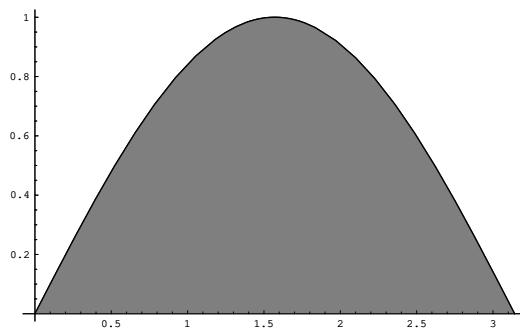


Kapitola 9

Aplikace integrálů funkcí jedné proměnné

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%   Prikklady ke kapitole 9:
%   Aplikace integralu funkci jedne promenne
%   vcetne reseni pomoci Maple a Mathematica
%   19.7.2006
%   http://www.vscht.cz/mat/Pavel.Pokorny/students
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Příklad 1: Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \sin x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$ a osou x .



Výsledek: Plošný obsah je $P = 2$.

Návod: Použijte vztah

$$P = \int_a^b y \, dx.$$

Výsledek:

$$P = \int_0^{\pi} y \, dx = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 2.$$

Maple:

```
> int(sin(x),x=0..Pi);
```

2

```
> plot(sin(x),x=0..Pi);
```

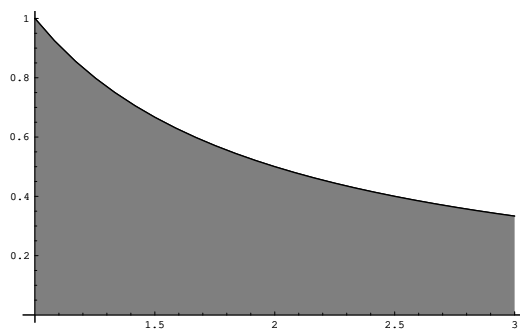
Mathematica:

```
In[1]:=Integrate[Sin[x],{x,0,Pi}]
```

```
Out[1]=2
```

```
In[2]:=Plot[Sin[x],{x,0,Pi}];
```

Příklad 2: Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1, 3 \rangle$ a osou x .



Výsledek: Plošný obsah je $P = \ln 3$.

Návod: Použijte vztah

$$P = \int_a^b y \, dx.$$

Postup:

$$P = \int_1^3 y \, dx = \int_1^3 \frac{1}{x} \, dx = \left[\ln x \right]_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$$

Maple:

```
> int(1/x,x=1..3);
```

$\ln(3)$

```
> plot(1/x,x=1..3);
```

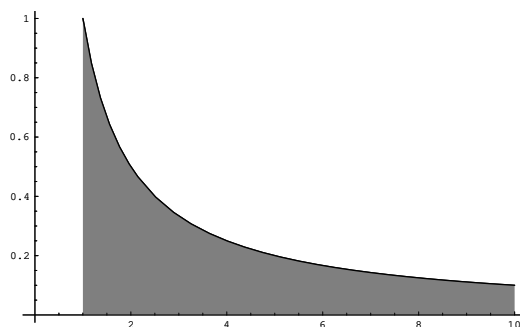
Mathematica:

```
In[1]:=Integrate [ 1/x, {x,1,3}]
```

```
Out[1]=Log[3]
```

```
In[2]:=Plot[1/x,{x,1,3}];
```

Příklad 3: Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1, \infty \rangle$ a osou x .



Výsledek: Plošný obsah je $P = \infty$.

