

Energie nabité desky – Aplikace čtyřnásobného integrálu

Pavel.Pokorny@vscht.cz

19.2.2019

1 Zadání

Spočtete energii nabité čtvercové desky.

2 Řešení

Uvažujme desku ve tvaru čtverce o straně délky L , která je nabita elektrickým nábojem o velikosti Q s konstantní nábojovou hustotou

$$\sigma = \frac{Q}{L^2}.$$

(Deska musí být z nevodivého materiálu, protože jinak by se náboj vlivem odpuzivých sil mezi souhlasnými náboji přemístil na okraj desky a uprostřed desky by byla nulová nábojová hustota.)

Určeme nejprve energii soustavy dvou bodových nábojů o velikosti q_1 a q_2 . Podle Coulombova zákona se tyto dva náboje odpuzují silou

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

zde

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon},$$

kde ϵ je permitivita prostředí, a r je vzdálenost nábojů. Integrací této síly dostaneme práci, kterou musíme vykonat, abychom přemístili druhý náboj z nekonečna do vzdálenosti r od prvního náboje. To bude energie soustavy dvou nábojů

$$E = \int_{\infty}^r -F dx = \int_{\infty}^r -k \frac{q_1 q_2}{x^2} dx = k q_1 q_2 \left[\frac{1}{x} \right]_{\infty}^r = k \frac{q_1 q_2}{r}.$$

Znaménko minus je nutné, protože dx je záporné.

Nabitou desku si můžeme představit jako složenou z velkého počtu malých nabitých kousků. Celková energie nabité desky bude součtem energií všech

dvojic těchto malých nabitých kousků. Označme polohu jednoho kousku (X, Y) , jeho plochu $dX dY$ a náboj $\sigma dX dY$ a polohu druhého kousku (U, V) , jeho plochu $dU dV$ a náboj $\sigma dU dV$. Později přejdeme k bezrozměrným veličinám x, y, u, v . Vzdálenost těchto dvou kousků je

$$r = \sqrt{(X - U)^2 + (Y - V)^2}.$$

Celková energie bude

$$E = \int_0^L \int_0^L \int_0^L \int_0^L k \frac{\sigma dX dY \sigma dU dV}{r}.$$

Přejdeme od souřadnic X, Y, U, V v délkových jednotkách, např. v metrech, k bezrozměrným souřadnicím x, y, u, v vztahy $X = Lx$, $Y = Ly$, $U = Lu$ a $V = Lv$ a dostaneme

$$E = k \frac{Q^2}{L} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}} dx dy du dv.$$

Abychom spočítali tento čtyřnásobný integrál

$$I_4 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}} dx dy du dv,$$

připravíme si nejdříve několik pomocných výsledků.

2.1 Pomocné výpočty

Exponenciální funkci budeme z důvodu úspory místa psát na řádku, tedy

$$e^x = \exp(x).$$

Použijeme komplexní exponenciálu

$$\exp(i\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

kde i je imaginární jednotka (tedy $i^2 = -1$). Tento vztah lze dokázat použitím Taylorovy řady pro exponenciálu a pro funkce sinus a cosinus

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots$$

Sečtením a odečtením vztahů

$$\exp(i\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

a

$$\exp(-i\varphi) = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

dostaneme vztah mezi exponenciální funkcí a funkcemi sinus a cosinus:

$$\cos x = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}$$

$$\sin x = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}.$$

Podobným vztahem jsou definovány funkce hyperbolický sinus a hyperbolický cosinus

$$\sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$$

$$\cosh x = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}.$$

Z definice těchto funkcí přímo plynou vztahy

$$\sinh ix = i \sin x$$

$$\sin ix = i \sinh x$$

$$\cosh ix = \cos x$$

$$\cos ix = \cosh x.$$

Proč nesou slovo hyperbolický ve svém názvu je vidět z této úvahy. Pro funkce sinus a cosinus platí

