

1 Jak lze předpovídat počasí pomocí barometru



Obrázek 1: Vlevo: Barometr měří tlak vzduchu, na stupnici je v oblasti nízkého tlaku uvedeno déšť a v oblasti vysokého tlaku slunečno. Vpravo: Dříve se místo číselné stupnice používalo zobrazení pomocí panenky, která znamenala pěkné počasí, a panáčka, který znamenal ošklivé počasí.

1.1 Coriolisova síla

V důsledku otáčení Země působí na tělesa, která se pohybují po jejím povrchu, zdánlivá síla, která se nazývá Coriolisova síla. Odvodíme si její směr

a velikost.

Uvažujme hmotný bod v rovině. Jeho polohu můžeme popsat dvěma reálnými kartézskými souřadnicemi x a y nebo jednou komplexní souřadnicí $z = x + iy$, kde i je imaginární jednotka. Uvažujme druhý souřadnicový systém, který je vůči prvnímu otočený o úhel φ . Je-li v tomto druhém souřadnicovém systému poloha bodu popsána komplexním číslem Z , pak v prvním souřadném systému je souřadnice bodu

$$z = Z \exp(i\varphi).$$

Uvažujme případ, kdy první souřadnicový systém je inerciální a druhý souřadnicový systém je neinerciální a vůči prvnímu systému se otáčí s konstantní úhlovou rychlostí ω . Pak v čase t platí

$$z = Z \exp(i\omega t).$$

Abychom dostali zrychlení, dvakrát tento vztah zderivujeme podle času t

$$\dot{z} = \dot{Z} \exp(i\omega t) + i\omega Z \exp(i\omega t)$$

$$\ddot{z} = \ddot{Z} \exp(i\omega t) + 2i\omega \dot{Z} \exp(i\omega t) - \omega^2 Z \exp(i\omega t)$$

a vyjádříme

$$\ddot{Z} = \ddot{z} \exp(-i\omega t) - 2i\omega \dot{Z} + \omega^2 Z.$$

Vidíme, že zrychlení bodu v otáčejícím se neinerciálním systému má tři členy. První člen odpovídá skutečné síle. Pokud na hmotný bod o hmotnosti m působí v inerciálním systému skutečná síla F , tak mu uděluje zrychlení

$$\ddot{z} = \frac{F}{m}$$

a toto zrychlení je v otáčejícím se systému popsáno prvním členem

$$\ddot{z} \exp(-i\omega t).$$

Třetí člen

$$\omega^2 Z$$

je odstředivé zrychlení. Míří od středu otáčení, je nezávislé na rychlosti $\dot{Z}$, je úměrné vzdálenosti od osy otáčení, a je úměrné druhé mocnině úhlové rychlosti otáčení ω . Lze je vysvětlit působením zdánlivé síly, která se nazývá odstředivá síla.

Podívejme se podrobně na druhý člen

$$a_C = -2i\omega\dot{Z}.$$

To je zrychlení, které se nazývá Coriolisovo zrychlení. Lze je vysvětlit působením zdánlivé síly, která se nazývá Coriolisova síla. Toto zrychlení (a tato síla) je úměrné rychlosti pohybu $\dot{Z}$, je úměrné rychlosti otáčení ω a v důsledku násobení imaginární jednotkou i je toto zrychlení kolmé na směr pohybu $\dot{Z}$ a míří doprava.

Dosud jsme uvažovali pohyb v rovině. V třírozměrném prostoru můžeme uvažovat třetí osu ve směru otáčení neinerciálního systému vůči inerciálnímu. Zavedeme vektor úhlové rychlosti $\vec{\omega}$, jeho velikost bude úhlová rychlost ω a jeho směr bude v ose otáčení podle pravidla pravé ruky. Případný pohyb hmotného bodu ve směru osy otáčení není otáčením ovlivněn. Můžeme pak napsat vektor Coriolisova zrychlení ve tvaru vektorového součinu

$$\vec{a}_C = 2\vec{v} \times \vec{\omega},$$

kde $\vec{v}$ je vektor rychlosti hmotného bodu v otáčející se neinerciální soustavě.

1.2 Důsledek bočné síly

Pro vyšetření účinku této síly, která působí kolmo na směr pohybu, uvažujme opět pohyb hmotného bodu v rovině, kde jeho polohu popíšeme komplexním číslem Z . Uvažujme nejprve působení konstantní externí síly, která bodu uděluje konstantní zrychlení a_E . Pohyb bodu pak popisuje diferenciální rovnice

$$\ddot{Z} = a_E.$$

Uvažujme počáteční podmínky

$$Z(0) = 0,$$

tedy výchozí poloha bodu v počátku a

$$\dot{Z}(0) = 0,$$

tedy výchozí rychlost nulová. Pak integrací diferenciální rovnice dostaneme

$$\dot{Z}(t) = a_E t$$

a

$$Z(t) = \frac{1}{2}a_E t^2.$$

Tedy rychlost roste lineárně s časem, ve směru působící síly, a poloha roste kvadraticky s časem, také ve směru působící síly.

Uvažujme nyní případ, kdy na hmotný bod působí jednak konstantní síla udělující mu konstantní zrychlení podobně jako v předchozím případě, ale také Coriolisova síla působící kolmo na směr pohybu a úměrná rychlosti pohybu. Pohyb bodu bude pak popsán diferenciální rovnicí

$$\dot{Z} = a_E - 2i\omega Z.$$

To je diferenciální rovnice druhého řádu, kterou lze převést na rovnici prvního řádu substitucí

$$v = \dot{Z},$$

kde v je rychlost. Tím dostaneme rovnici

$$\dot{v} = a_E - 2i\omega v$$

s počáteční podmínkou

$$v(0) = 0.$$

Pro reálné nenulové a_E a pro reálné ω tato rovnice nemá konstantní řešení, pravá strana se nikdy nerovná nule. Tuto rovnici lze řešit separací proměnných

$$\frac{dv}{a_E - 2i\omega v} = dt$$

$$\ln(a_E - 2i\omega v) = \ln a_E - 2i\omega t$$

$$a_E - 2i\omega v = a_E \exp(-2i\omega t)$$

$$v = a_E \frac{1 - \exp(-2i\omega t)}{2i\omega}.$$

Integrací rychlosti bychom dostali závislost polohy bodu na čase. Vidíme, že rychlost v má dva členy. Jeden je konstantní

$$v_K = -\frac{i}{2\omega}a_E$$

a míří překvapivě kolmo na působící sílu. Druhý je periodický s nulovou střední hodnotou. Pohyb bodu je tedy po cykloidě a skládá se z rovnoměrného kruhového pohybu a rovnoměrného přímočarého pohybu kolmo na směr působící síly.

27.3.2019
Pavel.Pokorny@vscht.cz