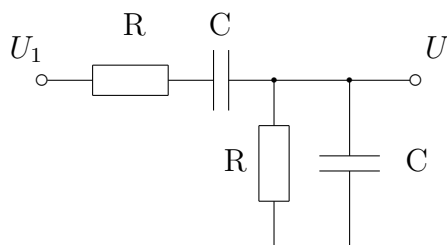


Aplikace na lineární diferenciální rovnici druhého řádu – elektrický obvod (Wienův článek)

0.1 Odvození rovnice

Uvažujme následující elektrický obvod, který se skládá ze dvou odporů a dvou kondenzátorů, se vstupním napětím U_1 a výstupním napětím U podle tohoto obrázku



Obrázek 1: Elektrický obvod s dvěma odpory a dvěma kondenzátory

Pro sestavení diferenciální rovnice popisující tento obvod použijeme vztah mezi napětím U a proudem I na odporu R (Ohmův zákon) $U = RI$ a podobně pro kondenzátor o kapacitě C platí $C\dot{U} = I$, kde tečka značí derivaci podle času $\dot{U} = \frac{dU}{dt}$. Uvažujeme konstantní odpor R a konstantní kapacitu C . Označíme vstupní napětí U_1 a výstupní napětí U (viz obrázek). Proud I protékající vodorovnou větví je roven součtu proudů ve dvou svislých větvích

$$I = \frac{U}{R} + C\dot{U}$$

a časová derivace rozdílu napětí $U_1 - U$ je rovna součtu časových derivací napětí na odporu a kondenzátoru ve vodorovné větvi

$$\dot{U}_1 - \dot{U} = R\dot{I} + \frac{I}{C}.$$

(Ta poslední tečka je tečka za větou, neznamená časovou derivaci.) Vy-
loučíme I tím, že vyjádříme I z první rovnice a dosadíme do druhé

$$\dot{U}_1 - \dot{U} = R\left(\frac{\dot{U}}{R} + C\ddot{U}\right) + \frac{1}{C}\left(\frac{U}{R} + C\dot{U}\right)$$

Označme

$$\tau = RC$$

a dostaneme

$$\dot{U}_1 - \dot{U} = \dot{U} + \tau \ddot{U} + \frac{U}{\tau} + \dot{U}$$

a nakonec

$$\tau^2 \ddot{U} + 3\tau \dot{U} + U = \tau \dot{U}_1.$$

To je lineární nehomogenní diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. Můžeme tuto rovnici zjednodušit tím, že zavedeme bezrozměrný čas

$$x = \frac{t}{\tau}$$

nebo

$$t = \tau x$$

s

$$\frac{dt}{dx} = \tau$$

a novou závislou veličinu

$$y(x) = U(t).$$

Pak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dU}{dt} \frac{dt}{dx}$$

čili

$$y' = \tau \dot{U}$$

a podobně

$$y'' = \tau^2 \ddot{U}$$

a rovnice bude

$$y'' + 3y' + y = f'(x),$$

kde $f'(x) = \tau \dot{U}_1(t)$ představuje derivaci vstupního signálu. Tento krok se nazývá změna měřítka nebo také přechod k bezrozměrným veličinám (anglicky rescaling) a používá se ke snížení počtu parametrů v rovnici. Jinými slovy, změníme jednotku času ze sekundy na novou jednotku rovnou τ .

Nejdříve budeme řešit odpovídající homogenní rovnici

$$y'' + 3y' + y = 0$$

a pak budeme řešit nehomogenní rovnici dvěma různými metodami: metodou odhadu a metodou variace konstant.

0.2 Homogenní rovnice

Uvažujme rovnici

$$y'' + 3y' + y = 0.$$

Odpovídající charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

s dvěma různými reálnými kořeny

$$\lambda_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \doteq -0.381966$$

a

$$\lambda_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \doteq -2.61803.$$

Těmito dvěma kořenům charakteristické rovnice odpovídají dvě řešení diferenciální rovnice

$$y_1 = \exp(\lambda_1 x) = \exp\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2} x\right)$$

a

$$y_2 = \exp(\lambda_2 x) = \exp\left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2} x\right)$$

a obecné řešení homogenní rovnice je

$$y_{GH} = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

kde c_1, c_2 jsou libovolné konstanty. Protože oba kořeny charakteristické rovnice jsou záporné, řešení homogenní rovnice se rychle blíží k nule s rostoucím časem, neboť pro $\lambda < 0$ je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(\lambda x) = 0.$$

0.2.1 Metoda odhadu

Metodu odhadu lze použít pro lineární nehomogenní rovnici se speciální pravou stranou (ve tvaru lineární kombinace součinů mnohočlenů, exponenciální funkce a goniometrických funkcí sinus a kosinus). Uvažujme náš elektrický obvod s periodickým harmonickým vstupním signálem. Vyjádříme takový

vstupní signál funkcí $\sin \omega x$ nebo $\cos \omega x$. Zápisy budou kratší, když použijeme komplexní exponenciálu

$$\exp(i\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

kde i je imaginární jednotka (tedy $i^2 = -1$). Tento vztah lze dokázat použitím Taylorovy řady pro exponenciálu a pro funkce sinus a kosinus

