujeme matici A a potom provedeme LU-rozklad.

```
In[1]:= A = {{1, 2, 3}, {1, 2, 2}, {1, 1, 1}}

Out[1]= {{1, 2, 3}, {1, 2, 2}, {1, 1, 1}}

In[2]:= {LU, p, c} = LUDecomposition[A]

Out[2]= {{{1, 2, 3}, {1, -1, -2}, {1, 0, -1}}, {1, 3, 2}, 1}
```

Nyní musíme z výsledku, který nám vrátí Mathematica získat matice L, R, P.

```
In[3]:= L = LU SparseArray[{i_, j_} /; j < i → 1, {3, 3}] + IdentityMatrix[3]

Out[3]= {{1, 0, 0}, {1, 1, 0}, {1, 0, 1}}
```

In[4]:= **MatrixForm[L]**

Out[4]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In[5]:= **U = LU SparseArray[{i_, j_} /; j ≥ i → 1, {3, 3}]**

Out[5]= {{1, 2, 3}, {0, -1, -2}, {0, 0, -1}}

In[6]:= **MatrixForm[U]**

Out[6]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

In[7]:= **P = SparseArray[{i_, j_} /; i == p[[j]] → 1, {3, 3}]**

Out[7]= SparseArray[<3>, {3, 3}]

In[8]:= **MatrixForm[P]**

Out[8]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> A := <<1,1,1>|<2,2,1>|<3,2,1>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> P, L, U := LUDecomposition(A);
```

$$P, L, U := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Matlab:

```
>> A= [1  2  3
       1  2  2
       1  1  1]
A =
     1  2  3
     1  2  2
     1  1  1
```

```
>> [L,U,P]=lu(A)

