

Centrální limitní věta

Cíl:

chceme ukázat, že vhodně normovaný součet nezávislých náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a s konečnými momenty se blíží k náhodné veličině s normálním rozdělením.

Uvažujme náhodnou veličinu X s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$, pro kterou platí:

$$\begin{aligned}\int_R f(x)dx &= 1 \\ \int_R xf(x)dx &= 0 \\ \int_R x^2f(x)dx &= \sigma^2.\end{aligned}$$

Pro Fourierovu transformaci

$$\widehat{f}(\nu) = \int_R f(x) \exp(-i2\pi\nu x)dx$$

funkce f platí

$$\begin{aligned}\widehat{f}(0) &= \int_R f(x)dx = 1 \\ (\widehat{f})'(\nu) &= -i2\pi \int_R xf(x) \exp(-i2\pi\nu x)dx \\ (\widehat{f})'(0) &= -i2\pi \int_R xf(x)dx = 0 \\ (\widehat{f})''(\nu) &= (-i2\pi)^2 \int_R x^2f(x) \exp(-i2\pi\nu x)dx \\ (\widehat{f})''(0) &= (-i2\pi)^2 \int_R x^2f(x)dx = -4\pi^2\sigma^2\end{aligned}$$

Takže Taylorův rozvoj dá

$$\widehat{f}(\nu) = 1 - 2\pi^2\sigma^2\nu^2 + \mathcal{O}(\nu^3)$$

Má-li náhodná veličina X hustotu pravděpodobnosti $f(x)$ s Fourierovou transformací $\widehat{f}(\nu)$, pak náhodná veličina $Y = \frac{X}{\sqrt{n}}$ má hustotu pravděpodobnosti $g(y) = \sqrt{n}f(y\sqrt{n})$ s Fourierovou transformací

$$\widehat{g}(\nu) = \widehat{f}\left(\frac{\nu}{\sqrt{n}}\right) = 1 - 2\pi^2\sigma^2\nu^2/n + \mathcal{O}\left(\frac{\nu^3}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

A součet n nezávislých náhodných veličin

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$$

má hustotu pravděpodobnosti danou konvolucí

$$g * g * \cdots * g$$

s Fourierovou transformací

$$(\widehat{g}(\nu))^n = \left(1 - 2\pi^2\sigma^2\nu^2/n + \mathcal{O}\left(\frac{\nu^3}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)^n$$

což pro $n \rightarrow \infty$ má limitu

$$\exp(-2\pi^2\sigma^2\nu^2)$$

a tedy hustota pravděpodobnosti je

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

Pokud Vás tento text zaujal,
kladně nebo záporně,
budu rád, když mi dáte vědět na adresu
`Pavel.Pokorny@vscht.cz`

V Praze, 17. března 2014
Pavel Pokorný
Ústav matematiky
Vysoká škola chemicko-technologická v Praze