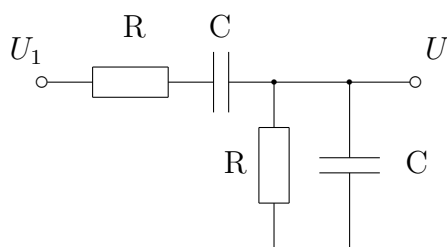


Aplikace na lineární diferenciální rovnici druhého řádu – elektrický obvod (Wienův článek)

0.1 Odvození rovnice

Uvažujme následující elektrický obvod, který se skládá ze dvou odporů a dvou kondenzátorů, se vstupním napětím U_1 a výstupním napětím U podle tohoto obrázku



Obrázek 1: Elektrický obvod s dvěma odpory a dvěma kondenzátory

Pro sestavení diferenciální rovnice popisující tento obvod použijeme vztah mezi napětím U a proudem I na odporu R (Ohmův zákon) $U = RI$ a podobně pro kondenzátor o kapacitě C platí $C\dot{U} = I$, kde tečka značí derivaci podle času $\dot{U} = \frac{dU}{dt}$. Uvažujeme konstantní odpor R a konstantní kapacitu C . Označíme vstupní napětí U_1 a výstupní napětí U (viz obrázek). Proud I protékající vodorovnou větví je

$$I = \frac{U}{R} + C\dot{U}$$

a časová derivace rozdílu $U_1 - U$ je

$$\dot{U}_1 - \dot{U} = R\dot{I} + \frac{I}{C}.$$

(Ta poslední tečka je tečka za větou, neznamena časovou derivaci.) Vyloučíme I tím, že vyjádříme I z první rovnice a dosadíme do druhé

$$\dot{U}_1 - \dot{U} = R\left(\frac{\dot{U}}{R} + C\ddot{U}\right) + \frac{1}{C}\left(\frac{U}{R} + C\dot{U}\right)$$

Označme

$$\tau = RC$$

a dostaneme

$$\dot{U}_1 - \dot{U} = \dot{U} + \tau \ddot{U} + \frac{U}{\tau} + \dot{U}$$

a nakonec

$$\tau^2 \ddot{U} + 3\tau \dot{U} + U = \tau \dot{U}_1.$$

To je lineární nehomogenní diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. Můžeme tuto rovnici zjednodušit tím, že zavedeme bezrozměrný čas

$$x = \frac{t}{\tau}$$

nebo

$$t = \tau x$$

s

$$\frac{dt}{dx} = \tau$$

a novou závislou veličinu

$$y(x) = U(t).$$

Pak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dU}{dt} \frac{dt}{dx}$$

čili

$$y' = \tau \dot{U}$$

a podobně

$$y'' = \tau^2 \ddot{U}$$

a rovnice bude

$$y'' + 3y' + y = f'(x),$$

kde $f'(x) = \tau \dot{U}_1(t)$ představuje derivaci vstupního signálu. Tento krok se nazývá změna měřítka nebo také přechod k bezrozměrným veličinám (anglicky rescaling) a používá se ke snížení počtu parametrů v rovnici. Jinými slovy, změníme jednotku času ze sekundy na novou jednotku rovnou τ .

Nejdříve budeme řešit odpovídající homogenní rovnici

$$y'' + 3y' + y = 0$$

a pak budeme řešit nehomogenní rovnici metodou odhadu.

0.2 Homogenní rovnice

Uvažujme rovnici

$$y'' + 3y' + y = 0.$$

Odpovídající charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

s dvěma různými reálnými kořeny

$$\lambda_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \doteq -0.381966$$

a

$$\lambda_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \doteq -2.61803.$$

Těmito dvěma kořenům charakteristické rovnice odpovídají dvě řešení diferenciální rovnice

$$y_1 = \exp(\lambda_1 x) = \exp\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2} x\right)$$

a

$$y_2 = \exp(\lambda_2 x) = \exp\left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2} x\right)$$

a obecné řešení homogenní rovnice je

$$y_{GH} = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

kde c_1, c_2 jsou libovolné konstanty. Protože oba kořeny charakteristické rovnice jsou záporné, řešení homogenní rovnice se rychle blíží k nule s rostoucím časem, neboť pro $\lambda < 0$ je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(\lambda x) = 0.$$