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

a parametricky zadaná křivka

$$x = \cos t$$

$$y = \sin t$$

je kružnice

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Podobně pro hyperbolický cosinus a hyperbolický sinus platí

$$\begin{aligned} \cosh^2 t - \sinh^2 t &= \frac{(\exp(t) + \exp(-t))^2}{4} - \frac{(\exp(t) - \exp(-t))^2}{4} = \\ &= \frac{\exp(2t) + 2 + \exp(-2t) - \exp(2t) + 2 - \exp(-2t)}{4} = 1. \end{aligned}$$

Proto parametricky zadaná křivka

$$x = \cosh t$$

$$y = \sinh t$$

je hyperbola

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Podobně jako pro derivace funkcí sinus a cosinus platí

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

lze téměř z paměti odvodit

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \sinh x,$$

tedy bez znaménka minus.

Funkce $\sinh$ je rostoucí a tedy prostá na $\mathbb{R}$, proto k ní existuje inverzní funkce $\operatorname{arcsinh}$. Pro ni lze najít vyjádření tak, že řešíme rovnici

$$y = \sinh x$$

pro neznámou x . Použijeme substituci

$$w = \exp(x) > 0$$

a dostaneme

$$y = \frac{w - 1/w}{2}$$

$$2y = w - \frac{1}{w}$$

$$2yw = w^2 - 1$$

$$w^2 - 2yw - 1 = 0.$$

To je kvadratická rovnice, která má dva kořeny. Nás zajímá ten kladný

$$w = y + \sqrt{y^2 + 1},$$

tak dostáváme výraz pro inverzní hyperbolický sinus

$$\operatorname{arcsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

kde $\log$ je přirozený logaritmus.

Podobně pro hyperbolický cosinus (pokud se omezíme na nezáporné argumenty, aby byla funkce prostá) lze odvodit vztah pro inverzní funkci

$$\operatorname{arccosh} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Tyto funkce mají užitečné derivace

$$(\operatorname{arcsinh} x)' = (\log(x + \sqrt{x^2 + 1}))' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Proto

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \operatorname{arcsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

A pro $b > 0$ je

$$(\operatorname{arcsinh} \frac{x}{b})' = \frac{1}{\sqrt{(\frac{x}{b})^2 + 1}} \frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + b^2}}.$$

Proto

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + b^2}} dx = \operatorname{arcsinh} \frac{x}{b}.$$

Podobně lze odvodit

$$(\operatorname{arccosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Odvodíme si ještě několik dalších integrálů, které budeme potřebovat. Podobně, jako lze využít substituci $x = \sin t$ pro výpočet integrálu

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(t + \sin t \cos t \right) = \frac{1}{2} \left(\arcsin x + x \sqrt{1-x^2} \right), \end{aligned}$$

můžeme použít substituci $x = \sinh t$ pro výpočet integrálu

$$\int \sqrt{1+x^2} dx.$$

Tak, jako jsme použili vztah

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2},$$

odvodíme si podobný vztah pro hyperbolický cosinus

$$\cosh^2 t = \frac{(\exp(t) + \exp(-t))^2}{4} = \frac{\exp(2t) + \exp(-2t) + 2}{4} = \frac{1 + \cosh 2t}{2}.$$

A tak, jako jsme při závěrečných úpravách použili vztah

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t,$$

odvodíme si obdobný vztah pro hyperbolické funkce

$$\begin{aligned} 2 \sinh t \cosh t &= 2 \frac{\exp(t) - \exp(-t)}{2} \frac{\exp(t) + \exp(-t)}{2} = \\ &= \frac{\exp(2t) - \exp(-2t)}{2} = \sinh 2t. \end{aligned}$$

Spočtěme tedy integrál

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \sinh t \\ dx = \cosh t dt \end{array} \right| = \int \cosh^2 t dt = \int \frac{1 + \cosh 2t}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sinh 2t}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(t + \sinh t \cosh t \right) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arcsinh} x + x \sqrt{1+x^2} \right). \end{aligned}$$

Dále s využitím

$$\left(\operatorname{arcsinh} \frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

metodou per partes spočteme integrál

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arcsinh} \frac{1}{x} dx &= \left| \begin{array}{ll} u' &= 1 \\ u &= x \end{array} \quad \begin{array}{ll} v &= \operatorname{arcsinh} \frac{1}{x} \\ v' &= -\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \end{array} \right| = \\ &= x \operatorname{arcsinh} \frac{1}{x} + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = x \operatorname{arcsinh} \frac{1}{x} + \operatorname{arcsinh} x. \end{aligned}$$