L =
     1   0   0
     1   1   0
     1   0   1

U =
     1    2    3
     0   -1   -2
     0    0   -1

P =
     1   0   0
     0   0   1
     0   1   0
```

Cvičení 5.1: Proveďte LU-rozklad matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}.$$

Cvičení 5.2: Proveďte QR-rozklad matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kapitola 6

Vlastní čísla a vlastní vektory

6.1 Vlastní čísla a vlastní vektory

Příklad 6.1: Určete vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Určete algebraickou a geometrickou násobnost vlastních čísel.

Řešení:

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

Charakterisktický polynom má jeden dvojnásobný kořen $\lambda = 2$, matice má tedy jedno vlastní číslo s algebraickou násobností 2. Hledejme příslušné vlastní vektory

$$\begin{bmatrix} 3-2 & -1 \\ 1 & 1-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x - y = 0.$$

Dostáváme jediný lineárně nezávislý vlastní vektor $[1, 1]^T$. Geometrická násobnost vlastního čísla je tedy rovna 1.

Cvičení 6.1: V následujících cvičeních určete vlastní čísla a vlastní vektory matic. Pro každé vlastní číslo určete jeho algebraickou a geometrickou násobnost.

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.2 Singulární rozklad matice

Příklad 6.2: Vypočtěte singulární hodnoty matice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ a matice $B = A^T$.

Řešení: Vypočteme matici A^TA, charakteristický polynom této matice, vlastní čísla $\lambda_1,\ \lambda_2$ této matice a singulární hodnoty $\sigma_1,\ \sigma_2$ matice A:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\ \text{charakteristický polynom} \quad \lambda^2 - 6\lambda + 8 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 2\,.$$

Singulární hodnoty matice A jsou odmocniny z vlastních čísel matice A^TA, tedy $\sigma_1 = 2,\ \sigma_2 = \sqrt{2}\,$.

Poznámka Vypočtěme ortonormální vlastní vektory $v_1,\ v_2$ matice A^TA odpovídající příslušným vlastním číslům:

$$\lambda_1 = 4 \ \Rightarrow\ \begin{bmatrix} 3-4 & 1 \\ 1 & 3-4 \end{bmatrix} \sim [-1, 1] \ \Rightarrow\ h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad ||h_1|| = \sqrt{2}\,,$$

$$\lambda_2 = 2 \ \Rightarrow\ \begin{bmatrix} 3-2 & 1 \\ 1 & 3-2 \end{bmatrix} \sim [1, 1] \ \Rightarrow\ h_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad ||h_2|| = \sqrt{2}\,.$$

Tedy ortonormální vlastní vektory $v_1,\ v_2$ matice A^TA jsou

$$v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{rcl} v_1^Tv_2 & = & 0 \\ v_1^Tv_1 & = & 1 \\ v_2^Tv_2 & = & 1 \end{array}$$

Povšimněte si ještě, že

$$Av_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix},\ ||Av_1|| = 2 = \sigma_1\,, \quad Av_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix},\ ||Av_2|| = \sqrt{2} = \sigma_2\,,$$

a že

$$(Av_1)^TAv_2 = [\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = 0\,.$$

Nechť nyní $B = A^T$. Matice B^TB je 3×3 a má tedy tři singulární hodnoty. Protože matice A^TA a AA^T mají stejná nenulová vlastní čísla, má matice B singulární hodnoty 2, $\sqrt{2}$ a 0.

Cvičení 6.2: Vypočtěte vlastní čísla λ_1, λ_2 a odpovídající ortonormální vlastní vektory v_1, v_2 matice A^TA a singulární hodnoty σ_1, σ_2 matice A a A^T,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Kapitola 7

Lineární zobrazení, operátor a funkcionál.

Lineární funkcionály

Příklad 7.1: Ukažte, že $Tf = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + 2f(1)$ je spojitý lineární funkcionál na $X = C[0,1]$, $\|f\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Určete jeho normu.

Řešení: Funkcionál je lineární, protože pro libovolné $f, g \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$T(\alpha f + g) = \int_0^1 (\alpha f + g)(t)\mathrm{d}t + 2(\alpha f + g)(1)$$
$$= \alpha \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t + \alpha 2f(1) + 2g(1) = \alpha Tf + Tg.$$

Dále

$$|Tf| = \Big| \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + f(1) \Big| \le \Big| \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \Big| + \big| 2f(1) \big|$$
$$\le \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t + 2\big|f(1)\big| \le \|f\| \int_0^1 1\mathrm{d}t + 2\|f\| \le \|f\|\big(1+2\big) \le 3\|f\|,$$

odkud plyne, že T je spojitý a $\|T\| \le 3$. Na druhou stranu pro $f_0(t) \equiv 1$, máme $f_0 \in C[0,1]$, $\|f_0\| = 1$ a $\|Tf_0\| = 3$. Protože $\|T\| \ge \|T\, f_0\|$, je $\|T\| \ge 3$ a pro normu operátoru dostáváme $\|T\| = 3$.

Příklad 7.2: Určete normu lineárního funkcionálu $T : X \to \mathbb{R}$,

$$Tf = 2\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t - f(0),$$

$X = C[0,1]$, $\|f\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

