

Deterministický chaos

Pavel Pokorný

Ústav matematiky
Vysoká škola chemicko-technologická v Praze



TYFOLÉ JEJLA OHEBKA-TEJNENKACI

Motto

Chaos je život,
periodicita choroba,
rovnováha smrt.

1. Tři významy slova chaos:
 - ▶ v běžné řeči
 - ▶ v řecké mytologii
 - ▶ v teorii dynamických systémů
2. Co to je dynamický systém
3. Deterministický chaos
 - ▶ definice
 - ▶ příklady
4. Shadowing
5. Citlivá závislost na počátečních podmínkách
6. Fraktály
7. Proč je chaos tak lahodný
8. Determinismus vs. náhoda
9. Platí fyzikální zákony absolutně přesně?
10. Jak se dostat chaosu na kobylku

V běžné řeči: chaos = zmatek

- ▶ operace CHAOS (CIA 1967): odhalit možné zahraniční vlivy na studentské protiválečné hnutí
- ▶ 5 filmů s názvem Chaos

Z řeckého slova chaos vytvořil
Jan Baptist van Helmont (1577-1644)
slovo gas (plyn).

Co říkají encyklopedie

Ottův slovník naučný 1897:

CHAOS (*χάος*) u starých Řeků dle Hésioda prastav všehomíra, než byl vlastně stvořen a uspořádán, když látka veškera ještě v temnotách byla. Potom vznikla Gaia (Země) a Erós (Láska), z Chaosu pak povstaly Erebos (Tma) a Nyx (Noc), jejichž dětmi byly Aithér a Hémerá.

Hesiodos

řecký básník

činný mezi 750 - 650 B.C.

báseň: Theogonie (Zrození bodů)

V teorii dynamických systémů

Deterministický chaos

volně řečeno:

složitě chování dynamického systému, tj.

- ▶ omezené
- ▶ neutuchající
- ▶ neperiodické

Dynamický systém

Definice:

Zobrazení $\varphi : R^n \times R \rightarrow R^n$ třídy C^r se nazývá dynamický systém na R^n , jestliže

1. $\varphi_0(x) = x$ pro všechna $x \in R^n$
2. zobrazení $\varphi_t : R^n \rightarrow R^n$ je C^r -difeomorfismus
3. $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ pro všechna $t, s \in R$.

Deterministický chaos - poprvé

Poprvé použili slovo chaos v teorii dynamických systémů

T. Y. Li, J. A. Yorke:

"Period three implies chaos"

American Mathematical Monthly 82, 985-92, 1975.

Period Three Implies Chaos



Tien-Yien Li; James A. Yorke

The American Mathematical Monthly, Vol. 82, No. 10. (Dec., 1975), pp. 985-992.

Stable URL:

<http://links.jstor.org/sici?sici=0002-9890%28197512%2982%3A10%3C985%3AFTIC%3E2.0.CO%3B2-H>

The American Mathematical Monthly is currently published by Mathematical Association of America.

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of JSTOR's Terms and Conditions of Use, available at <http://www.jstor.org/about/terms.html>. JSTOR's Terms and Conditions of Use provides, in part, that unless you have obtained prior permission, you may not download an entire issue of a journal or multiple copies of articles, and you may use content in the JSTOR archive only for your personal, non-commercial use.

Please contact the publisher regarding any further use of this work. Publisher contact information may be obtained at <http://www.jstor.org/journals/maa.html>.

Each copy of any part of a JSTOR transmission must contain the same copyright notice that appears on the screen or printed page of such transmission.

JSTOR is an independent not-for-profit organization dedicated to and preserving a digital archive of scholarly journals. For more information regarding JSTOR, please contact support@jstor.org.



Deterministický chaos - definice

Devaney (1989)

definuje deterministický chaos třemi podmínkami

1. citlivá závislost na počátečních podmínkách
2. hustá množina periodických bodů
3. tranzitivní



Definice tranzitivnosti

Zobrazení $f : X \rightarrow X$ je (topologicky) tranzitivní na nějaké invariantní množině Y , jestliže orbita $\{f^n(p)\}$ nějakého bodu p je hustá v Y .

Birkhoff dokázal, že f je tranzitivní na Y právě tehdy, když pro libovolné dvě otevřené množiny $U, V \subset Y$ existuje kladné n takové, že

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Silnější podmínka: míchající

... existuje n_0 takové, že

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset$$

pro všechna $n > n_0$.

