Plancherelova rovnost Fourierovy transformace

Nechť $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ je komplexně hodnotová Schwartzova funkce. Dopřednou Fourierovu transformaci a inverzní Fourierovu transformaci budeme označovat

$$\widehat{s}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} s(t)\, e^{-2\pi i \nu t}\, \mathrm{d}t, \tag{1}$$

$$\check{s}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} s(t)\, e^{+2\pi i \nu t}\, \mathrm{d}t. \tag{2}$$

Značka $\check{f}$ v dalším textu znamená inverzní Fourierovu transformaci libovolné funkce f; z věty o inverzi plyne $\check{\widehat{s}} = s$.

Tvrzení (Plancherelova rovnost). Pro tuto normalizaci Fourierovy transformace platí

$$\|s\|_{L^2}^2 = \|\widehat{s}\|_{L^2}^2. \tag{3}$$

Důkaz. Označme levou a pravou stranu dokazované rovnosti

$$L = \|s\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} s(t)\, \overline{s(t)}\, \mathrm{d}t, \tag{4}$$

$$R = \|\widehat{s}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \widehat{s}(\nu)\, \overline{\widehat{s}(\nu)}\, \mathrm{d}\nu. \tag{5}$$

Pruh nad symbolem označuje komplexní sdružení.

1. Vyjádření levé strany pomocí konvoluce. Připomeňme definici konvoluce

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(x - y)\, \mathrm{d}y. \tag{6}$$

Pro $x = 0$ dostaneme

$$(f * g)(0) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(-y)\, \mathrm{d}y. \tag{7}$$

Zavedeme odraženou funkci $g_-(x) = g(-x)$. Potom

$$(f * g_-)(0) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(y)\, \mathrm{d}y. \tag{8}$$

Volbou $f = s$ a $g = \overline{s}$ získáme z (4)

$$\boxed{L = (s * \overline{s}_-)(0)}, \qquad \overline{s}_-(x) := \overline{s(-x)}. \tag{9}$$

2. Fourierova transformace komplexně sdružené funkce. Z definice (1) vyplývá

$$\begin{aligned} \widehat{\overline{s(t)}} &= \int_{\mathbb{R}} \overline{s(t)}\, e^{+2\pi i \nu t}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{s(-t)}\, e^{-2\pi i \nu t}\, \mathrm{d}t \\ &= \widehat{\overline{s}_-}(\nu). \end{aligned} \tag{10}$$

Ve druhém řádku jsme provedli substituci $t \mapsto -t$. Aplikací inverzní Fourierovy transformace na (10) obdržíme

$$\boxed{\check{\widehat{s}} = \overline{s}_-}. \tag{11}$$

3. Vyjádření pravé strany a porovnání. Podle definice inverzní transformace v bodě nula je

$$R = \int_{\mathbb{R}} \widehat{s}(\nu)\overline{\widehat{s}(\nu)}\,\mathrm{d}\nu = (\check{\widehat{s}}\,\widehat{\overline{s}})(0). \tag{12}$$

Použijeme větu o konvoluci pro inverzní Fourierovu transformaci, $(\check{f}g) = \check{f} * \check{g}$, a potom rovnosti $\check{\widehat{s}} = s$ a (11):

$$\begin{aligned} R &= (\check{\widehat{s}}\,\widehat{\overline{s}})(0) \\ &= (\check{\widehat{s}} * (\check{\widehat{\overline{s}}}))(0) \\ &= (s * \overline{s}_-)(0) \\ &= L. \end{aligned} \tag{13}$$

Tím je dokázáno

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{s}(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu}.$$

□

Poznámka k předpokladům. Důkaz jsme uvedli pro $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, aby byly použité transformace, součiny a konvoluce dobře definované. Protože $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ je hustá v $L^2(\mathbb{R})$, rovnost norem umožňuje rozšířit Fourierovu transformaci jednoznačně na izometrii prostoru $L^2(\mathbb{R})$. V tomto smyslu platí Plancherelova rovnost i pro libovolné $s \in L^2(\mathbb{R})$.