Řešení: Linearitu funkcionálu lze ukázat analogicky jako v předchozím příkladu.

$$
\begin{aligned}
|Tf| = \left|2\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t - f(0)\right| &\leq \left|2\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t\right| + \left|f(0)\right| \\
&\leq 2\int_0^1 |tf(t)|\mathrm{d}t + \left|f(0)\right| \leq \|f\|\int_0^1 2t\mathrm{d}t + \|f\| \leq \|f\|\left(1^2+1\right) \leq 2\|f\|,
\end{aligned}
$$

odkud plyne, že T je spojitý a $\|T\| \leq 2$. Důkaz opačné nerovnosti je v tomto případě obtížnější, neboť funkce

$$
f_0(t) = \begin{cases} -1, & \text{pro } t = 0, \\ 1, & \text{pro } t \in (0,1], \end{cases}
$$

pro kterou $2\displaystyle\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t - f(0) = 2$ není spojitá a tedy $f \notin X$. Danou funkci však můžeme aproximovat spojitými funkcemi. Pro $\epsilon \in (0,1)$ volme

$$
f_\epsilon(t) = \begin{cases} -1, & \text{pro } t = 0, \\ -1 + \frac{2x}{\epsilon}, & \text{pro } t \in (0,\epsilon), \\ 1, & \text{pro } t \in [\epsilon, 1]. \end{cases}
$$

Potom $f_\epsilon \in X$, $\|f_\epsilon\| = 1$ a

$$
Tf_\epsilon \geq 2\int_\epsilon^1 tf_\epsilon(t)\mathrm{d}t - f_\epsilon(0) = \Big[t^2\Big]_{t=\epsilon}^1 + 1 = 2 - \epsilon^2.
$$

Proto $\|T\| \geq 2 - \epsilon^2$ pro libovolné $\epsilon > 0$ a tedy $\|T\| = 2$.
V následujících cvičeních zjistěte, zda jsou funkcionály $T : X \to \mathbb{R}$ lineární a spojité. Pokud ano, spočtěte normu funkcionálu T.

Cvičení 7.1: $X = C[0,1]$, $\|f\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$, $T(f) = \displaystyle\int_0^1 t + f(t)\mathrm{d}t$.

Cvičení 7.2: $X = C[0,\infty)$, $\|f\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$, $T(f) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{f(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Cvičení 7.3: $X = l^1$, $\|\{x_n\}\| = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty |x_n|$, $T\{x_n\} = 3x_1 + x_2$.

Cvičení 7.4: $X = c_0 = \{\{x_n\}; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$, $\|\{x_n\}\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n|\}$, $T\{x_n\} = 3x_1 + x_2$.

Lineární operátory, spektrální teorie

Příklad 7.3: Vyšetřeme, zda lineární operátor $T: X \to X$ je lineární a spojitý. Pokud ano, spočtěme normu operátoru L.

$$X = C[0,1], \quad \|f\| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|, \quad Tf(t) = \omega(t)f(t),$$

kde $\omega(t)$ je daná spojitá funkce na $[0,1]$.

Řešení: T je lineární, protože pro všechna α, $\beta \in \mathbb{R}$ a pro všechna f, $g \in X$ platí

$$T(\alpha f+\beta g)(t) = \omega(t)(\alpha f(t)+\beta g(t)) = \alpha\omega(t)f(t)+\beta\omega(t)g(t) = \alpha Tf(t)+\beta Tg(t), \ \forall\, t \in [0,1].$$

Nyní dokážeme spojitost operátoru T:

$$\|Tf\| = \max_{t\in[0,1]} |\omega(t)f(t))| \le \Omega \max_{t\in[0,1]} |f(t))| = \Omega\,\|f\|,$$

kde $\Omega = \max\limits_{t\in[0,1]} |\omega(t)|$. T je tedy spojitý operátor. Navíc platí

$$\|T\| = \sup_{f\le 1} \|T\,f\| \le \Omega.$$

Zvolme nyní $f_0 \in C[0,1]$, $f_0(t) \equiv 1$, $\|f_0\| = 1$. Platí, že $\|Tf_0\| = \Omega$. Protože $\|T\| \ge \|T\,f_0\|$ a tedy $\|T\| \ge \Omega$. Pro normu operátoru tedy platí

$$\|T\| = \Omega.$$

V následujících cvičeních zjistěte, zda jsou operátory $T: X \to X$ lineární a spojité. Pokud ano, spočtěte normu operátoru T.

Cvičení 7.5: $X = C[0,1]$, $\|f\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$, $Tf(t) = \mathrm{e}^t\, f(t)$.

Cvičení 7.6: $X = C[0,1]$, $\|f\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$, $Tf(t) = f(t^3)$.

Cvičení 7.7: $X = L^2[0,2\pi]$, $\|f\| = \displaystyle\int_0^{2\pi} f^2$, $Tf(t) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(s)\cos(t-s)\,\mathrm{d}s$.

Cvičení 7.8: $X = c_0$, $\|\{x_n\}\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n|\}$, $T\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, 0, 0, \dots\}$.

Cvičení 7.9: $X = l^2$, $\|\{x_n\}\|^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$, $T\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, 0, 0, \dots\}$.

Příklad 7.4: Uvažujme lineární operátor $Tf(x) = f''(x) - f'(x) - 2f(x)$ na prostoru $X = C^\infty[0,1]$ s normou $\|f\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Ukažte, že T není spojitý. Určete dimenzi jádra operátoru.

Řešení: Pro $n \in \mathbb{N}$ volme například $f_n(x) = x^n - 1$, potom $f_n \in X$, $\|f_n\| = 1$, ale $Tf_n(1) = n(n-2) \to \infty$, tedy T nemůže být spojitý. Funkce z prostoru X je prvkem jádra T právě tehdy, když splňuje diferenciální rovnici $y'' - y' - 2y = 0$. Řešením charakteristické rovnice $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ dostáváme $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, odkud $\ker T = \{C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{2x},\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\}$. $\dim \ker \mathrm{T} = 2$.