Špatné zprávy a dobré zprávy:

- citlivá závislost na počátečních podmínkách znamená
 - ▶ exponenciální růst chyby numerické integrace
 - ▶ omezení předpověditelnosti
- + stínové lemma dává smysl numerické integraci
- + hustá množina periodických bodů dovoluje řízení chaosu (control of chaos)

Stínové lemma (Shadowing lemma)

Místo přesné orbity

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

tedy

$$x_{n+1} - f(x_n) = 0$$

uvažujeme δ -pseudoorbitu

$$|x_{n+1} - f(x_n)| < \delta.$$

Pro danou pseudoorbitu $\{x_n\}$ existuje (jiná) počáteční podmínka y_0 taková, že přesná orbita $\{y_n\}$ je blízká k dané pseudoorbitě $\{x_n\}$.

Stínové lemma: přesněji

Nechť Λ je invariantní hyperbolická množina zobrazení f .

Pak $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ takové, že každá δ -pseudoorbita $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ v Λ je stínována nějakým bodem $y_0 \in \Lambda$, t.j.

$$|f^n(y_0) - x_n| < \epsilon.$$

Takový bod y_0 existuje (pro danou pseudoorbitu) jediný.

Stínové lemma: nástin důkazu

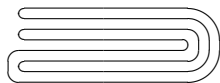
Na Banachově prostoru posloupností se suprémovou normou zkonstruujeme zobrazení, které je na okolí nuly kontrahující, tedy má pevný bod. Tím je posloupnost odchylek pseudotrajektorie a přesné trajektorie.

Jiný důkaz: pomocí symbolické dynamiky.

Deterministický chaos - příklady

- ▶ diferenciální rovnice
- ▶ mechanické, elektrické, chemické, biologické systémy
- ▶ hospodaření podniku
- ▶ láska
- ▶ polní cesta
- ▶ vývoj počasí

Co mají společného?



video

Jak vzniká chaos

Bifurkacemi.

Bifurkace je kvalitativní změna chování systému, když parametr systému překročí jistou kritickou hodnotu.

Př.

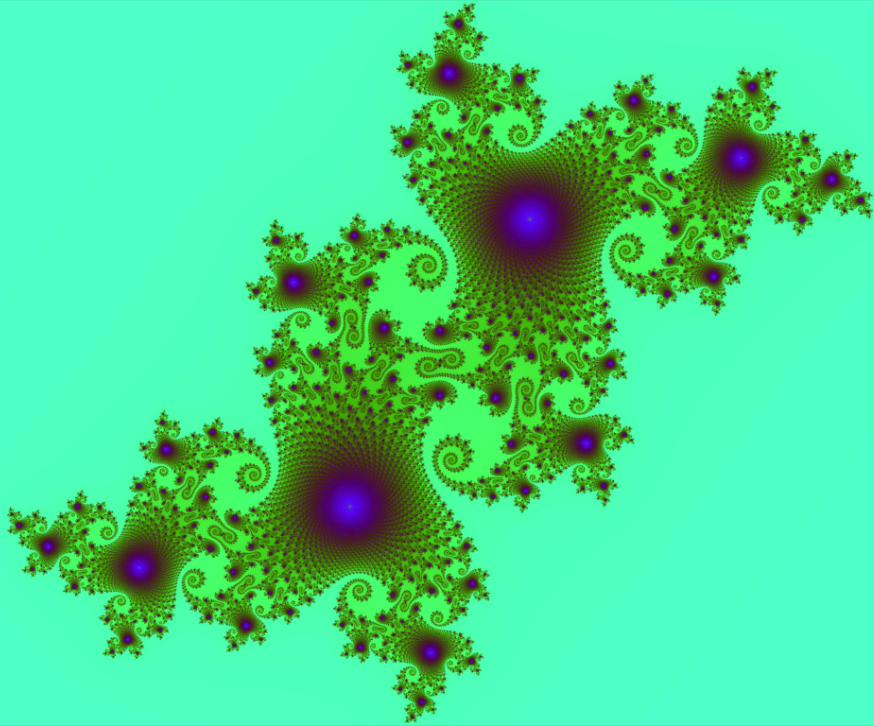
- ▶ vznik oscilací
- ▶ zdvojení periody
- ▶ pohádka o řepě