0.2.1 Metoda odhadu

Metodu odhadu lze použít pro lineární nehomogenní rovnici se speciální pravou stranou (ve tvaru lineární kombinace součinů mnohočlenů, exponenciální funkce a goniometrických funkcí sinus a kosinus). Uvažujme náš elektrický obvod s periodickým harmonickým vstupním signálem. Vyjádříme takový

vstupní signál funkcí $\sin \omega x$ nebo $\cos \omega x$. Zápisy budou kratší, když použijeme komplexní exponenciálu

$$\exp(i\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

kde i je imaginární jednotka (tedy $i^2 = -1$). Tento vztah lze dokázat použitím Taylorovy řady pro exponenciálu a pro funkce sinus a kosinus

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots$$

Uvažujme tedy vstupní signál

$$f(x) = \exp(i\omega x),$$

kde ω je úhlová frekvence vstupního signálu. A pravá strana je tedy

$$f'(x) = i\omega \exp(i\omega x)$$

a rovnice zní

$$y'' + 3y' + y = i\omega \exp(i\omega x).$$

Metoda odhadu nám říká, že partikulární řešení lze psát ve tvaru

$$y = A \exp(i\omega x)$$

za předpokladu, že tato funkce není řešením homogenní rovnice. Tento předpoklad je v našem případě splněn, protože, jak jsme uvedli, řešení homogenní rovnice je utuchající, tedy blížící se k nule pro x jdoucí k nekonečnu.

Konstantu A najdete tak, že tento tvar řešení dosadíme do diferenciální rovnice. K tomu si připravíme první a druhou derivaci

$$y' = i\omega A \exp(i\omega x)$$

a

$$y'' = -\omega^2 A \exp(i\omega x).$$

Když dosadíme tyto výrazy do diferenciální rovnice, tak dostaneme

$$-\omega^2 A \exp(i\omega x) + 3i\omega A \exp(i\omega x) + A \exp(i\omega x) = i\omega \exp(i\omega x).$$

Vydělíme výrazem $\exp(i\omega x)$ a vytkneme A

$$A(-\omega^2 + 3i\omega + 1) = i\omega$$

$$A = \frac{i\omega}{-\omega^2 + 3i\omega + 1}$$

a řešení je

$$y = \frac{i\omega}{-\omega^2 + 3i\omega + 1} \exp(i\omega t).$$

Komplexní číslo A je komplexní amplituda. Jeho absolutní hodnota určuje maximum signálu a jeho argument (úhel) určuje fázi.

Pro diskuzi bude výhodné vyjádřit

$$\frac{1}{A} = \frac{-\omega^2 + 3i\omega + 1}{i\omega} = 3 + i\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right).$$

Výstupní signál bude mít maximální amplitudu, když bude maximální absolutní hodnota komplexní amplitudy A . A toto nastane, když bude minimální absolutní hodnota převrácené hodnoty čísla A . Číslo $\frac{1}{A}$ je komplexní číslo s konstantní reálnou částí rovnou 3 a imaginární částí $(\omega - \frac{1}{\omega})$. Tedy $|\frac{1}{A}|$ bude nejmenší, když imaginární část bude nulová

$$\omega - \frac{1}{\omega} = 0$$

To nastane pro $|\omega| = 1$.

Když uvažujeme pouze kladné frekvence, tak amplituda výstupního signálu bude maximální pro $\omega = 1$. Pro jiné frekvence bude výstupní signál slabší. Vidíme tedy, že tento elektrický obvod slouží jako pasivní filtr typu pásmová propust'. Nízké a vysoké frekvence potlačuje. Tento obvod se nazývá Wienův filtr.

3.2.2019

Pavel.Pokorny@vscht.cz