Budeme ještě potřebovat tuto limitu typu nula krát nekonečno

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \operatorname{arcsinh} \frac{1}{x}.$$

Protože

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arcsinh} y}{y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}}{1} = 0,$$

je s použitím substituce $x = \frac{1}{y}$ také

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \operatorname{arcsinh} \frac{1}{x} = 0.$$

Tato funkce je sudá, tak můžeme přejít od jednostranné limity k oboustranné

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{arcsinh} \frac{1}{x} = 0.$$

A také

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{arcsinh} \frac{1}{x} = 0.$$

2.2 Dvojný integrál

Při výpočtu čtyřnásobného integrálu

$$I_4 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}} dx dy du dv,$$

přes jednotkovou čtyřrozměrnou hyperkrychli si nejdříve spočteme vnitřní dvojný integrál

$$I_2 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}} dx du$$

přes jednotkový čtverec.

Označíme konstantu

$$b = |y - v|$$

a v integrálu

$$I_2 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x-u)^2 + b^2}} dx du$$

použijeme substituci

$$x = \frac{s-t}{\sqrt{2}}$$

$$u = \frac{s+t}{\sqrt{2}},$$

neboli

$$s = \frac{x+u}{\sqrt{2}}$$

$$t = \frac{u-x}{\sqrt{2}},$$

tedy

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

kde

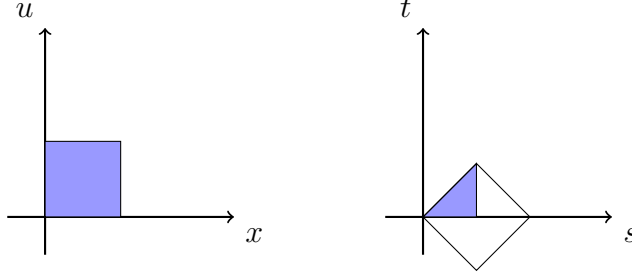
$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice A představuje otočení o 45° , její determinant je

$$\det A = 1.$$

V nových souřadnicích s a t je integrovaná funkce nezávislá na s a sudá v t , můžeme proto integrovat přes jednu čtvrtinu otočeného čtverce (viz obrázek,

kde je modrou barvou vyznačena množina, přes kterou integrujeme v rovině $x-u$ a v rovině $s-t$) a integrál vynásobit čtyřmi.



Tím dostáváme

$$\begin{aligned}
 I_2 &= 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_t^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2t^2 + b^2}} ds dt = \frac{4}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - t}{\sqrt{t^2 + \frac{b^2}{2}}} dt = \\
 &= 4 \left[\frac{1}{2} \operatorname{arcsinh} \frac{t\sqrt{2}}{b} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{t^2 + \frac{b^2}{2}} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2 \operatorname{arcsinh} \frac{1}{b} + 2b - 2\sqrt{1 + b^2}.
 \end{aligned}$$

2.3 Čtyřnásobný integrál

Původní čtyřnásobný integrál je

$$I_4 = \int_0^1 \int_0^1 \left(2 \operatorname{arcsinh} \frac{1}{|y-v|} + 2|y-v| - 2\sqrt{1 + (y-v)^2} \right) dy dv.$$

Použijeme opět stejnou substituci jako při výpočtu integrálu I_2 , tedy otočení o 45° maticí A . A i zde je potom integrovaná funkce sudá v t a nezávislá na s , takže můžeme opět integrovat pouze přes jednu čtvrtinu čtverce. Situaci ilustruje stejný obrázek, jako při výpočtu I_2 . Dostaneme

$$\begin{aligned}
 I_4 &= 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_t^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(2 \operatorname{arcsinh} \frac{1}{t\sqrt{2}} + 2t\sqrt{2} - 2\sqrt{1 + 2t^2} \right) ds dt = \\
 &= 8 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - t \right) \left(\operatorname{arcsinh} \frac{1}{t\sqrt{2}} + t\sqrt{2} - \sqrt{1 + 2t^2} \right) dt.
 \end{aligned}$$