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots$$

Uvažujme tedy vstupní signál

$$f(x) = \exp(i\omega x),$$

kde ω je úhlová frekvence vstupního signálu. A pravá strana je tedy

$$f'(x) = i\omega \exp(i\omega x)$$

a rovnice zní

$$y'' + 3y' + y = i\omega \exp(i\omega x).$$

Metoda odhadu nám říká, že partikulární řešení lze psát ve tvaru

$$y = A \exp(i\omega x)$$

za předpokladu, že tato funkce není řešením homogenní rovnice. Tento předpoklad je v našem případě splněn, protože, jak jsme uvedli, řešení homogenní rovnice je utuchající, tedy blížící se k nule pro x jdoucí k nekonečnu.

Konstantu A najdete tak, že tento tvar řešení dosadíme do diferenciální rovnice. K tomu si připravíme první a druhou derivaci

$$y' = i\omega A \exp(i\omega x)$$

a

$$y'' = -\omega^2 A \exp(i\omega x).$$

Když dosadíme tyto výrazy do diferenciální rovnice, tak dostaneme

$$-\omega^2 A \exp(i\omega x) + 3i\omega A \exp(i\omega x) + A \exp(i\omega x) = i\omega \exp(i\omega x).$$

Vydělíme výrazem $\exp(i\omega x)$ a vytkneme A

$$A(-\omega^2 + 3i\omega + 1) = i\omega$$

$$A = \frac{i\omega}{-\omega^2 + 3i\omega + 1}$$

a řešení je

$$y = \frac{i\omega}{-\omega^2 + 3i\omega + 1} \exp(i\omega t).$$

Komplexní číslo A je komplexní amplituda. Jeho absolutní hodnota určuje maximum signálu a jeho argument (úhel) určuje fázi.

Pro diskuzi bude výhodné vyjádřit

$$\frac{1}{A} = \frac{-\omega^2 + 3i\omega + 1}{i\omega} = 3 + i(\omega - \frac{1}{\omega}).$$

Výstupní signál bude mít maximální amplitudu, když bude maximální absolutní hodnota komplexní amplitudy A . A toto nastane, když bude minimální absolutní hodnota převrácené hodnoty čísla A . Číslo $\frac{1}{A}$ je komplexní číslo s konstantní reálnou částí rovnou 3 a imaginární částí $(\omega - \frac{1}{\omega})$. Tedy $|\frac{1}{A}|$ bude nejmenší, když imaginární část bude nulová

$$\omega - \frac{1}{\omega} = 0$$

To nastane pro $|\omega| = 1$.

Když uvažujeme pouze kladné frekvence, tak amplituda výstupního signálu bude maximální pro $\omega = 1$. Pro jiné frekvence bude výstupní signál slabší. Vidíme tedy, že tento elektrický obvod slouží jako pasivní filtr typu pásmová propust'. Nízké a vysoké frekvence potlačuje. Tento obvod se nazývá Wienův filtr.

0.2.2 Variace konstant

Uvažujme opět rovnici

$$y'' + 3y' + y = f'(x).$$

Metodu odhadu nelze použít, pokud pravá strana není ve speciálním tvaru. Pak musíme použít metodu variace konstant. Použijeme obecné řešení homogenní rovnice

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

kde c_1 a c_2 jsou konstanty, a napíšeme řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2,$$

kde $c_1(x)$ a $c_2(x)$ jsou dvě dosud neznámé funkce. Abychom je našli, dosadíme tento tvar řešení do diferenciální rovnice a za dodatečného předpokladu $c'_1 y_1 + c'_2 y_2 = 0$ (zde vynecháváme (x) u c_1 a c_2 , aby byl zápis stručnější) dostaneme po úpravách soustavu dvou rovnic pro $c'_1(x)$ a $c'_2(x)$

$$\begin{aligned} c'_1 y_1 + c'_2 y_2 &= 0 \\ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 &= f'(x). \end{aligned}$$

Toto je zajímavé místo z terminologického hlediska. Jako soustava rovnic pro neznámé c_1 a c_2 je to soustava diferenciálních rovnic. Ale jako soustava rovnic pro neznámé c'_1 a c'_2 je to soustava dvou algebraických rovnic. A tu můžeme vyřešit např. Cramerovým pravidlem. Za tím účelem spočteme tyto tři determinanty

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \exp(\lambda_1 x) & \exp(\lambda_2 x) \\ \lambda_1 \exp(\lambda_1 x) & \lambda_2 \exp(\lambda_2 x) \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) \exp((\lambda_1 + \lambda_2)x)$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f' & y'_2 \end{vmatrix} = -y_2 f' = -\exp(\lambda_2 x) f'$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & f' \end{vmatrix} = y_1 f' = \exp(\lambda_1 x) f'$$

a pak

$$c'_1(x) = \frac{D_1}{D} = -\frac{\exp(\lambda_2 x) f'}{(\lambda_2 - \lambda_1) \exp((\lambda_1 + \lambda_2)x)} = -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(-\lambda_1 x) f'$$

$$c'_2(x) = \frac{D_2}{D} = \frac{\exp(\lambda_1 x) f'}{(\lambda_2 - \lambda_1) \exp((\lambda_1 + \lambda_2)x)} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(-\lambda_2 x) f'.$$