Návod: Použijte vztah

$$P = \int_a^b y \, dx.$$

Postup:

$$P = \int_1^{\infty} y \, dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \, dx = \left[\ln x \right]_1^{\infty} = \ln \infty - \ln 1 = \infty.$$

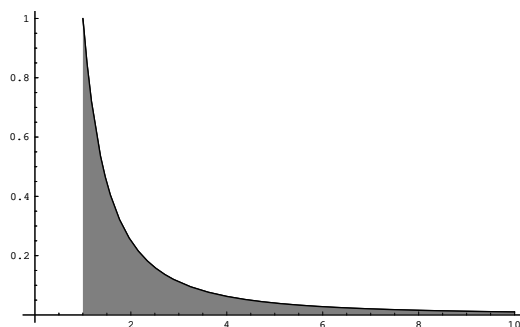
Maple:

```
> int(1/x,x=1..infinity);
                                infinity
> plot(1/x,x=1..10);
```

Mathematica:

```
In[1]:=Limit[Integrate[1/x,{x,1,b}],b->Infinity]
Out[1]=Infinity
In[2]:=Plot[1/x,{x,1,10}];
```

Příklad 4: Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x^2}$, $x \in \langle 1, \infty \rangle$ a osou x .



Výsledek: Plošný obsah je $P = 1$.

Návod: Použijte vztah

$$P = \int_a^b y \, dx.$$

Postup:

$$P = \int_1^{\infty} y \, dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \, dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = 1.$$

Maple:

```
> int(1/x^2,x=1..infinity);
```

1

```
> plot(1/x^2,x=1..10);
```

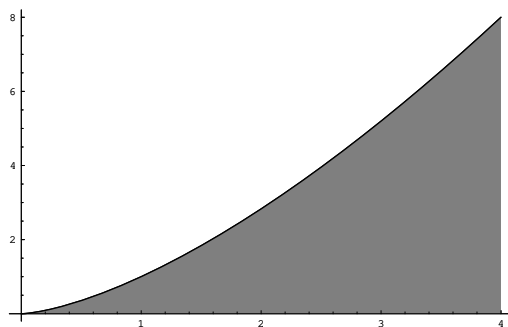
Mathematica:

```
In[1]:= Integrate [ 1/x^2, {x,1,Infinity}]
```

```
Out[1]= 1
```

```
In[2]:=Plot[1/x^2,{x,1,10}];
```

Příklad 5: Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$ a osou x .



Výsledek: Plošný obsah je $P = \frac{64}{5}$.

Návod: Použijte vztah

$$P = \int_a^b y \, dx.$$

Postup:

$$P = \int_0^4 y \, dx = \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} \, dx = \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 = \frac{2}{5} \times 32 = \frac{64}{5}.$$

Maple:

```
> int(x^(3/2), x=0..4);
```

64/5

```
> plot(x^(3/2), x=0..4);
```

Mathematica:

```
In[1]:= Integrate[x^(3/2), {x, 0, 4}]
```

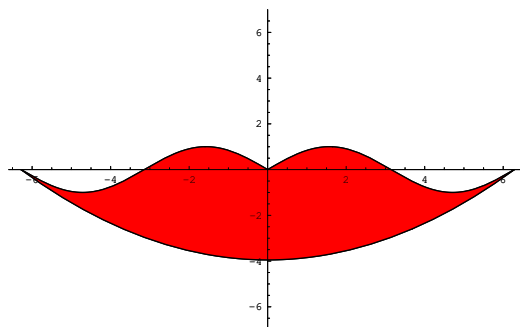
64

```
Out[1]= --
```

5

```
In[2]:= Plot[x^(3/2), {x, 0, 4}];
```

Příklad 6: Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí $y_1 = \sin |x|$ a $y_2 = (x - 2\pi)(x + 2\pi)/10$, $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$.



Výsledek: Plošný obsah je $P = \frac{16}{15}\pi^3$.

Návod: Použijte vztah

$$P = \int_a^b |y_1 - y_2| dx.$$

Postup: Obě funkce jsou sudé (ověřte!), proto můžeme integrovat pouze od nuly do 2π a výsledek vynásobit dvěma. Na tomto intervalu je x nezáporné, lze tedy odstranit absolutní hodnotu ve funkci y_1 . Protože na tomto intervalu platí $y_1 \geq y_2$, můžeme odstranit i absolutní hodnotu u rozdílu funkcí. Tím dostáváme

$$\begin{aligned} P &= \int_{-2\pi}^{2\pi} |y_1 - y_2| dx = 2 \int_0^{2\pi} (y_1 - y_2) dx = 2 \int_0^{2\pi} (\sin x - (x - 2\pi)(x + 2\pi)/10) dx = \\ &= 2 \left[-\cos x - \left(\frac{x^3}{3} - 4\pi^2 x \right) / 10 \right]_0^{2\pi} = \frac{16}{15}\pi^3. \end{aligned}$$