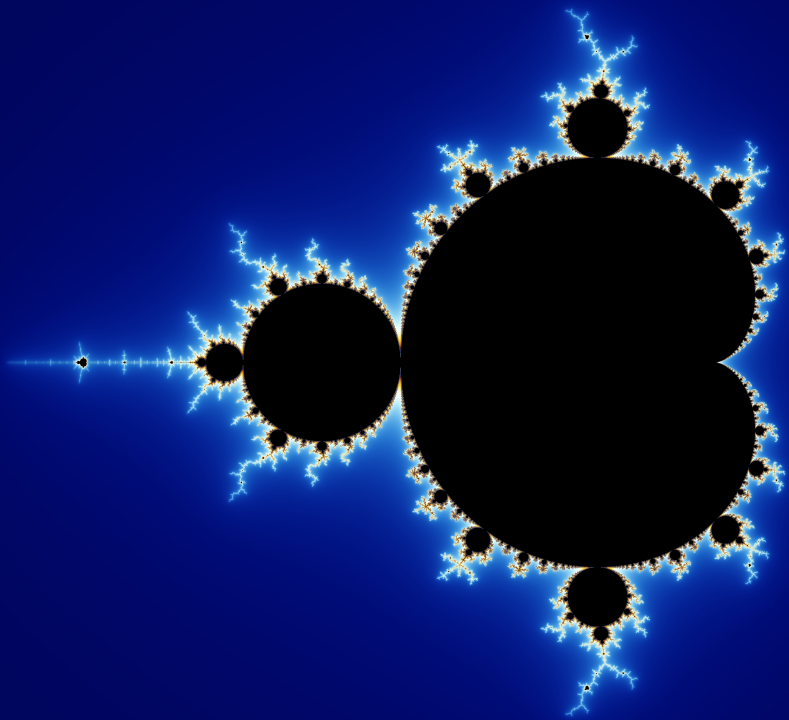
osciloskop

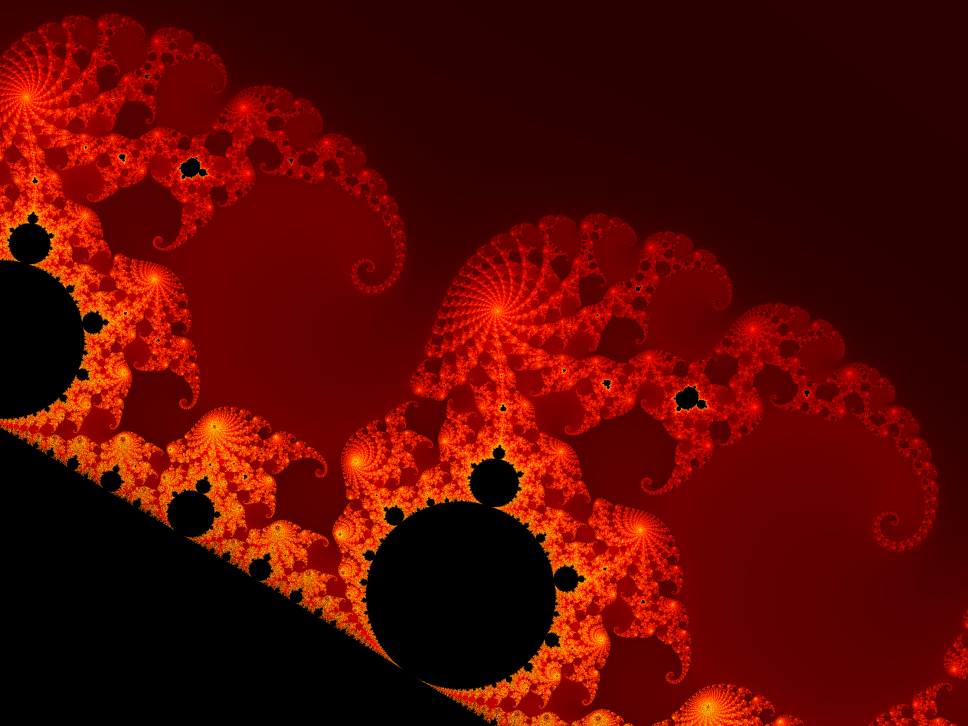
Citlivá závislost na počátečních podmínkách