Příklad 7.5: Najděte bodové spektrum operátoru $T : l^2 \to l^2$, kde

$$T\{x_n\} = \big\{x_2, \frac{x_3}{2}, \frac{x_4}{3}, \dots\big\}.$$

Řešení: Pro normu platí $\|\{x_n\}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$.

1. $\lambda \neq 0$ potom $T - \lambda I$ je prosté, protože

$$\begin{aligned}
(T-\lambda I)x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad & x_2 = \lambda x_1 && x_1 \neq 0 \\
& \frac{x_3}{2} = \lambda x_2 && x_3 = 2\lambda^2 x_1 \\
& \frac{x_4}{3} = \lambda x_3 && x_4 = 2 \cdot 3 \cdot \lambda^3 x_1 \\
& \vdots && \vdots \\
& \frac{x_n}{n-1} = \lambda x_{n-1} && x_n = (n-1)!\lambda^{n-1} x_1.
\end{aligned}$$

   Našli jsme nenulovou posloupnost $x = \{x_n\}$ pro kterou $(T - \lambda I)x = 0$, ale $x \notin l^2$, protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = x_1 \sum_{n=1}^{\infty} ((n-1)!\lambda^{n-1})^2$ diverguje. Zjistíme to z podílového kritéria

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!\lambda^n)^2}{((n-1)!\lambda^{n-1})^2} = \lim_{n\to\infty} n^2\lambda^2 = \infty$$

   Protože neexistuje $x \neq 0$ takové, že $(T - \lambda I)x = 0$, je operátor $T - \lambda I$ prostý, tedy $\lambda \neq 0$ nepatří do spektra.

2. $\lambda = 0$ potom $T - \lambda I$ není prosté, protože

$$\begin{aligned}
Tx = 0 \quad \Rightarrow \quad & x_2 = 0 && x_2 = 0, x_1 \neq 0 \\
& \frac{x_3}{2} = 0 && x_3 = 0 \\
& \frac{x_4}{3} = 0 && x_4 = 0 \\
& \vdots && \vdots \\
& \frac{x_n}{n-1} = 0 && x_n = 0
\end{aligned}$$

   Našli jsme nenulovou posloupnost např. $x = \{1, 0, 0, \cdots\}$ pro kterou $Tx = 0$, tedy $\sigma_p(T) = \{0\}$.

Příklad 7.6: Najděte bodové spektrum operátoru $T : X \to X$, kde $X = C[0,1]$, $\|f\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$,

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Řešení: Snadno se ověří, že $\|T\| = 1$.

1. $\lambda = 0$, potom $(T - \lambda I)f = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 0$, $\forall x \in [0,1]$ tedy nutně $f \equiv 0$ a T je prostý.

2. $\lambda \neq 0$, potom $(T - \lambda I)f = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \lambda f(x)$, $\forall x \in [0,1]$ odkud dostáváme dosazením $f(0) = 0$, derivováním podle základní věty integrálního počtu potom $f(x) = \lambda f'(x)$. Obecným řešením této jednoduché diferenciální rovnice je $f(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{\lambda}x}$. Z počáteční podmínky však dostáváme $C = 0$, tedy $f \equiv 0$, $T - \lambda I$ je prostý a $\sigma_p(T) = \emptyset$.

V následujících cvičeních najděte bodové spektrum operátoru $T : X \to X$.

Cvičení 7.10: $X = l^2$, $\|\{x_n\}\|^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$, $T\{x_n\} = \{0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\}$.

Cvičení 7.11: $X = l^2$, $\|\{x_n\}\|^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$, $T\{x_n\} = \{0, 0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\}$.

Cvičení 7.12: $X = l^2$, $\|\{x_n\}\|^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$, $T\{x_n\} = \{\mathrm{i}x_1, \mathrm{i}^2 x_2, \mathrm{i}^3 x_3, \mathrm{i}^4 x_4, \mathrm{i}^5 x_5, \dots\}$.

Cvičení 7.13: $X = l^2$, $\|\{x_n\}\|^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$, $T\{x_n\} = \{x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \dots\}$.

Cvičení 7.14: $X = C[0,1]$, $\|f\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$. $Tf(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - f(0)$.

V následujících cvičeních najděte spektrum operátoru T.

Cvičení 7.15: $X = l^2$, $\|\{x_n\}\|^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$, $T\{x_n\} = \{x_2, x_3, x_4, \dots\}$.

Cvičení 7.16: $X = \mathbb{R}^2$, $\|(x_1, x_2)\|^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{2} |x_n|^2$, $T(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$.

Kapitola 8

Vektorová analýza

V následujících příkladech jsou $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ skalární funkce mající spojité parciální derivace, $\overrightarrow{a}(x,y,z)$, $\overrightarrow{b}(x,y,z)$ jsou spojitě diferencovatelná vektorová pole.

Příklad 8.1: Ukažte, že

$$\nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g\,. \tag{8.1}$$

Řešení:

$$\nabla(f \pm g) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \pm \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \pm \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \pm \frac{\partial g}{\partial z}\right) =$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \pm \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = \ \nabla f \pm \nabla g\,.$$

Poznámka Ekvivalentní zápis rovnice (8.1):

$$\operatorname{grad}(f \pm g) = \operatorname{grad} f \pm \operatorname{grad} g\,.$$

Příklad 8.2: Ukažte, že

$$\nabla(f\,g) = (\nabla f)\,g + (\nabla g)\,f\,. \tag{8.2}$$

Řešení:

$$\nabla(f\,g) = \left(\frac{\partial (fg)}{\partial x}, \frac{\partial (fg)}{\partial y}, \frac{\partial (fg)}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} g + f\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} g + f\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} g + f\frac{\partial g}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) g + \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) f = \ (\nabla f)g + (\nabla g)f$$

Poznámka Ekvivalentní zápis rovnice (8.2):

$$\operatorname{grad}(fg) = (\operatorname{grad} f)g + (\operatorname{grad} g)f\,.$$

Příklad 8.3: Ukažte, že

$$\operatorname{rot}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \operatorname{rot}\overrightarrow{a} + \operatorname{rot}\overrightarrow{b}\,.$$

Řešení:

$$\operatorname{rot}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \nabla \times (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial(a_3+b_3)}{\partial y} - \frac{\partial(a_2+b_2)}{\partial z}, -\frac{\partial(a_3+b_3)}{\partial x} + \frac{\partial(a_1+b_1)}{\partial z}, \frac{\partial(a_2+b_2)}{\partial x} - \frac{\partial(a_1+b_1)}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} + \frac{\partial b_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} - \frac{\partial b_2}{\partial z}, -\frac{\partial a_3}{\partial x} - \frac{\partial b_3}{\partial x} + \frac{\partial a_1}{\partial z} + \frac{\partial b_1}{\partial z}, \frac{\partial a_2}{\partial x} + \frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} - \frac{\partial b_1}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}, -\frac{\partial a_3}{\partial x} + \frac{\partial a_1}{\partial z}, \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial b_3}{\partial y} - \frac{\partial b_2}{\partial z}, -\frac{\partial b_3}{\partial x} + \frac{\partial b_1}{\partial z}, \frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y}\right) =$$

$$= \nabla \times \overrightarrow{a} + \nabla \times \overrightarrow{b} = \operatorname{rot}\overrightarrow{a} + \operatorname{rot}\overrightarrow{b}\,.$$

Příklad 8.4: Ukažte, že

$$\nabla \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{b} \cdot (\nabla \times \overrightarrow{a}) - \overrightarrow{a} \cdot (\nabla \times \overrightarrow{b})\,. \tag{8.3}$$

Řešení:

$$L := \nabla \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \nabla \cdot (a_2 b_3 - a_3 b_2, -a_1 b_3 + a_3 b_1, a_1 b_2 - a_2 b_1) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(a_2 b_3 - a_3 b_2) + \frac{\partial}{\partial y}(-a_1 b_3 + a_3 b_1) + \frac{\partial}{\partial z}(a_1 b_2 - a_2 b_1) =$$

$$= a_1\left(-\frac{\partial b_3}{\partial y} + \frac{\partial b_2}{\partial z}\right) + a_2\left(\frac{\partial b_3}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial z}\right) + a_3\left(-\frac{\partial b_2}{\partial x} + \frac{\partial b_1}{\partial y}\right) +$$

$$+ b_1\left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right) + b_2\left(-\frac{\partial a_3}{\partial x} + \frac{\partial a_1}{\partial z}\right) + b_3\left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right)$$

Upravme nyní pravou stranu rovnice:

$$P := (b_1, b_2, b_3) \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} - (a_1, a_2, a_3) \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Vyčíslíme determinanty a příslušné skalární součiny a dostaneme $L = P$.

Poznámka Ekvivalentní zápis rovnice (8.3):

$$\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b}(\operatorname{rot}\vec{a}) - \vec{a}(\operatorname{rot}\vec{b}).$$

Poznámka Diferenciální operátor $\vec{b} \cdot \nabla$

$$\vec{b} \cdot \nabla = (b_1, b_2, b_3)\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = b_1\frac{\partial}{\partial x} + b_2\frac{\partial}{\partial y} + b_3\frac{\partial}{\partial z}$$

Nechť nyní f je skalární funkce. Pak

$$(\vec{b} \cdot \nabla)f = b_1\frac{\partial f}{\partial x} + b_2\frac{\partial f}{\partial y} + b_3\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Je-li $\vec{a}$ vektorová funkce, pak