Maple:

```
> y1:=sin(abs(x));
                                     y1 := sin(| x |)
> y2:=(x-2*Pi)*(x+2*Pi)/10;
                                     (x - 2 Pi) (x + 2 Pi)
                                     -----
                                     10
> int(abs(y1-y2),x=-2*Pi..2*Pi);
```

$$\frac{16 \pi^3}{15}$$

```
> plot([y1,y2],x=-2*Pi..2*Pi);
```

Mathematica:

```
In[1]:= y1=Sin[Abs[x]]
```

```
Out[1]= Sin[Abs[x]]
```

```
In[2]:= y2=(x-2*Pi)*(x+2*Pi)/10
        (-2 Pi + x) (2 Pi + x)
```

```
Out[2]= -----
```

10

```
In[3]:= Integrate[Abs[y1-y2],{x,-2*Pi,2*Pi}]
```

3

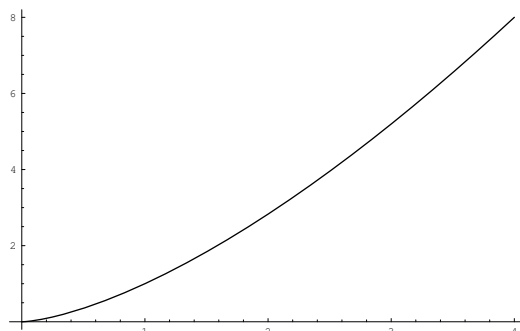
16 Pi

```
Out[3]= -----
```

15

```
In[4]:= Plot[{y1,y2},{x,-2*Pi,2*Pi}]
```

Příklad 7: Určete délku l grafu funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$.



Výsledek: Délka je $l \doteq 9,07342$.

Návod: Použijte vztah

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \, dx.$$

Postup:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^4 \sqrt{1 + y'^2} \, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} \, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \, dx = \\ &= \left[\frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{8}{27} (10^{\frac{3}{2}} - 1) \doteq 9,07342. \end{aligned}$$

Maple:

```
> y:=x^(3/2);
```

```

(3/2)
y := x

```

```
> l:=simplify(int(sqrt(1+(diff(y,x))^2), x=0..4));
```

```

1/2
80 10
l := - 8/27 + -----
27

```

```
> evalf(l);
```

```
9.073415289
```

```
> plot(x^(3/2),x=0..4);
```

Mathematica:

```
In[1] := y = x^(3/2)
```

```
Out[1] = x3/2
```

```
In[2] := 1 = Integrate [ Sqrt[1+D[y,x]^2] , {x,0,4}]
```

```
Out[2] = 
$$\frac{8 (-1 + 10 \sqrt{10})}{27}$$

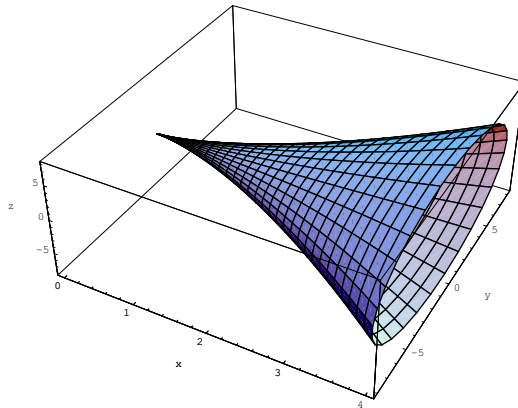
```

```
In[3] := N[%]
```

```
Out[3] = 9.07342
```

```
In[4] := Plot[x^(3/2) , {x,0,4}] ;
```

Příklad 8: Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací grafu funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$ okolo osy x .