A použitím drobné substituce

$$g = t\sqrt{2}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} I_4 &= 4 \int_0^1 (1-g) \left(\operatorname{arcsinh} \frac{1}{g} + g - \sqrt{1+g^2} \right) dg = \\ &= 4 \left[g \operatorname{arcsinh} \frac{1}{g} + \operatorname{arcsinh} g + \frac{g^2}{2} - \frac{1}{2} (g\sqrt{1+g^2} + \operatorname{arcsinh} g) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{g^2}{2} \operatorname{arcsinh} \frac{1}{g} - \frac{1}{2} \sqrt{1+g^2} - \frac{g^3}{3} + \frac{1}{3} (1+g^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = 4 \left(\operatorname{arcsinh} 1 - \frac{\sqrt{2}-1}{3} \right). \end{aligned}$$

Takže závěr je

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}} dx dy du dv = \\ &= 4 \left(\operatorname{arcsinh} 1 - \frac{\sqrt{2}-1}{3} \right) \doteq 2.97321. \end{aligned}$$

Všimněte si, že ač není integrovaná funkce omezená shora, jedná se o nevlastní integrál, je tento integrál konvergentní, tedy má konečnou hodnotu.

2.4 Výpočet na počítači

2.4.1 Pomocí software *Mathematica*

Pro symbolické výpočty na počítači můžeme s výhodou použít počítačový algebraický systém *Mathematica*. Pro výpočet integrálu se použije příkaz `Integrate` a pro získání přibližné numerické hodnoty použijeme příkaz `N` takto:

```
i=Integrate[1/Sqrt[(x-u)^2+(y-v)^2],{x,0,1},{y,0,1},{u,0,1},{v,0,1}]
```

```
Out[1]= -4 (-1 + Sqrt[2] - 3 ArcSinh[1])
3
```

```
In[2]:= N[i]
```

```
Out[2]= 2.97321
```

Na počítači typu notebook s procesorem Intel Core i7 výpočet trval necelé dvě minuty. Tento výsledek je ve shodě s naším ručním výpočtem.

Konkurenční software Maple verze 2018 tento integrál nespočítal vůbec.

2.4.2 Výpočet metodou Monte Carlo

Pro vícenásobné integrály můžeme použít metodu Monte Carlo. To je souhrnný název pro numerické algoritmy, které využívají generátor pseudonáhodných čísel. Pro numerický výpočet nepotřebujeme symbolické operace, tak můžeme napsat program např. v programovacím jazyce C. Ten má výhodu, že je dostupný na každém počítači s operačním systémem Linux. Výpočet probíhá tak, že vygenerujeme velký počet čtveřic pseudonáhodných čísel mezi nulou a jedničkou, to budou argumenty integrované funkce. V těchto pseudonáhodných čtveřicích vyčíslíme integrovanou funkci a výsledek přičítáme do proměnné, do které na začátku výpočtu uložíme nulu. Na závěr součet vydělíme počtem vygenerovaných bodů. Pro generování pseudonáhodných čísel použijeme funkci `drand48()`. Program může vypadat např. takto:

```
# include <stdio.h>
# include <math.h>
# include <stdlib.h>
int main ()
{
    int i,im=100000000;
    double x,y,u,v,w,s=0;
    for (i=0;i<im;i++) {
        x = drand48();
        y = drand48();
        u = drand48();
        v = drand48();
        w = sqrt((x-u)*(x-u)+(y-v)*(y-v));
        if(w>0) s += 1/w;
    };
    printf("%G\n",s/im);
    return(0);
}
```

Tento program generuje 10^8 pseudonáhodných čtveřic a výpočet na počítači s procesorem Intel Core i7 trval 3 sekundy a dal výsledek 2.9729, což se shoduje s přesným výsledkem na 4 platné číslice. To je v souladu s očekáváním, že relativní chyba výsledku je nepřímo úměrná odmocnině z počtu bodů.