- ▶ omezuje možnost předpovědi
(motýlí efekt)
- ▶ vytváří fraktály



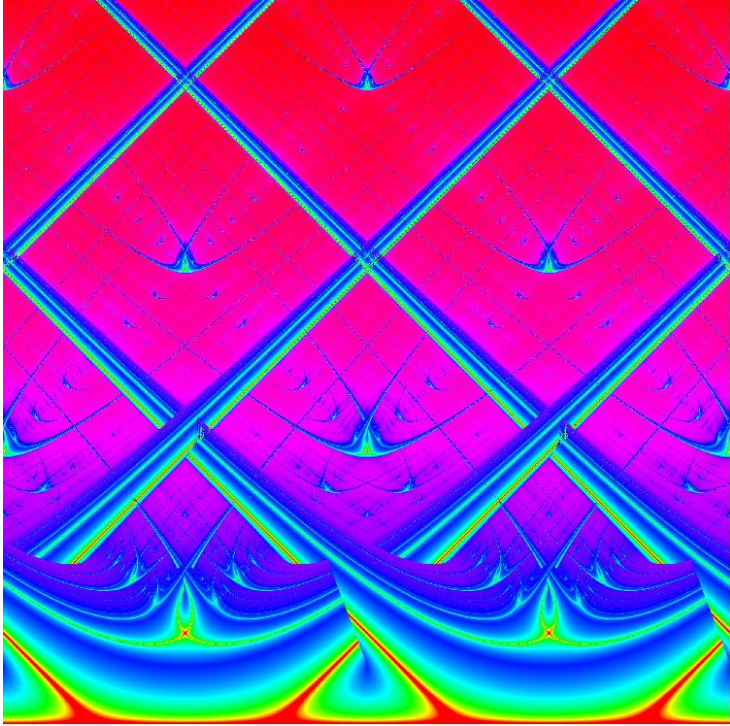


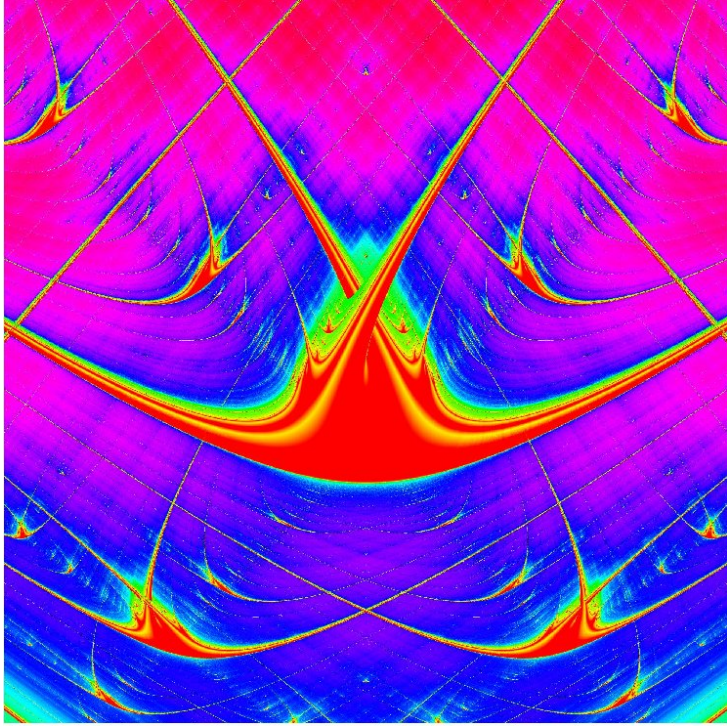




Jak vznikají fraktály

- ▶ v parametrickém prostoru
- ▶ ve stavovém prostoru
 - ▶ množina počátečních podmínek, pro které má řešení jistou vlastnost
 - ▶ atraktor





Proč je chaos tak milý člověku?

Zlatá střední cesta intenzity informačního toku.