Výsledek: Objem je $V = 64\pi$.

Návod: Použijte vztah

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Postup:

$$V = \pi \int_0^4 y^2 dx = \pi \int_0^4 x^3 dx = \pi \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^4 = 64\pi.$$

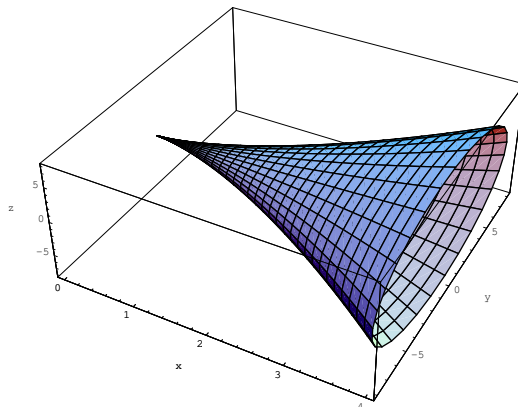
Maple:

```
> y:=x^(3/2);
> v:=int(Pi*y^2,x=0..4);
                                     v := 64 Pi
> plot(x^(3/2),x=0..4);
```

Mathematica:

```
In[1]:= y = x^(3/2);
In[2]:= v = Integrate[Pi y^2,{x,0,4}]
Out[2]= 64 Pi
In[3]:=Plot[x^(3/2),{x,0,4}];
```

Příklad 9: Určete plochu S pláště rotačního tělesa vzniklého rotací grafu funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$ okolo osy x .



Výsledek: Plocha pláště je $S \doteq 43,1126$.

Návod: Použijte vztah

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} \, dx.$$

Postup:

$$S = \int_0^4 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} \, dx = 2\pi \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \, dx$$

a tento integrál vyčíslíme na počítači.

Maple:

```
> y:=x^(2/3):
> s:=evalf(int(2*Pi*y*sqrt(1+(diff(y,x))^2),x=0..4));
s := 43.11261049
> plot(x^(3/2),x=0..4);
```

Mathematica:

```
In[1]:= y = x^(3/2);
In[2]:= s = N[Integrate [ 2 Pi y Sqrt[1+D[y,x]^2], {x,0,4}]]
Out[2]= 43.1126
In[3]:=Plot[x^(3/2),{x,0,4}];
```

Poznámka: Kdybychom požadovali přesný výsledek, tak je program *Mathematica* vhodnější než program Maple, protože výsledek z programu Maple je těžko použitelný, neboť je příliš dlouhý a obsahuje speciální matematické funkce `hypergeom`. Srovnejte výsledek výpočtu integrálu

$$S = 2\pi \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \, dx$$

pomocí Maple:

```
> y:=x^(2/3):
> s:=simplify(int(2*Pi*y*sqrt(1+(diff(y,x))^2),x=0..4));
bytes used=4003744, alloc=3276200, time=0.26
bytes used=8004164, alloc=5110872, time=0.58

s := -1/1963313115120 Pi (-206834632704 + 292448439360 2^(2/3)
+ 94690 2^(2/3) %2 - 1567832112 2^(2/3) %1 - 3504619560960 %3 - 522360 %2
+ 13392313200 %1 - 18783522801792 2^(1/3) %3 + 866295 2^(1/3) %2
- 28755445824 2^(1/3) %1)

%1 := hypergeom([1/6, 1/2, 5/6], [7/3, 8/3], ---)
729

%2 := hypergeom([7/6, 3/2, 11/6], [10/3, 11/3], ---)
729

%3 := hypergeom([-5/6, -1/2, -1/6], [4/3, 5/3], ---)
729

> evalf(s);
43.11261047
```

a pomocí Mathematica:

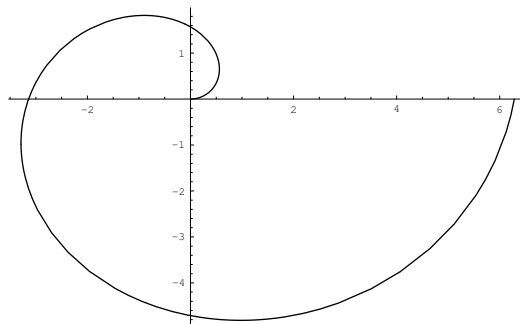
```
In[1] := y = x^(2/3);
In[2] := s = Integrate [ 2 Pi y Sqrt[1+D[y,x]^2], {x,0,4}]

Out[2] = -----
16 (8 + (18 + 243 2^(1/3) - 4 2^(2/3) ) Sqrt[9 + 2^(2/3)]) Pi
```

1215

```
In[3] := N[s]  
Out[3] = 43.1126
```

Příklad 10: Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného polární osou a jedním závitem Archimedovy spirály dané v polárních souřadnicích rovnicí $r = \phi$.



Výsledek: Plošný obsah je $P = \frac{4}{3}\pi^3$.

Návod: Použijte vztah

$$P = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{1}{2} r^2 d\phi.$$

Postup:

$$P = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \phi^2 d\phi = \frac{1}{6} \left[\phi^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{6} (2\pi)^3 = \frac{4}{3} \pi^3.$$

Maple:

```
> r:=phi;
> int(r^2/2,phi=0..2*Pi);

          3
      4 Pi
      ----
          3

> plot([r,phi,phi=0..2*Pi],coords=polar);
```

Mathematica:

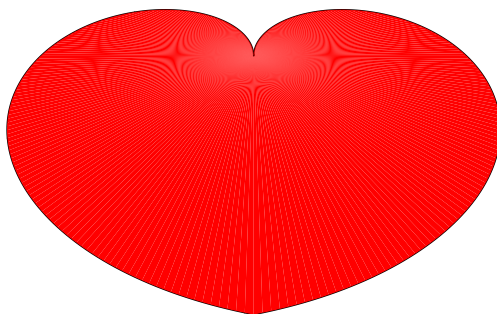
```
In[1]:= r:=phi;
In[1]:= Integrate[r^2/2,{phi,0,2Pi}]

          3
      4 Pi
```

Out[1]= $\frac{\text{-----}}{3}$

In[3]:= ParametricPlot[{r*cos[phi],r*sin[phi]},{phi,0,2*Pi}];

Příklad 11: Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného křivkou danou v polárních souřadnicích rovnicí $r = |\phi - \frac{\pi}{2}|$; $\phi \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \rangle$.



Výsledek: Plošný obsah je $P = \frac{1}{3}\pi^3$.

Návod: Použijte vztah

$$P = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{1}{2} r^2 d\phi.$$

Postup:

$$P = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} (\phi - \frac{1}{2}\pi)^2 d\phi = \frac{1}{6} \left[(\phi - \frac{\pi}{2})^3 \right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = \frac{1}{6} (\pi^3 + \pi^3) = \frac{\pi^3}{3}.$$

Maple:

```
> r:=abs(phi-Pi/2);
> int(r^2/2,phi=-Pi/2..3/2*Pi);
          3
        Pi
        ---
          3
> plot([r,phi,phi=-Pi/2..3/2*Pi],coords=polar);
```

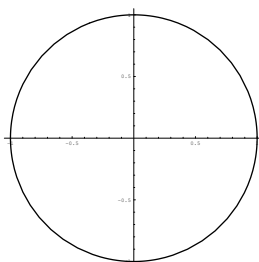
Mathematica:

```
In[1]:= r:=Abs[phi-Pi/2];
In[2]:= Integrate[r^2/2,{phi,-Pi/2,3/2*Pi}]
          3
```

```
Out[2] =  $\frac{\pi}{3}$ 
In[3] := ParametricPlot[
  {r*cos[phi], r*sin[phi]}, {phi, -Pi/2, 3/2*Pi}]
```

Příklad 12: Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned}x &= \cos t \\y &= \sin t \\t &\in \langle 0, 2\pi \rangle.\end{aligned}$$



Výsledek: Délka je $l = 2\pi$, je to jednotková kružnice.