$$(\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} = \left(b_1\frac{\partial a_1}{\partial x} + b_2\frac{\partial a_1}{\partial y} + b_3\frac{\partial a_1}{\partial z}, b_1\frac{\partial a_2}{\partial x} + b_2\frac{\partial a_2}{\partial y} + b_3\frac{\partial a_2}{\partial z}, b_1\frac{\partial a_3}{\partial x} + b_2\frac{\partial a_3}{\partial y} + b_3\frac{\partial a_3}{\partial z}\right).$$

Příklad 8.5: Nechť $\vec{r} = (x, y, z)$, t.j.

$$\vec{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{i} = (1,0,0),\ \mathbf{j} = (0,1,0),\ \mathbf{k} = (0,0,1).$$

Položme $r = ||\vec{r}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ a $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
Ukažte, že $\operatorname{grad} f(x,y,z) = \dfrac{\vec{r}}{||\vec{r}||^2}$.

Řešení:

$$\nabla f(x,y,z) = \operatorname{grad} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot x,\right.$$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot y, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot z\right) =$$

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\vec{r}}{||\vec{r}||^2}.$$

Poznámka:

$$\nabla \cdot \vec{r} = \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) = 3$$

Příklad 8.6: Nechť $\vec{\omega}$ je konstantní vektor a $\vec{r} = (x, y, z)$. Je-li $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, dokažte, že $\vec{\omega} = \dfrac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{v}$.

Řešení:

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, -\frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right). \tag{8.4}$$

Nyní si vypočteme $\overrightarrow{v}$.

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_2 z - \omega_3 y, -\omega_1 z + \omega_3 x, \omega_1 y - \omega_2 x) \ .$$

Tedy

$$v_1 = \omega_2 z - \omega_3 y \,, \quad v_2 = -\omega_1 z + \omega_3 x \,, \quad v_3 = \omega_1 y - \omega_2 x \,.$$

Nyní dosadíme do rovnice (8.4) a dostaneme

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{v} = (\omega_1 + \omega_1, \omega_2 + \omega_2, \omega_3 + \omega_3) = 2\overrightarrow{\omega} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\overrightarrow{v} \,.$$

Příklad 8.7: Pomocí Greenovy věty vypočtěte plošný obsah "vnitřku"elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0,\ b > 0 \,.$$

Řešení: Elipsa splňuje předpoklady Greenovy věty. Počítáme plochu P množiny

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\} \,.$$

Zavedeme zobecněné polární souřadnice:

$$x = a\cos t \,, \quad y = b \sin t \,, \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle \,.$$

$$P = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{K}} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t\ b\cos t - b\sin t\ (-a\sin t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\ b\ \mathrm{d}t = \pi ab \,.$$

Příklad 8.8: Vypočtěte

$$\int_{\mathcal{K}} (-x^2 y)\mathrm{d}x + xy^2\mathrm{d}y \,, \quad \text{kde} \quad \mathcal{K} \text{ je kružnice } x^2 + y^2 = a^2 \,,$$

a) pomocí Greenovy věty
b) přímo z definice křivkového integrálu

Řešení:
a) Z Greenovy věty (kruh splňuje předpoklady)

$$F_1(x, y) = -x^2 y \,, \quad F_2(x, y) = xy^2 \,, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = y^2 \,, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = -x^2$$

Greenova věta $\Longrightarrow$

$$\int_{\mathcal{K}} F_1\mathrm{d}x + F_2\mathrm{d}y = \iint_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \,, \quad M = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

Substituce do polárních souřadnic

$$x = r\cos t\,,\quad y = r\sin t\,,\quad r\in(0,a\rangle\,,\quad t\in\langle 0,2\pi)\,.$$

$$\iint_M (y^2+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^a\int_0^{2\pi}(r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t)r\mathrm{d}t\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^a r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}a^4\,.$$

b) Z definice křivkového integrálu
Parametrizace $\mathcal{K}$:

$$x = a\cos t\,,\quad y = a\sin t\,,\quad t\in\langle 0,2\pi)\,.$$

$$\int_{\mathcal{K}}(-x^2y)\mathrm{d}x + xy^2\mathrm{d}y = 2a^4\int_0^{2\pi}\sin^2 t\ \cos^2 t\ \mathrm{d}t$$

$$\int\sin^2 t\ \cos^2 t\ \mathrm{d}t = \int\sin^2 t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t = \int\sin^2 t\mathrm{d}t - \int\sin^4 t\mathrm{d}t$$

$$\int\sin^2 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t)$$

$$\int\sin^4 t\mathrm{d}t = \frac{3}{8}t - \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{32}\sin(4t)$$

Hledaný křivkový integrál je

$$\int_{\mathcal{K}}\overrightarrow{F}\overrightarrow{\mathrm{d}r} = 2a^4(\pi - \frac{3}{4}\pi) = \frac{\pi}{2}a^4\,,$$

což je stejný výsledek jako v **a**), ale co to dalo práce!!!

Cvičení 8.1: Upravte

$$\nabla\cdot(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})\,.$$