... periodicitu je choroba:

př.:

opakující se smích

... chaos je život:

př.:

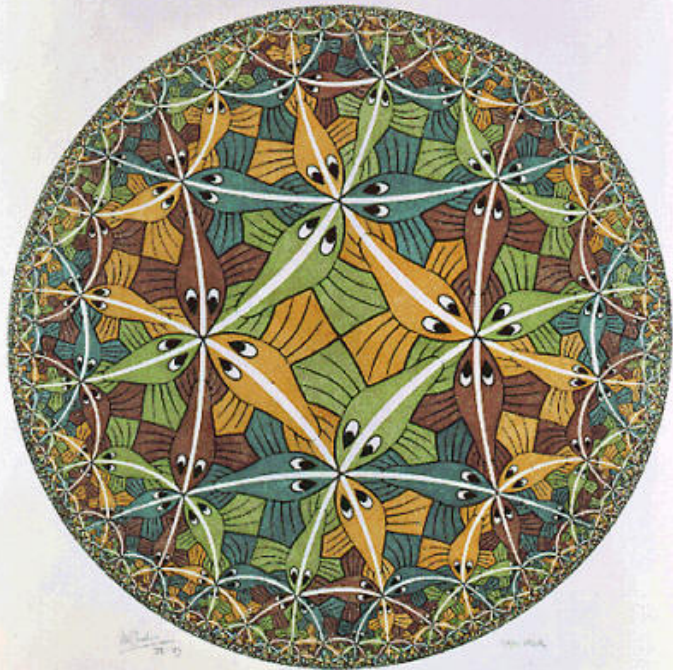
- ▶ táborák, ohňostroj, vodopád, Křížíkova fontána
- ▶ siréna - hudba - hluk
- ▶ když vás někdo (blízký) šimrá stéblem trávy ...