Návod: Použijte vztah

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

Postup pomocí integrálu:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Maple:

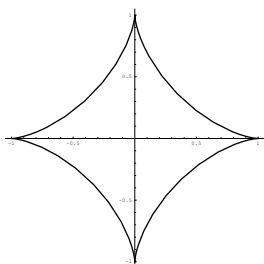
```
> x:=sin(t): y:=cos(t):
> l:=int(sqrt(diff(x,t)^2+diff(y,t)^2),t=0..2*Pi);
      l := 2 Pi
> plot([x,y,t=0..2*Pi]);
```

Mathematica:

```
In[1]:= x=Cos[t]; y=Sin[t];
In[2]:= l=Integrate[Sqrt[D[x,t]^2+D[y,t]^2],{t,0,2Pi}]
Out[2]= 2 Pi
In[3]:= ParametricPlot[{x,y},{t,0,2*Pi}];
```

Příklad 13: Spočítejte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned}x &= \cos^3 t \\y &= \sin^3 t \\t &\in \langle 0, 2\pi \rangle.\end{aligned}$$



Výsledek: Délka je $l = 6$, tato křivka se nazývá asteroida.

Návod: Použijte vztah

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

Postup:

$$\begin{aligned}l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2} dt = \\&= \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = \\&= \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} |3\cos t \sin t| dt = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} |2\cos t \sin t| dt = \\&= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} |\sin 2t| dt = 6.\end{aligned}$$

Maple:

```
> x:=sin(t)^3: y:=cos(t)^3:
> l:=int(sqrt(diff(x,t)^2+diff(y,t)^2),t=0..2*Pi);
      l := 6
> plot([x,y,t=0..2*Pi]);
```

Mathematica:

```
In[1] := x=Cos[t]^3; y=Sin[t]^3;
```

```
In[2] := l=Integrate[Sqrt[D[x,t]^2+D[y,t]^2],{t,0,2Pi}]
```

```
Out[2]= 6
```

```
In[3] := ParametricPlot[{x,y},{t,0,2*Pi}];
```

Příklad 14: Určete práci, kterou je třeba vykonat pro přenesení vaší milé (vašeho milého) z povrchu Země do nekonečna, uvažujeme-li pouze gravitační pole Země.

Výsledek: Označíme-li si hmotnost Země $M \doteq 6,0 \times 10^{24}$ kg, hmotnost přenášené osoby $m = 60$ kg, poloměr Země $R \doteq 6,4 \times 10^6$ m a Newtonovu gravitační konstantu $\kappa \doteq 6,7 \times 10^{-11}$ m²Nkg⁻², je práce

$$W = \frac{\kappa M m}{R} \doteq 3,8 \times 10^9 \text{ J.}$$

Postup: Podle Newtonova gravitačního zákona je přitažlivá gravitační síla F , kterou musíme překonávat, rovna

$$F = \frac{\kappa M m}{x^2},$$

kde x je vzdálenost od středu Země. Mechanická práce W je pak integrál této síly

$$W = \int_R^\infty F dx = \int_R^\infty \frac{\kappa M m}{x^2} dx = \kappa M m \left[-\frac{1}{x} \right]_R^\infty = \frac{\kappa M m}{R} \doteq 3,8 \times 10^9.$$

Maple:

```
> f:=k*M*m/x^2;
                                     k M m
                                     f := ----
                                     2
                                     x
> w:=int(f,x=r..infinity) assuming r>0;
                                     k M m
                                     w := ----
                                     r
> k:=6.7e-11: M:=6e24: m:=60: r:=6.4e6:
> w;
                                     10
0.3768750000 10
```

Mathematica:

```

In[1] := f=k*M*m/x^2;
In[2] := w=Integrate[f,{x,r,Infinity}]
          k m M
Out[2]=  -----
          r
In[3] := k=6.7*10^-11; M=6*10^24; m=60; r=6.4*10^6;
In[4] := w
          9
Out[4]= 3.76875 10

```