Cvičení 8.2: Ukažte, že

$$\nabla\cdot(f\overrightarrow{a}) = (\nabla f)\overrightarrow{a} + f(\nabla\overrightarrow{a})$$

neboli

$$\mathrm{div}(f\overrightarrow{a}) = (\mathrm{grad} f)\overrightarrow{a} + f\mathrm{div}\overrightarrow{a}\,.$$

Cvičení 8.3: Ukažte, že

$$\nabla\times(f\overrightarrow{a}) = (\nabla f)\times\overrightarrow{a} + f(\nabla\times\overrightarrow{a})\,.$$

Cvičení 8.4: Nechť $\overrightarrow{r} = (x,y,z)$, $||\overrightarrow{r}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(a) Vypočtěte $\nabla\cdot\left(\dfrac{\overrightarrow{r}}{||\overrightarrow{r}||}\right)$.

(b) Vypočtěte $\mathrm{rot}\,\overrightarrow{r} = \nabla\times\overrightarrow{r}$.

(c) Vypočtěte $\nabla\overrightarrow{r}$.

(d) Vypočtěte $\quad \nabla \times \left(\dfrac{\overrightarrow{r}}{||\overrightarrow{r}||} \right).$

(e) Vypočtěte $\quad \nabla ||\overrightarrow{r}||.$

(f) Vypočtěte $\quad \nabla \left(\dfrac{1}{||\overrightarrow{r}||} \right).$

Cvičení 8.5: Určete divergenci vektorového pole

$$g = \operatorname{grad} f\,, \quad \text{kde} \quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2\,.$$

Cvičení 8.6: Spočtěte $\displaystyle\int_{\mathcal{K}} \overrightarrow{F} \mathrm{d}\overrightarrow{r}$, kde $\overrightarrow{F}(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$ a $\mathcal{K}$ je hranice množiny

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 < x < 1,\ 0 < y < x^2\}$$

probíhaná tak, že tato množina bude po levé ruce. Počítejte a) z Greenovy věty, b) přímo.

Cvičení 8.7: Spočtěte $\displaystyle\int_{\mathcal{K}} \overrightarrow{F} \mathrm{d}\overrightarrow{r}$, kde $\overrightarrow{F}(x,y) = (\mathrm{e}^{x-y} + \operatorname{arctg} x, x - \mathrm{e}^{x-y})$ a $\mathcal{K}$ je hranice obdélníka $ABCD$, $A = (1,1)$, $B = (1,2)$, $C = (-1,2)$, $D = (-1,1)$. Orientaci volte v kladném smyslu.

Výsledky cvičení

1 Číselné řady, konvergence a absolutní konvergence, kritéria konvergence.

1.1 **a)** $s = \dfrac{1}{12}$, **b)** $s = \infty$, **c)** $s = \infty$, **d)** $s = \dfrac{e}{e-1}$,
e) $s = 1$, **f)** $s = \dfrac{3}{4}$, **g)** $s = \dfrac{3}{4}$, **h)** $s = \dfrac{1}{2}$,

1.2 **a)** Diverguje, **b)** konverguje, **c)** konverguje, **d)** diverguje.

1.3 **a)** Konverguje, **b)** diverguje, **c)** konverguje, **d)** konverguje
e) konverguje **f)** konverguje.

1.4 **a)** Diverguje, **b)** konverguje, **c)** konverguje, **d)** diverguje.

1.5 **a)** Konverguje, **b)** diverguje, **c)** diverguje, **d)** konverguje.

1.6 **a)** Konverguje, **b)** konverguje absolutně,
c) konverguje, **d)** konverguje.

1.7 **a)** Diverguje, **b)** konverguje abs., **c)** konverguje, **d)** konverguje
e) diverguje **f)** diverguje. **g)** konverguje, **h)** konverguje,
i) konverguje **j)** diverguje.

2 Funkční řady, bodová, stejnoměrná konvergence, kritéria konvergence.

2.1 **a)** Konverguje na $(1, \infty)$, **b)** konverguje na $\mathbb{R}$,
c) konverguje na $(-1, 1)$, **d)** konverguje na $\langle -1, 1)$,
e) konverguje na $\mathbb{R}$, **f)** diverguje na $\mathbb{R}$,
g) diverguje na $(0, \infty)$, **h)** konverguje pro $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.2 **a)** Konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$,
b) konverguje stejnoměrně na $\langle x_0, \infty)$, $x_0 > 0$,
c) konverguje stejnoměrně na $(-\infty, -x_0\rangle$, $x_0 > \ln 2$,
d) konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$,
e) konverguje stejnoměrně na $\langle x_0, \infty)$, $x_0 > 0$,
f) konverguje stejnoměrně na $\langle x_0, \infty)$, $x_0 > 0$,

3 Mocninné řady, poloměr konvergence. Taylorovy řady.

3.1 **a)** $R = 3,\ (-3, 3\rangle$, **b)** $R = \frac{1}{4},\ \langle -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$,
c) $R = \frac{1}{7},\ (1 - \frac{1}{7}, 1 + \frac{1}{7})$, **d)** $R = 1,\ (-1, 1)$,
e) $R = \infty,\ \mathbb{R}$, **f)** $R = 0,\ \{0\}$,
g) $R = 2,\ (-2, 2)$, **h)** $R = 3,\ (-3, 3)$.

3.2 **a)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n((x-2)^n}{2^{n+1}}$,
c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, **d)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$,
e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n$, **f)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}(x - \frac{\pi}{4})^{2n}}{(2n)!}$,
g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} 2^n$, **h)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n 3}{n!} x^n$.

3.3 **a)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!},, \quad x \in \mathbb{R}$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$,