Fraktály ve výtvarném umění

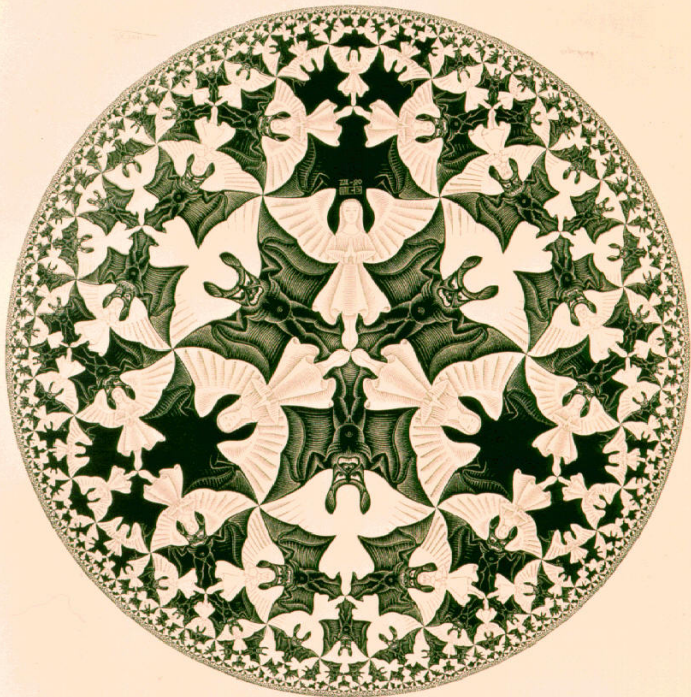
2 hádanky

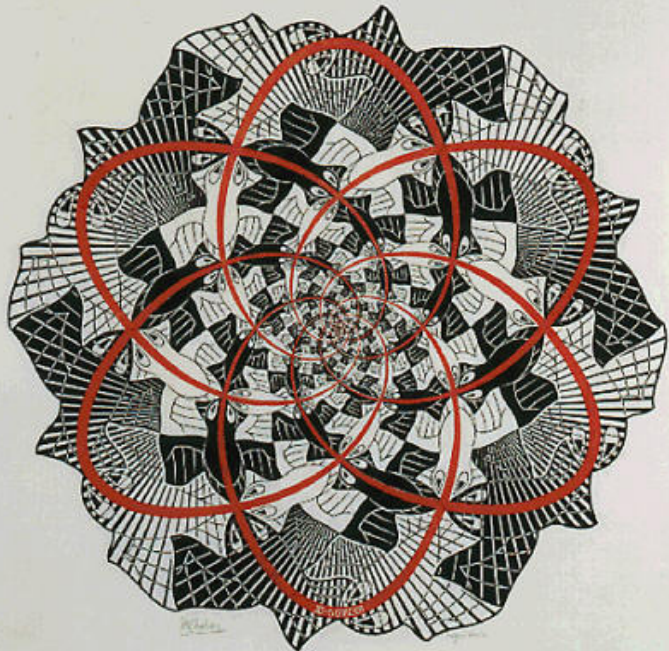


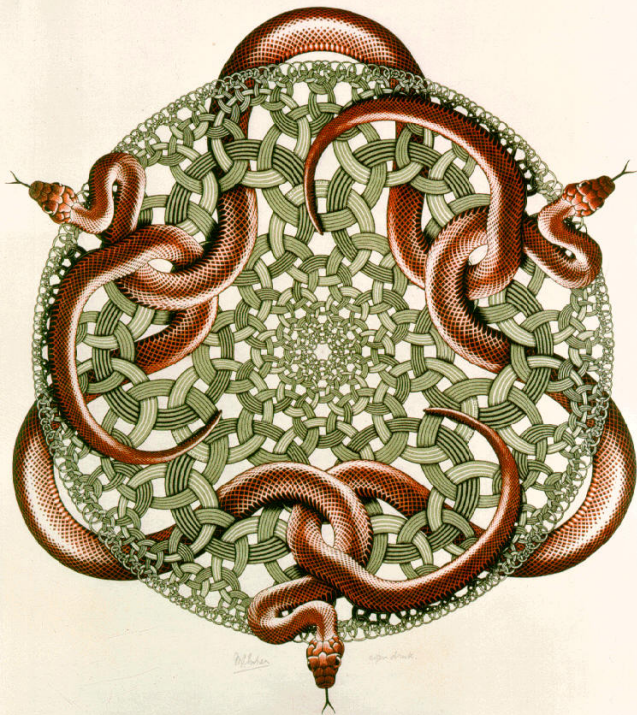


Handwritten signature and date: 37 5

Handwritten signature and date: 37 5







Maurits Cornelis Escher (1898-1972)





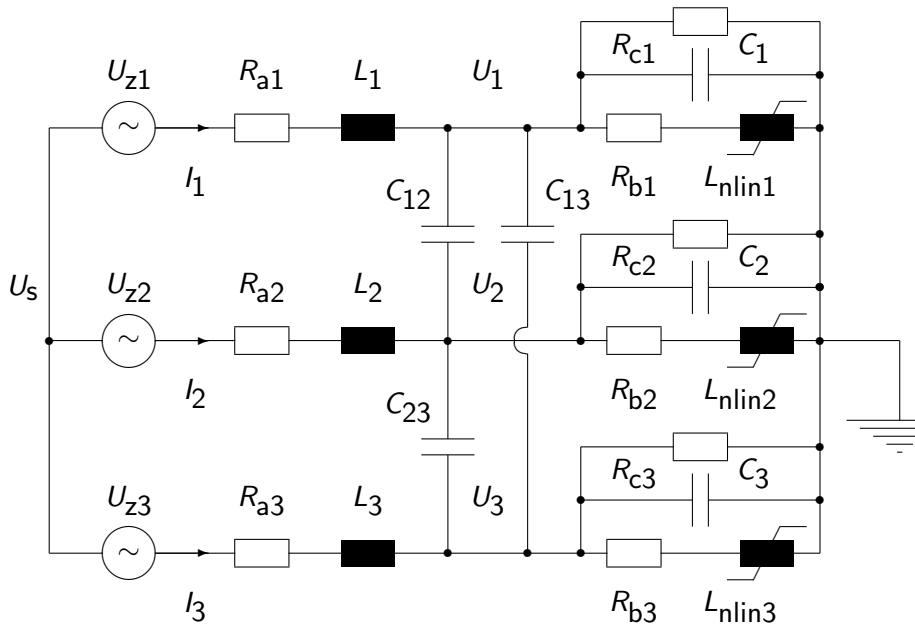


František Kupka (1871-1957)

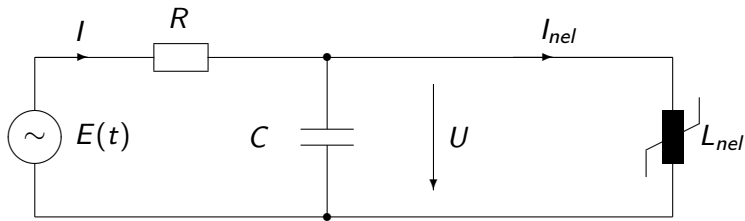
Determinismus a svobodná vůle

- ▶ Omezení platnosti fyzikálních zákonů a fyzikálních pojmů.
- ▶ Horizont přesnosti.