Abychom našli $c_1(x)$ z $c'_1(x)$ můžeme použít buďto neurčitý integrál

$$c_1(x) = \int c'_1(x) dx$$

nebo můžeme použít určitý integrál s proměnnou horní mezí x (a s libovolnou dolní mezí, např. a) s novou integrační proměnnou, např. v

$$c_1(x) = \int_a^x c'_1(v) dv.$$

Když vezmeme limitu pro a jdoucí k $-\infty$, tak dostaneme

$$c_1(x) = \int_{-\infty}^x c'_1(v) dv = - \int_{-\infty}^x \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(-\lambda_1 v) f'(v) dv$$

a podobně pro c_2

$$c_2(x) = \int_{-\infty}^x c'_2(v) dv = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(-\lambda_2 v) f'(v) dv.$$

Pak řešení je

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) = \\ &= \exp(\lambda_1 x) \int_{-\infty}^x -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(-\lambda_1 v) f'(v) dv + \\ &+ \exp(\lambda_2 x) \int_{-\infty}^x \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(-\lambda_2 v) f'(v) dv = \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{\exp(\lambda_2(x-v)) - \exp(\lambda_1(x-v))}{\lambda_2 - \lambda_1} f'(v) dv. \end{aligned}$$

Nyní můžeme použít Heavisideovu skokovou funkci

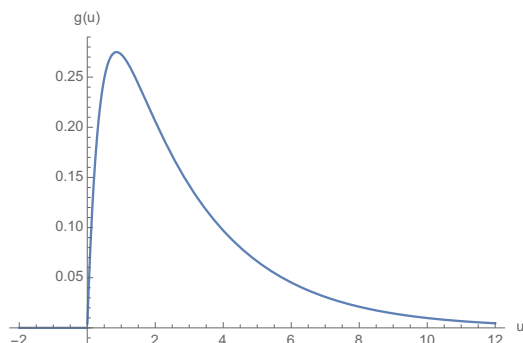
$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \geq 0 \\ 0 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

a můžeme rozšířit tento integrál na celou přímku

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x-v) \frac{\exp(\lambda_2(x-v)) - \exp(\lambda_1(x-v))}{\lambda_2 - \lambda_1} f'(v) dv.$$

Když označíme

$$g(u) = H(u) \frac{\exp(\lambda_2 u) - \exp(\lambda_1 u)}{\lambda_2 - \lambda_1}$$



Obrázek 2: Greenova funkce pro Wienův filtr

viz. Obr. 2, můžeme napsat řešení

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-v)f'(v)dv.$$

Terminologická poznámka pro zvědavého čtenáře: tato operace, tedy integrál součinu dvou funkcí v bodech, které dávají v součtu x se nazývá konvoluce. A funkce g která dovoluje napsat řešení jako konvoluci funkce g s pravou stranou rovnice, se nazývá Greenova funkce.

0.2.3 Dají obě metody stejný výsledek ?

Co když použijeme metodu variace konstant pro případ se speciální pravou stranou? Dostaneme stejný výsledek jako při metodě odhadu?

Uvažujme tedy opět

$$f(x) = \exp(i\omega t)$$

$$f'(x) = i\omega \exp(i\omega t)$$

a řešení

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x-v)f'(v)dv = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(x-v) \frac{\exp(\lambda_2(x-v)) - \exp(\lambda_1(x-v))}{\lambda_2 - \lambda_1} i\omega \exp(i\omega v) dv = \\ &= \frac{i\omega}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{-\infty}^x (\exp(\lambda_2 x - \lambda_2 v + i\omega v) - \exp(\lambda_1 x - \lambda_1 v + i\omega v)) dv = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i\omega}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[\frac{\exp(\lambda_2 x - \lambda_2 v + i\omega v)}{-\lambda_2 + i\omega} - \frac{\exp(\lambda_1 x - \lambda_1 v + i\omega v)}{-\lambda_1 + i\omega} \right]_{-\infty}^x = \\
&= \frac{i\omega \exp(i\omega x)}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{1}{-\lambda_2 + i\omega} - \frac{1}{-\lambda_1 + i\omega} \right) = \\
&= \frac{i\omega \exp(i\omega x)}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{-\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2 - i\omega(\lambda_2 + \lambda_1) - \omega^2} = \\
&= \frac{i\omega \exp(i\omega x)}{\lambda_1 \lambda_2 - i\omega(\lambda_2 + \lambda_1) - \omega^2}.
\end{aligned}$$

A s našimi hodnotami

$$\lambda_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \doteq -0.381966$$

a

$$\lambda_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \doteq -2.61803$$

máme

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1$$

a

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -3,$$

takže

$$y(x) = \frac{i\omega}{1 - \omega^2 + 3i\omega} \exp(i\omega x),$$

což je v dokonalém souladu s výsledkem získaným metodou odhadu.

18.3.2019

Pavel.Pokorny@vscht.cz