c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)}, \quad x \in (-1, 1\rangle$, **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)nx^{n-1}}{2}, \quad x \in (-1, 1)$.

3.4 $\displaystyle -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = -1.$

4 Ortogonální matice, ortogonální transformace.

4.1 **a)** $\tilde{\boldsymbol{x}} = [0, 1]^T$, $\|A\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\| = \sqrt{6}$,
b) $\tilde{\boldsymbol{x}} = \left[\frac{4}{7}, -\frac{5}{7}\right]^T$, $\|A\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\| = \frac{5}{7}\sqrt{14}$,
c) $\tilde{\boldsymbol{x}} = \left[\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right]^T$, $\|A\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\| = \frac{2}{5}\sqrt{30}$,
d) $\tilde{\boldsymbol{x}} = [-1, 1, 0]^T$, $\|A\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\| = 0$, soustava není přeurčená.

Výsledky následujících příkladů nejsou jednoznačné. U matic záleží na pořadí nulování prvků, u vektorů na pořadí kroků ortogonalizace.

4.2

$$R = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -2\frac{\sqrt{6}}{3} & 2\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

4.3

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4\sqrt{3}}{3} & \frac{5\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

4.4 **a)** $\frac{1}{\sqrt{5}}[2,1,0]^T$, $\frac{1}{\sqrt{30}}[-1,2,5]^T$

b) $\frac{1}{\sqrt{6}}[1,2,1,0]^T$, $\frac{1}{3\sqrt{2}}[-1,0,1,4]^T$, $\frac{1}{2\sqrt{3}}[1,1,-3,1]^T$

5 Maticové rozklady LU, QR.

5.1

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

5.2

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4\sqrt{3}}{3} & \frac{5\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

6 Vlastní čísla a vlastní vektory

6.1 **a)** $\lambda_1 = 1$, vlastní vektory $[1,0,0]^T$, $[0,1,-1]^T$, geometrická i algebraická násobnost 2,

$\lambda_2 = 2$, vlastní vektor $[1,1,0]^T$, geometrická i algebraická násobnost 1,

b) $\lambda = 0$, vlastní vektor $[1,0,0]^T$, algebraická násobnost 3, geometrická násobnost 1,

c) $\lambda_1 = 0$, vlastní vektor $[-2,4,-3]^T$,

$\lambda_2 = -2 + \mathrm{i}$, vlastní vektor $[1-\mathrm{i}, \mathrm{i}, 1]^T$,

$\lambda_3 = -2 - \mathrm{i}$, vl. vektor $[1+\mathrm{i}, -\mathrm{i}, 1]^T$, geom. i alg. násobnost všech vl. čísel je 1.

6.2

$$A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \ \lambda_1 = 10,\ \lambda_2 = 0,\ v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \ v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \ \sigma_1 = \sqrt{10},\ \sigma_2 = 0\,.$$

7 Lineární zobrazení, operátor a funkcionál.

7.1 T není lineární.

7.2 T je lineární a spojitý, $\|T\| = \frac{\pi}{2}$.

7.3 T je lineární a spojitý, $\|T\| = 3$.

7.4 T je lineární a spojitý, $\|T\| = 4$.

7.5 T je lineární a spojitý, $\|T\| = \mathrm{e}$.

7.6 T je lineární a spojitý, $\|T\| = 1$.

7.7 T je lineární a spojitý, $\|T\| \leq \sqrt{2}\,\pi^{\frac{3}{2}}$.

7.8 T je lineární a spojitý, $\|T\| = 1$.

7.9 T je lineární a spojitý, $\|T\| = 1$.

7.10 $\sigma_p(T) = \emptyset$.

7.11 $\sigma_p(T) = \emptyset$.

7.12 $\sigma_p(T) = \{\mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}, 1\}$.

7.13 $\sigma_p(T) = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$.

7.14 $\sigma_p(T) = \{-1\}$.

7.15 $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leq 1\}$.

7.16 $\sigma(T) = \{1, 3\}$.

8 Vektorová analýza

8.1

$$\nabla \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \nabla \cdot \vec{a} + \nabla \cdot \vec{b} \quad (\mathrm{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \mathrm{div}\,\vec{a} + \mathrm{div}\,\vec{b}).$$

8.2 Rozepište divergenci a gradient podle definice.

8.3 Rozepište diferenciální operátory podle definice.

8.4 (a) $\dfrac{2}{||\vec{r}||}$, (b) 0, (c) $(1,1,1)$, (d) 0, (e) $\dfrac{\vec{r}}{||\vec{r}||}$, (f) $-\dfrac{\vec{r}}{||\vec{r}||^3}$.

8.5 6.

8.6 Podle Greenovy věty platí

$$\int_{\mathcal{K}} F_1 \mathrm{d}x + F_2 \mathrm{d}y = \iint\limits_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\iint\limits_M (2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{x^2} (2x-2y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (2x^3 - x^4)\mathrm{d}x = -\frac{2}{5}.$$

Při přímém výpočtu křivkového integrálu by bylo třeba rozdělit křivku na čtyři části:

$$\begin{array}{llclll}
\mathcal{K}_1: & r_1(t) & = & (t,0), & t \in \langle -1,1\rangle, & \text{úsečka} \\
\mathcal{K}_2: & r_2(t) & = & (1,t), & t \in \langle 0,1\rangle, & \text{úsečka} \\
\mathcal{K}_3: & r_3(t) & = & (-t,t^2), & t \in \langle -1,1\rangle, & \text{část paraboly} \\
\mathcal{K}_4: & r_4(t) & = & (-1,1-t), & t \in \langle 0,1\rangle, & \text{úsečka}
\end{array}$$

8.7 2.