Nebyla by nějaká aplikace?



Pouze jedna větev, po zjednodušení....



$$\ddot{x} + b\dot{x} + x + x^{11} = a \sin \omega t$$

(Duffingova rovnice)

Další aplikace

- ▶ mikrovlnná trouba: chaotické rozmrazování
- ▶ nebeská mechanika: návrh trajektorie dálkových letů
- ▶ dynamika výrobní linky
- ▶ medicína:
 - ▶ kardiologie
 - ▶ neurochirurgie
 - ▶ epidemiologie

Nebyla by nějaká nevšední aplikace?

Byla:

Šifrování zprávy za účelem utajení

XOR = Exkluzivní součet

A	B	A XOR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

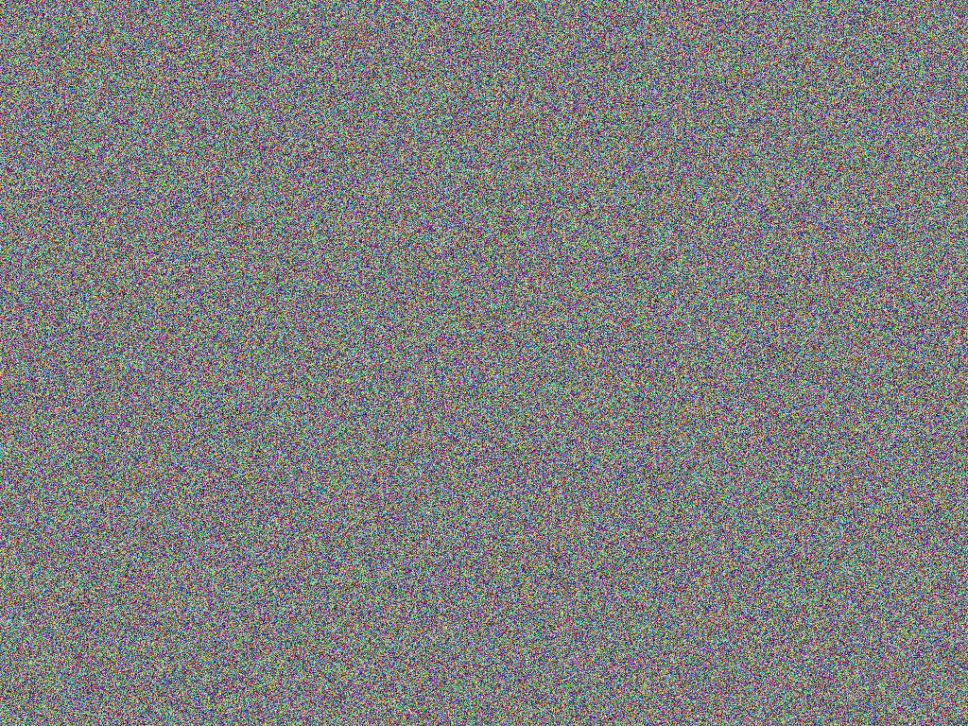
(A XOR B) XOR B =

XOR = Exkluzivní součet

A	B	A XOR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$(A \text{ XOR } B) \text{ XOR } B = A$$







Jak se to dělá?

Program pro systém *Mathematica*:

```
n=1000000070;
f[x_]:= Round[4x(n-x)/n];
ch := Mod[seed=f[seed],256];
g[x_]:= BitXor[x,ch];
SetAttributes[g,Listable];
obr1 = Import["troja.jpg"];
Export["obr1.jpg",obr1];
seed=2011;
obr2 = MapAt[g,obr1,1];
Export["obr2.jpg",obr2];
seed=2011;
obr3 = MapAt[g,obr2,1];
Export["obr3.jpg",obr3];
```

Jak se dostat chaosu na kobytku?

- ▶ Číst
- ▶ Hrát si



Čtenář Dostojevského (Emil Filla) → Průkopník chaosu





(TLG)Hades

NWS 2000/2

29/10/20

nws

Děkuji Vám za pozornost.

Děkuji Vám za pozornost.