Fourierova inverze pomocí Gaussovy funkce

Komentovaný přepis rukopisu

Poznámka k přepisu. Zachováváme konvenci a postup z rukopisu. Regularizovanou funkci značíme $f_\varepsilon(x)$ místo původního $f(x)$, aby bylo zřejmé, že závisí na parametru $\varepsilon > 0$.

1. Fourierova transformace a inverzní transformace

Pro funkci $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definujeme Fourierovu transformaci

$$\widehat{s}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} s(t)\, e^{-2\pi i \nu t}\, \mathrm{d}t. \tag{1}$$

Zpětnou (inverzní) transformaci zapisujeme pomocí opačného znaménka v exponentu:

$$\check{s}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} s(t)\, e^{2\pi i \nu t}\, \mathrm{d}t. \tag{2}$$

2. Gaussova funkce a její škálování

Zvolíme Gaussovu funkci

$$g(x) = e^{-\pi x^2}, \qquad \widehat{g}(\nu) = e^{-\pi \nu^2}. \tag{3}$$

Vysvětlení. Při konvenci (1) je Gaussova funkce sama sobě Fourierovým obrazem. Platí také $\int_{\mathbb{R}} g(u)\,\mathrm{d}u = 1$.

Pro $\varepsilon > 0$ je

$$g(\varepsilon x) = e^{-\pi(\varepsilon x)^2}, \qquad \widehat{g(\varepsilon\,\cdot)}(\nu) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\pi(\nu/\varepsilon)^2}. \tag{4}$$

Vysvětlení. Škálovací pravidlo Fourierovy transformace zní $\widehat{h(\varepsilon\,\cdot)}(\nu) = \varepsilon^{-1}\widehat{h}(\nu/\varepsilon)$ pro $\varepsilon > 0$.

3. Regularizovaná Fourierova inverze

Nechť $s \in L^1(\mathbb{R})$. Položíme

$$f_\varepsilon(x) := \mathcal{F}^{-1}\left[\widehat{s}(\nu)\, g(\varepsilon\nu)\right](x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{s}(\nu)\, g(\varepsilon\nu) e^{2\pi i \nu x}\, \mathrm{d}\nu. \tag{5}$$

Dosazením definice Fourierovy transformace dostáváme

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-2\pi i \nu t}\, \mathrm{d}t \right) g(\varepsilon\nu) e^{2\pi i \nu x}\, \mathrm{d}\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} s(t) \left(\int_{\mathbb{R}} g(\varepsilon\nu) e^{-2\pi i \nu (t-x)}\, \mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} s(t)\, \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-\pi \left(\frac{t-x}{\varepsilon} \right)^2 \right) \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{6}$$

Vysvětlení. Ve druhém řádku jsme zaměnili pořadí integrace (Fubiniho věta). Vnitřní integrál ve třetím řádku vypočteme pomocí (4): jde o Fourierovu transformaci funkce $\nu \mapsto g(\varepsilon\nu)$ v bodě $t - x$.

Nyní substituujeme $t - x = \varepsilon u$, tedy $t = x + \varepsilon u$ a $\mathrm{d}t = \varepsilon\,\mathrm{d}u$:

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} s(x + \varepsilon u) e^{-\pi u^2}\, \mathrm{d}u. \tag{7}$$

4. Limita pro $\varepsilon \to 0^+$

Bod spojitosti. Je-li s spojitá v bodě x, pak pro každé pevné u platí $s(x+\varepsilon u) \to s(x)$. Za vhodného předpokladu omezenosti (například $s \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$) lze použít větu o dominované konvergenci:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} f_\varepsilon(x) = s(x) \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi u^2}\,\mathrm{d}u = s(x). \tag{8}$$

Bod nespojitosti se dvěma jednostrannými limitami. Nechť existují konečné limity $s(x-)$ a $s(x+)$. Integrál (7) rozdělíme na dvě poloviny:

$$f_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{0} s(x+\varepsilon u) e^{-\pi u^2}\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{\infty} s(x+\varepsilon u) e^{-\pi u^2}\,\mathrm{d}u. \tag{9}$$

Pro $u < 0$ konverguje argument k x zleva, pro $u > 0$ zprava. Při stejné podmínce omezenosti proto

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0^+} f_\varepsilon(x) &= s(x-) \int_{-\infty}^{0} e^{-\pi u^2}\,\mathrm{d}u + s(x+) \int_{0}^{\infty} e^{-\pi u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \boxed{\frac{s(x-) + s(x+)}{2}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Vysvětlení. Gaussova funkce je sudá a má integrál roven jedné. Každá její polovina má tedy integrál $1/2$. Hodnota $s(x)$ přímo v bodě skoku nemá na výsledek vliv.

5. Souvislost s vlastní inverzní formulí

Rovnice (8)–(10) dokazují konvergenci *Gaussovsky regularizovaného* inverzního integrálu (5). Aby bylo možné z regularizace jednoduše přejít k integrálu bez faktoru $g(\varepsilon\nu)$, stačí navíc předpokládat $\widehat{s} \in L^1(\mathbb{R})$: potom podle dominované konvergence

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{s}(\nu) e^{2\pi i \nu x}\,\mathrm{d}\nu = \check{\widehat{s}}(x). \tag{11}$$

V bodě spojitosti tedy platí

$$\boxed{\check{\widehat{s}}(x) = s(x).} \tag{12}$$

Důležitá poznámka. Pro funkce se skutečným skokem nemusí být $\widehat{s}$ absolutně integrovatelná. V takovém případě rovnice (10) stále vyjadřuje limitu Gaussovsky regularizovaných integrálů, nikoli bez dalšího konvergenci nevlastního inverzního integrálu bez regularizace.